Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen

volume: 5, T.2

by unknown author

Göttingen; 1904

ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN

FÜNFTER BAND IN DREI TEILEN

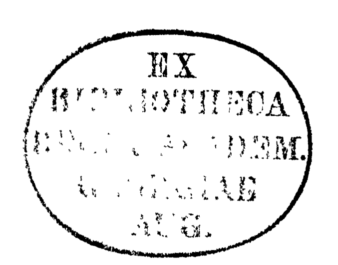
PHYSIK

REDIGIERT VON

A. SOMMERFELD
IN MÜNCHEN

ZWEITER TEIL

LEIPZIG
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER
1904—1922



Inhaltsverzeichnis zu Band V, 2. Teil.

D. Elektrizität und Optik.

12. Standpunkt der Fernwirkung. Die Elementargesetze. Von R. Reiff in Stuttgart und A. Sommerfeld in Aachen.

Seite
1. Coulomb 4
2. Örsted, Biot und Savart 7
3. Ampère 10
4. Graßmann 20
5. Franz Neumann 23
6. Wilhelm Weber 34
7. Gauß und Riemann 45
8. Carl Neumann 51
9. Clausius 55

(Abgeschlossen im Dezember 1902.)

13. Maxwells elektromagnetische Theorie. Von H. A. Lorentz in Leiden.

I. Vorbereitende Begriffe und Rechnungsmethoden.

1. Einleitung 67
2. Ponderabele Materie und Äther 69
3. Mathematische Behandlungsweise und Bezeichnungen 70
4. Hilfssätze aus der Vektorentheorie 73

II. Die mathematische Formulierung der Maxwellschen Theorie.

5. Die in den Feldgleichungen auftretenden Vektoren 78
6. Die Hauptgleichungen 81
7. Bemerkungen zu den angenommenen Einheiten 83
8. Beziehungen zwischen den Zustandsgrößen an derselben Stelle 88
9. Elektromotorische Kräfte 89

III. Anwendung der Grundgleichungen.

10. Vergleichung der Theorie mit den Beobachtungen 90
11. Elektrische Ladung 92
12. Elektrostatik 93
13. Elektrische Polarisation 94
14. Konstante Ströme in Leitern 94
15. Magnetismus. Magnetisierung 95
16. Das magnetische Feld konstanter Ströme 96
17. Zerlegung des elektrischen Stroms 97
18. Der magnetische Strom und die unipolare Induktion. Dualität zwischen den elektrischen und den magnetischen Erscheinungen 99

Seite
19. Permanente Magnete 101
20. Versuche von Blondlot 102
21. Fortpflanzung des Lichtes. Aberration 103

IV. Allgemeine Folgerungen und Theoreme.

22. Energie. Poyntingscher Satz 105
23. Ponderomotorische Kräfte 107
24. Beispiele für die Bestimmung der ponderomotorischen Kräfte 110
25. Bemerkung zur Definition der elektrischen und der magnetischen Kraft 113
26. Bewegungen des Äthers 113
27. Reziprozitäts- und Minimalsätze 114
28. Vektorpotential der magnetischen Erregung 116
29. Änderung der magnetischen Energie bei unendlich kleiner Änderung des elektrischen Stromes 117
30. Elektrische und magnetische Erregungslinien 118
31. Bewegung der Erregungslinien in einfachen Fällen 121
32. Verschiedene Auffassungen der Hauptgleichungen 122

V. Zusammenhang der Theorie mit den Prinzipien der Mechanik. Mechanische Analogien und Bilder.

33. Anwendung der Prinzipien der Mechanik 122
34. Dynamische Theorie von Maxwell 123
35. Allgemeine Betrachtungen 124
36. Ableitung der zweiten Hauptgleichung 127
37. Berechnung der ponderomotorischen Kräfte 128
38. Helmholtz' Anwendung des Prinzips der kleinsten Wirkung 130
39. Bemerkungen zu der Anwendung des Prinzips der kleinsten Wirkung 133
40. Die Elektrizität als inkompressibele Flüssigkeit. Maxwells Vorstellungen über den Mechanismus 134
41. Verschiedener Charakter der elektrischen und der magnetischen Zustandsgrößen 135
42. Anschluß an die Theorie elastischer Medien 136
43. Thermodynamische Behandlung 140

VI. Vergleichung von Fern- und Feldwirkungstheorien.

44. Fernwirkungstheorie von Helmholtz 141
45. Verhältnis zwischen den Feldwirkungs- und den Fernwirkungstheorien 143

(Abgeschlossen im Juni 1903.)

14. Weiterbildung der Maxwellschen Theorie. Elektronentheorie. Von H. A. Lorentz in Leiden.

I. Grundlagen der Elektronentheorie.

1. Allgemeines 151
2. Grundgleichungen für den Äther 155
3. Die auf die geladene Materie wirkende Kraft 156
4. Einführung von Potentialen 156
5. Integration der Potentialgleichungen 158
6 Energie. Poyntingscher Satz 159
7. Allgemeine Betrachtung der auf geladene Materie wirkenden Kräfte. Elektromagnetischer Impuls 161
8. Ableitung der Grundgleichungen aus den Prinzipien der Mechanik . . 164
9. Allgemeine den Grundgleichungen äquivalente Sätze 167
10. Die Hauptgleichungen für ein bewegliches Koordinatensystem 170

Seite

II. Bestimmung des elektromagnetischen Feldes bei gegebener Lage und Bewegung der Elektronen.

11. Elektrostatisches Feld 173
12. Zustand des Feldes, wenn die erregende Ladung in einem unendlich kleinen Raum liegt 177
13. Ein elektrisch polarisiertes Teilchen 178
14. Eine einfache Lichtquelle 180
15. Ein magnetisiertes Teilchen 181
16. Rotierende geladene Kugeln 182
17. Das von einem Elektron mit beliebiger Bewegung erregte Feld 184
18. Ausstrahlung von Energie 186
19. Entstehung von Röntgenstrahlen 187

III. Freie Elektronen. Bestimmung der Bewegung bei gegebenem äußerem Felde.

20. Rückwirkung des Äthers auf ein langsam bewegtes Elektron von beliebiger Gestalt. Widerstand gegen die Bewegung 188
21. Elektromagnetische Masse der Elektronen 190
22. Quasi-stationäre Bewegungen im allgemeinen. Rückwirkung des Äthers auf ein rotierendes Elektron 193
23. Wirkung eines äußeren Feldes 194
24. Bewegung eines Elektrons in einem gegebenen Felde 198
25. Wechselwirkung zweier Elektronen 199

IV. Elektromagnetische Vorgänge in ponderablen Körpern.

26. Die Elektronen in den ponderablen Körpern 200
27. Mittelwerte 201
28. Hilfssätze für die Berechnung der Mittelwerte 203
29. Mittelwerte, die von den Leitungselektronen herrühren 206
30. Mittelwerte, die von den Polarisationselektronen herrühren 206
31. Mittelwerte, die von den Magnetisierungselektronen herrühren 207
32. Die verschiedenen Teile des elektrischen Stroms 208
33. Die Grundgleichungen für die Mittelwerte 208
34. Versuche von Eichenwald 210
35. Das elektromagnetische Feld im Innern verschieden gestalteter Höhlungen 211
36. Die auf die Elektronen und die Teilchen wirkenden Kräfte 215
37. Leitfähigkeit 218
38. Elektrizitätsbewegung in Elektrolyten 219
39. Gasionen 221
40. Elektrizitätsbewegung in Metallen 221
41. Halleffekt und verwandte Erscheinungen 222
42. Induktion in bewegten Leitern 223
43. Polarisierte Dielektrika 223
44. Statistische Zustände in einem ruhenden System von Leitern und isotropen Nichtleitern 225
45. Induktion in einem bewegten Dielektrikum 226
46. Deformation eines Dielektrikums 227
47. Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante und des Brechungsexponenten von Dichte und Zusammensetzung der Körper 229
48. Elektronentheorie der Magnetisierung 230
49. Elektrische Ströme in magnetisierten Leitern 235
50. Allgemeine Betrachtungen betreffend die Beziehungen zwischen den Zustandsgrößen 239
51. Energie und Energiefluß in ruhenden Körpern 240
52. Andere Bestimmung der Energie und des Energieflusses 241
53. Fiktive Spannungskomponenten in ruhenden unmagnetisierten Nichtleitern 245

Seite
54. Energie und Energiefluß in bewegten Nichtleitern. Verifizierung der Resultate . . . 250
55. Bemerkungen zu den ponderomotorischen Kräften . . . 254

V. Nähere Betrachtung bewegter Systeme.

56. Einfluß der Erdbewegung auf elektromagnetische Erscheinungen . . . 255
57. Einfluß einer Translation auf optische Erscheinungen in durchsichtigen Körpern . . . 265
58. Aberration des Lichtes . . . 266
59. Versuche mit irdischen Lichtquellen . . . 267
60. Mitführung der Lichtwellen durch die ponderabele Materie . . . 271
61. Andere Ableitung des zur Erklärung der Aberration führenden Satzes 272
62. Der Michelsonsche Interferenzversuch . . . 273
63. Theorie von Cohn . . . 274

VI. Schluß.

64. Gegenwärtiger Stand der Theorie . . . 277
65. Anwendung der Begriffe der Elektronentheorie auf andere Gebiete . . 279

(Abgeschlossen im Dezember 1903.)

15. Elektrostatik und Magnetostatik. Von R. Gans in Tübingen.

1. Einleitung . . . 291
2. Elektromagnetische Theorie . . . 292
3. Die Grundgleichungen der Elektrostatik und der Magnetostatik . . . 293
4. Eindeutigkeit des Feldes. Vergleich mit der Fernwirkungstheorie . . 295
5. Allgemeine Eigenschaften des Feldes . . . 296
6. Superposition der Felder. Die Energie . . . 298

I. Elektrostatik.

A. Die Dielektrizitätskonstante ist im ganzen Raume eine und dieselbe Konstante.

7 Systeme von Leitern. Kapazität. Potentialverstärker. Influenzmaschine. Plattenkondensator . . . 299
8. Kräfte eines Leitersystems. Absolutes Elektrometer. Quadrantelektrometer . . . 304
9. Zweidimensionale Probleme. Abbildung. Dichtigkeit der Elektrizität an Kanten . . . 306
10. Anwendung auf das Schutzgitter . . . 310
11. Anwendung auf den Kondensator . . . 313
12. Kugel. Ellipsoid. Zylinder Ring . . . 317
13. Elektrische Bilder. Zwei Kugeln . . . 319

B. Die Dielektrizitätskonstante hat in verschiedenen Teilen des Raumes verschiedene Werte.

14. Ungeladene Dielektrika im Felde. Leiter als Grenzfall des Dielektrikums. Kondensator mit geschichtetem Dielektrikum . . . 325
15. Influenz. Wahre und freie Elektrizität . . . 327
16. Influenz auf Ellipsoid und Kugel. Clausius-Mossottische Theorie . . . 328
17. Hohlkugel und Hohlzylinder im gleichförmigen Feld . . . 330
18. Spannungen und Kräfte . . . 331
19. Kräfte auf starre Körper . . . 331
20. Elektromotorische Kräfte . . . 334
21. Kristalle . . . 335
22. Rückstand . . . 336

II. Magnetostatik.

Seite
23. Unterschiede der magnetostatischen und elektrostatischen Probleme . . 337
24. Gibt es wahren Magnetismus? 338
25. Influenz. Wahrer und freier Magnetismus 339
26. Energie und Kräfte 342
27. Kräfte auf starre Körper 342
28. Magnetisches Moment. Horizontalintensität. Kompaß 343
29. Magnetische Doppelschichten 345
30. Kristalle 346
31. Ferromagnetische Körper 347
32. Hysteresis 348

(Abgeschlossen im Oktober 1906.)

16. Beziehungen zwischen elektrostatischen und magnetostatischen Zustandsänderungen einerseits und elastischen und thermischen andererseits. Von F. Pockels in Heidelberg.

1. Maxwellsches Spannungssystem im Dielektrikum 351
2. Die Bedeutung der Maxwellschen Spannungen für die Elektrostriktion 356
3. Spannungen, welche durch die Veränderlichkeit der dielektrischen Konstanten bedingt werden 359
4. Elektrostriktion von Flüssigkeiten 361
5. Elektrostriktion isotroper fester Körper. Ihre Behandlung nach den Methoden der Elastizitätstheorie 362
6. Fortsetzung. Energetische Behandlung 366
7. Magnetostriktion 369
8. Piëzoelektrizität und Elektrostriktion azentrischer Kristalle. Allgemeiner Ansatz 374
9. Spezialisierung für die einzelnen Kristallgruppen 378
10. Anwendung auf besondere Fälle 380
11. Polare Pyroelektrizität und reziproker Wärmeeffekt 384
12. Molekulartheorien der Piëzo- und Pyroelektrizität 386
13. Zentrische Pyro- und Piëzoelektrizität 388
14. Pyro- und Piëzomagnetismus 392

(Abgeschlossen im Oktober 1906.)

17. Stationäre und quasistationäre Felder. Von P. Debye in München

I. Stationäres Feld.

A. Allgemeine Formulierung der Probleme.

1. Grundgleichungen 395
2. Das innere elektrische Feld 396
3. Das äußere elektrische Feld 398
4. Das magnetische Feld. Allgemeiner Fall 399
5. Das magnetische Feld. Spezieller Fall $\mu = \text{const}$. 401

B. Spezielle Behandlung körperlicher Leiter.

6. Die übliche Fragestellung 401
7. Die Greensche Funktion 404
8. Elektroden endlicher Abmessungen. Halbraum, Kugel 406
9. Kirchhoffs Methode zur Bestimmung der Leitfähigkeit. Parallelopiped. Kreiszylinder 411
10. Nobilische Ringe 412

Seite

11. Inhomogene Leiter 415
12. Näherungsweise Berechnung des Widerstandes. Draht von variabelem Querschnitt. Übergangswiderstand 416

C. Flächenleiter.

13. Grundgleichungen. Übliche Fragestellung 419
14. Zusammenhang mit der Theorie der Flächen 419
15. Ebene Platten 421
16. Gekrümmte Platten 424

D. Lineare Leiter.

17. Grundgleichungen 425
18. Das äußere Feld 427
19. Spezielle Fälle der Stromverzweigung: Wheatstonesche Brücke usw. . . 429
20. Das magnetische Feld in speziellen Fällen: Einzelner gerader Draht, zwei oder mehrere parallele gerade Drähte 431
21. Das magnetische Feld eines Kreisstroms 434
22. Das magnetische Feld einer Spule 437

II. Quasistationäres Feld.

A. Allgemeines.

23. Grundgleichungen und Potentiale 441
24. Die Energiegleichung 445

B. Spezielles über Körper- und Flächenleiter.

25. Körperliche Leiter. a) Ruhende Körper 446
b) Bewegte Körper 449
26. Flächenleiter 452

C. Lineare Leiter.

27. Die gewöhnlichen Differentialgleichungen für Stromkreise ohne Kapazität. Definition der Induktionskoeffizienten 454
28. Die Differentialgleichungen für Stromkreise mit Kapazität 459
29. Die Energiegleichung 460
30. Induktionskoeffizienten für geradlinige Leiter. Der mittlere geometrische Abstand 462
31. Werte für R in speziellen Fällen 463
32. Werte für die Induktionskoeffizienten in speziellen Fällen.
a) Gerade Leiter 464
b) Kreisförmige Leiter 467
33. Spezielle Fälle von Stromkreisen mit zeitlich veränderlicher elektromotorischer Kraft. Der Widerstandsoperator 472
34. Wheatstonesche Brücke für Wechselstrom 474

III. Ponderomotorische Wirkungen.

35. Berechnung der Kräfte zwischen Strömen 476
36. Galvanometer 478
37. Das ballistische Galvanometer 479

(Abgeschlossen Ende 1909.)

18. Elektromagnetische Wellen. Von M. Abraham in Mailand.

I. Einleitung.

1. Die Feldgleichungen und die Grenzbedingungen 484
2. Geschichte und Begrenzung des Gebietes 485

II. Entstehung und Ausbreitung elektrischer Wellen.

Seite

3. Theorie der Entladung eines Kondensators 487
4. Die Hertzsche Lösung der Feldgleichungen 489
5. Superposition Hertzscher Lösungen. 492
6. Elektrische Eigenschwingungen 495
   a) Allgemeine Sätze 496
   b) Orthogonale Koordinaten 498
   c) Spezielle Fälle. 500
7. Sendeantennen der drahtlosen Telegraphie 505
8. Elektrische Resonanz 509
9. Zerstreuung elektrischer Wellen 511

II. Fortleitung elektrischer Wellen durch Drähte.

10. Eindringen des Feldes in zylindrische Leiter. Skin-Effekt 514
11. Elektrische Drahtwellen; elementare Theorie 519
12. Drahtwellen; strenge Theorie.
    a) Einzeldraht 526
    b) Kabel und Paralleldrähte. 531
13. Reflexion am Ende der Leitung 535

(Abgeschlossen im Juli 1906.)

19. Relativitätstheorie. Von W. Pauli jr. in München.

I. Grundlagen der speziellen Relativitätstheorie.

1. Historisches (Lorentz, Poincaré, Einstein) 543
2. Das Relativitätspostulat 547
3. Das Postulat von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Die Theorie von Ritz und verwandte Theorien 549
4. Relativität der Gleichzeitigkeit Ableitung der Lorentz-Transformation aus den beiden Postulaten. Axiomatik der Lorentz-Transformation . . 553
5. Lorentz-Kontraktion und Zeitdilatation 556
6. Einsteins Additionstheorem der Geschwindigkeiten und seine Anwendung auf Aberration und Mitführungskoeffizient. Dopplereffekt 561

II. Mathematische Hilfsmittel.

7. Die vierdimensionale Raum-Zeitwelt (Minkowski) 567
8. Übergang zu allgemeineren Transformationsgruppen 568
9. Tensorrechnung bei affinen Koordinatentransformationen 570
10. Die geometrische Bedeutung der kontra- und kovarianten Komponenten eines Vektors. 575
11. Flächen- und Raumtensoren. Vierdimensionales Volumen 578
12. Duale Ergänzung zu Flächen- und Raumtensoren 581
13. Übergang zur allgemeinen Geometrie Riemanns 582
14. Begriff der Parallelverschiebung eines Vektors. 585
15. Geodätische Linien 588
16. Raumkrümmung 590
17. Riemanns Normalkoordinaten und ihre Anwendungen 593
18. Die Spezialfälle der euklidischen Geometrie und der konstanten Krümmung 598
19. Die Integralsätze von Gauß und Stokes im vierdimensionalen Riemannschen Raum 603
20. Herleitung von invarianten Differentialoperationen mit Benutzung der geodätischen Komponenten 607
21. Affintensoren und freie Vektoren. 610
22. Realitätsverhältnisse 613
23. Infinitesimale Koordinatentransformation und Variationssätze 616

III. Weiterer Ausbau der speziellen Relativitätstheorie.

a) Kinematik.

Seite
24. Vierdimensionale Darstellung der Lorentz-Transformation 622
25. Das Additionstheorem der Geschwindigkeiten 625
26. Transformation der Beschleunigung. Hyperbelbewegung 626

b) Elektrodynamik.

27. Invarianz der Ladung. Viererstrom 628
28. Die Kovarianz der Grundgleichungen der Elektronentheorie. 630
29. Ponderomotorische Kraft und Dynamik des Elektrons 634
30. Impuls und Energie des elektromagnetischen Feldes. Differential- und Integralform der Erhaltungssätze. 638
31. Das invariante Wirkungsprinzip der Elektrodynamik. 642
32. Anwendungen auf spezielle Fälle:
α) Die Integration der Potentialgleichungen. 644
β) Das Feld der gleichförmig bewegten Punktladung 646
γ) Das Feld der Hyperbelbewegung 647
δ) Invarianz der Lichtphase. Reflexion am bewegten Spiegel. Strahlungsdruck 648
ε) Das Strahlungsfeld eines bewegten Dipols 652
ζ) Die Reaktionskraft der Strahlung 654
33. *Minkowskis* phänomenologische Elektrodynamik bewegter Körper . . . 654
34. Elektronentheoretische Ableitungen. 659
35. Impuls-Energietensor und ponderomotorische Kraft der phänomenologischen Elektrodynamik. Joulesche Wärme 662
36. Anwendungen der Theorie:
α) Die Versuche von Rowland, Röntgen, Eichenwald und Wilson . . . 668
β) Widerstand und Induktion in bewegten Leitern. 670
γ) Die Ausbreitung des Lichtes in bewegten Medien. Mitführungskoeffizient. Versuch von Airy 670
δ) Signalgeschwindigkeit und Phasengeschwindigkeit in dispergierenden Medien 672

c) Mechanik und allgemeine Dynamik.

37. Die Bewegungsgleichungen. Impuls und kinetische Energie 673
38. Von der Elektrodynamik unabhängige Begründung der relativistischen Mechanik 675
39. Das Hamiltonsche Prinzip der relativistischen Mechanik 677
40. Generalisierte Koordinaten. Kanonische Form der Bewegungsgleichungen 678
41. Die Trägheit der Energie 679
42. Allgemeine Dynamik 682
43. Transformation von Energie und Bewegungsgröße eines Systems bei Vorhandensein von äußeren Kräften 684
44. Anwendung auf spezielle Fälle. Versuch von Trouton-Noble. 685
45. Hydrodynamik und Elastizitätstheorie 689

d) Thermodynamik und Statistik.

46. Das Verhalten der thermodynamischen Zustandsgrößen bei einer Lorentz-Transformation. 693
47. Prinzip der kleinsten Wirkung. 695
48. Die Anwendung der relativistischen Mechanik auf die Statistik. . . . 696
49. Spezialfälle:
α) Die Strahlung im bewegten Hohlraum. 697
β) Das ideale Gas 699

IV. Allgemeine Relativitätstheorie.

50. Historisches bis zu Einsteins Arbeit von 1916. 701
51. Allgemeine Formulierung des Äquivalenzprinzips. Zusammenhang zwischen Gravitation und Metrik 705

Seite

52. Das Postulat der allgemeinen Kovarianz der Naturgesetze 710
53. Einfache Folgerungen aus dem Äquivalenzprinzip:
    a) Die Bewegungsgleichungen des Massenpunktes bei langsamen Geschwindigkeiten und schwachen Gravitationsfeldern 711
    b) Die Rotverschiebung der Spektrallinien 712
    c) Fermats Prinzip der kürzesten Lichtzeit in statischen Gravitationsfeldern 716
54. Der Einfluß des Schwerefeldes auf materielle Vorgänge 718
55. Die Wirkungsprinzipien für materielle Vorgänge bei Vorhandensein von Gravitationsfeldern 720
56. Die Feldgleichungen der Gravitation 721
57. Herleitung der Gravitationsgleichungen aus einem Variationsprinzip . . 724
58. Vergleich mit der Erfahrung:
    a) Newtons Theorie als erste Näherung 726
    b) Strenge Lösung für das Gravitationsfeld eines Massenpunktes . . . 727
    c) Perihelbewegung des Merkur und Krümmung der Lichtstrahlen . . 730
59. Andere spezielle, strenge Lösungen im statischen Fall 733
60. Einsteins allgemeine Näherungslösung und ihre Anwendungen 736
61. Die Energie des Gravitationsfeldes 740
62. Modifikation der Feldgleichungen. Relativität der Trägheit und räumlich-geschlossene Welt:
    a) Das Machsche Prinzip 743
    b) Betrachtungen über das statistische Gleichgewicht des Fixsternsystems. Das λ-Glied 745
    c) Die Energie der geschlossenen Welt 748

V. Theorien über die Natur der elektrischen Elementarteilchen.

63. Elektron und spezielle Relativitätstheorie 749
64. Die Theorie von Mie 754
65. Die Theorie von Weyl 759
    a) Reine Infinitesimalgeometrie. Eichinvarianz 759
    b) Elektromagnetisches Feld und Weltmetrik 761
    c) Der Tensorkalkül in Weyls Geometrie 763
    d) Feldgesetze und Wirkungsprinzip. Physikalische Folgerungen . . . 766
66. Die Theorie von Einstein 771
67. Allgemeines über den gegenwärtigen Stand des Problems der Materie. 773

(Abgeschlossen im Dezember 1920.)

20. Elektronentheorie der Metalle. Von Rudolf Seeliger in Greifswald.

1. Einleitung; historische Übersicht; Abgrenzung des Gebietes 778

I. Die gaskinetischen Theorien der Wärme- und Elektrizitätsleitung.

2. Grundlagen der Theorien von Riecke und Drude 781
3. Theorie von Riecke 784
4. Theorie von Drude 785
5. Vervollkommnung der Theorie durch H. A. Lorentz 788
6. Allgemeine Statistik von Debye 791
7. Theorie von Bohr 795
8. Ergänzungen und Erweiterungen 798

II. Anwendungen und Folgerungen der gaskinetischen Theorie.

9. Das Gesetz von Wiedemann und Franz; Temperaturkoeffizient des elektrischen Leitvermögens 803
10. Thermoelektrische Effekte. Voltaeffekt 807

Seite
11. Thermomagnetische und galvanomagnetische Effekte 811
12. Legierungen, Halbleiter 822
13. Optik der Metalle 829

III. Das Elektronengas.

14. Freie Elektronen im Innern des Metalls. Die Elektronenkonstanten . 835
15. Thermoionische Untersuchungen 843
16. Die thermodynamischen Arbeiten von Laue und Schottky 848

IV. Semigaskinetische und quantentheoretische Ansätze.

17. Kritik der gaskinetischen Theorien 851
18. Theorie von J. J. Thomson 855
19. Die Gittertheorien 859
20. Die phoretische Elektronentheorie von Benedicks 863
21. Quantentheoretische Ansätze 864
22. Theorie von W. Wien 870
23. Beziehungen zur Atomphysik. Ausblick 874

(Abgeschlossen im Mai 1921.)

Übersicht
über die im vorliegenden Bande V, 2. Teil zusammengefaßten Hefte und ihre Ausgabedaten.

D. Elektrizität und Optik.

Heft	Inhalt
Heft 1. 16. VI. 1904.	12. Reiff und Sommerfeld: Standpunkt der Fernwirkung. Die Elementargesetze. 13. Lorentz: Maxwells elektromagnetische Theorie. 14. Lorentz: Weiterbildung der Maxwellschen Theorie. Elektronentheorie.
Heft 2. 12. III. 1907.	15. Gans: Elektrostatik und Magnetostatik. 16. Pockels: Beziehungen zwischen elektrostatischen und magnetostatischen Zustandsänderungen einerseits und elastischen und thermischen andererseits.
Heft 3. 18. III. 1910.	17. Debye: Stationäre und quasistationäre Felder. 18. Abraham: Elektromagnetische Wellen.
Heft 4. 15. IX. 1921.	19. W. Pauli jr.: Relativitätstheorie.
Heft 5. 15. II. 1922.	20. Seeliger: Elektronentheorie der Metalle. Inhaltsverzeichnis von Band V, 2. Teil.



D. ELEKTRIZITÄT UND OPTIK.



V 12. STANDPUNKT DER FERNWIRKUNG. DIE ELEMENTARGESETZE.

Von

R. REIFF IN STUTTGART UND **A. SOMMERFELD** IN AACHEN.

Inhaltsübersicht.

1. *Coulomb*.
2. *Örsted*, *Biot* und *Savart*.
3. *Ampère*.
4. *Graßmann*.
5. *Franz Neumann*.
6. *Wilhelm Weber*.
7. *Gauß* und *Riemann*.
8. *Carl Neumann*.
9. *Clausius*.

Literatur.

Lehrbücher.

G. Wiedemann, Die Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus. Braunschweig 1861, 2. Aufl. 1874, 3. Aufl. (Die Lehre von der Elektrizität) 1882, 4. Aufl. 1889.

F. Neumann, Vorlesungen über elektrische Ströme, herausgeg. von *K. Vondermühll*, Leipzig 1884.

B. Riemann, Schwere, Elektrizität und Magnetismus, herausgeg. von *K. Hattendorf*, Hannover, erste Aufl. 1876.

G. Kirchhoff, Vorlesungen über Elektrizität und Magnetismus, herausgeg. von *M. Planck*, Leipzig 1891.

H. Poincaré, Électricité et optique, Paris, deutsch von *Jäger* und *Gumlich*, Berlin 1891.

P. Duhem, Leçons sur l'électricité et le magnétisme, Paris 1891.

Monographien.

A Ampère, Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience. Paris 1826.

W. Weber, Elektrodynamische Maßbestimmungen. Leipz. Abh. 1840—1878.

1. Abh.: Insbesondere über ein allgemeines Grundgesetz der elektrischen Wirkungen.
2. Abh.: Insbesondere Widerstandsmessungen.
3. Abh.: Insbesondere über Diamagnetismus.
4. Abh.: *R. Kohlrausch* und *W. Weber,* Zurückführung der Stromintensitätsmessungen auf mechanisches Maß.
5. Abh.: Insbesondere über elektrische Schwingungen.
6. Abh.: Insbesondere über das Prinzip der Erhaltung der Energie.
7. Abh.: Insbesondere über die Energie der Wechselwirkung.

R. Clausius, Die mechanische Behandlung der Elektrizität, Bd. 2 der Mechanischen Wärmetheorie, 2. Ausg. Braunschweig 1879.

C. Neumann, Die Prinzipien der Elektrodynamik. Gratulationsschrift der Tübinger Universität zum Jubiläum der Bonner Universität. Tübingen 1868, abgedruckt in Math. Ann. 17 (1880), p. 400.

— Die elektrischen Kräfte. Leipzig, Teil I 1873, Teil II 1878.

— Allgemeine Untersuchungen über das Newtonsche Prinzip der Fernwirkungen, Leipzig 1896.

E. Wiechert, Grundlagen der Elektrodynamik. Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmals. Leipzig 1899.

Sammelwerke.

Collection de Mémoires relatives à la physique, publ. par la société française de physique, T. 2, 3. Paris 1885, 1887.

W. Weber, Ges. Werke Bd. 3 und 4. 1893.

H. v. Helmholtz, Ges. Abhandlungen. Leipzig 1882—1895.

In *Ostwald*'s „Klassiker der exakten Wissenschaften" erschienen:

Nr. 10. *F. Neumann,* Die mathematischen Gesetze der induzierten elektrischen Ströme (1845). Herausgeg. von *C. Neumann.*

Nr. 13. *Coulomb*, 4 Abhandlungen über die Elektrizität und den Magnetismus (1785—1788). Herausgeg. von *W. König.*

Nr. 36. *F. Neumann,* Über ein allgemeines Prinzip der mathematischen Theorie induzierter elektrischer Ströme (1847). Herausgeg. von *C. Neumann.*

Nr. 63. *Hans Christian Örsted* und *Thomas Johann Seebeck,* Zur Entdeckung des Elektromagnetismus (1820—1821). Herausgeg. von *A. J. v. Öttingen.*

Nr. 81—87 und Nr. 126, 128. *Michael Faraday,* Experimental-Untersuchungen über Elektrizität (1832—1838). Herausgeg. von *A. J. v. Öttingen.*

---

1. Coulomb. Die Grundlagen für die theoretische Behandlung der elektrischen und magnetischen Erscheinungen hat *Ch. A. Coulomb* im Jahre 1785 gegeben. Nachdem er im vorangehenden Jahre gezeigt hatte, daß man die Torsion eines Drahtes benutzen kann, um sehr kleine Kräfte zu messen, wendete er diese Methode nun an, um die Kraft der Anziehung und Abstoßung elektrischer Mengen zu bestimmen. Zu dem Ende konstruierte er seine Torsionswage, neben welcher er auch ein elektrisches Horizontalpendel benutzte. Seine

Untersuchungen legte er der Pariser Akademie in sieben Abhandlungen vor[1]).

In der ersten Abhandlung leitete er mit Hülfe der Torsionswage und des elektrischen Horizontalpendels das Gesetz vom umgekehrten Quadrat der Entfernung für die Wirkung der elektrischen und magnetischen Kräfte ab. Von da aus wurde er zu einer eingehenden Untersuchung über den Elektrizitätsverlust geladener Körper geführt, die er in der dritten Abhandlung niederlegte.

Für die theoretische Behandlung der Probleme sind ferner die vierte und die siebente Abhandlung bedeutsam.

In der vierten Abhandlung werden die zwei wichtigsten Sätze über die Gleichgewichtsverteilung der Elektrizität auf einem Leiter festgestellt: „Die Verteilung der Elektrizität ist unabhängig vom Material der Leiter“ und „Die Elektrizität findet sich nur auf der Oberfläche der Leiter“. Die Methode zum Nachweis des letzteren Satzes bestand im wesentlichen in der Anwendung von Probescheiben, die in das Innere des mit Öffnungen versehenen Körpers eingeführt wurden. Das experimentelle Ergebnis wußte *Coulomb* auch durch eine theoretische Überlegung zu stützen, die hier angeführt werden möge. An die Oberfläche des elektrisch geladenen Körpers wird in irgend einem Punkt die Tangentialebene gelegt und durch eine zu ihr benachbarte Parallelebene ein unendlich kleines Stück des (konvex gedachten) Leiters abgeschnitten. Zu diesem Stück wird darauf in Bezug auf die Parallelebene das symmetrische konstruiert. Wäre nun die Elektrizität gleichnamig und stetig durch das Innere des Körpers verteilt, so würden die in den beiden symmetrischen Stücken enthaltenen elektrischen Mengen, deren Dichtigkeit innerhalb dieser Gebiete als konstant betrachtet werden darf, auf die Elektrizität in der Symmetrieebene entgegengesetzt gleiche Wirkungen ausüben. Die Wirkung der im ganzen übrigen Körper vorhandenen Elektrizität würde aber eine abstoßende Kraft liefern. Daher kann sich die Elektrizität auf der genannten Parallelebene nicht im Gleichgewicht befinden. Elektrizität kann also nur auf der Oberfläche des Leiters vorhanden sein, wenn man freie Beweglichkeit der Elektrizität im Leiter voraussetzt.

In der siebenten Abhandlung endlich findet sich diejenige Anschauung über das Wesen des Magnetismus, die später von *Poisson* seinen Entwickelungen zu Grunde gelegt wurde, wonach die magnetischen Flüssigkeiten nicht frei im Körper verschiebbar, sondern an die Molekeln desselben gebunden sind.

---

1) Histoire et Mémoires de l'Académie Royale. Paris, 1785—1787. Vgl. auch Litteraturübersicht, Ostwald's Klassiker.

Zu den elektrischen Arbeiten *Coulomb's* ist noch zu erwähnen, dass *H. Cavendish*[2]) nach einer erst nach seinem Tode veröffentlichten Arbeit vom Jahre 1772 die *Coulomb*'schen Resultate schon teilweise vor diesem gefunden hat.

Eine der bedeutsamsten Folgerungen, die später aus den *Coulomb*schen Untersuchungen gezogen sind, besteht darin, dass sie die Handhabe bieten zur *absoluten zahlenmäßigen Messung der Elektrizitätsmenge und der Menge des Magnetismus.* Nach *Coulomb* kann die mechanische Kraft $\mathfrak{F}$, die zwei elektrische Mengen $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}'$ bezw. zwei Magnetpole $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ im Abstande r aufeinander ausüben, gleichgesetzt werden

$$(1) \qquad \mathfrak{F} = k\frac{\mathfrak{e}\mathfrak{e}'}{r^2}, \quad \mathfrak{F} = h\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{m}'}{r^2},$$

wo k und h Proportionalitätsfaktoren bedeuten und positiv sind, wenn Abstoßung als positiv gerechnet wird. Dabei möge vorausgesetzt werden, daß sich zwischen den beiden elektrischen oder magnetischen Mengen Luft befinde. Nimmt man nun die Faktoren k und h gleich 1 und mißt man $\mathfrak{F}$ z. B. im absoluten Maß (CGS-System), so ist damit die Dimension und die Einheit der Elektrizitätsmenge sowie der Menge des Magnetismus festgelegt. Insbesondere wird in den heute gebräuchlichen absoluten Einheiten die Elektrizitätsmenge (Magnetismusmenge) 1 diejenige, welche in der Entfernung 1 auf eine gleich große Menge die Kraft 1 Dyne ausübt. Die so definierte Elektrizitätseinheit heisst die *elektrostatische* Einheit. Dagegen ist die durch internationale Festsetzung definierte und nach *Coulomb* benannte Elektrizitätseinheit nicht auf das elektrostatische, sondern auf das elektromagnetische Maßsystem begründet (vgl. Nr. **6**); sie ist gleich 1/10 der elektromagnetischen Elektrizitätseinheit und (vgl. Nr. **6**) gleich $3 \cdot 10^9$ elektrostatischen Einheiten. Die soeben definierte Einheit des Magnetismus ist die im *elektromagnetischen System* benutzte *magnetische* Einheit; sie wurde von *C. F. Gauß*[3]), dem Begründer des absoluten Maßsystems, eingeführt und verwertet.

Zugleich mit der Einheit des elektrischen und magnetischen Quantums ist auch die *elektrische* und *magnetische Feldstärke* (oder Kraft) als diejenige mechanische Kraft festgelegt, welche an einem Orte auf die dorthin gebrachte Einheit der Elektrizität oder des Magnetismus wirken würde, wenn das Feld durch Hinzufügung dieser

---

2) Electrical Researches, geschrieben zwischen 1771 und 1781, herausgeg. von Cl. Maxwell 1879.

3) Intensitas vis magneticae ad mensuram absolutam revocata, Göttingen 1832, Ges. Werke 5, p. 81—118.

Einheit nicht merklich geändert würde. Die elektrische Feldstärke ergibt sich auf diese Weise im elektrostatischen, die magnetische Feldstärke im magnetischen Maßsystem.

Eine wesentliche Ergänzung hat das *Coulomb*'sche Gesetz später durch *M. Faraday* erfahren, welcher zeigte, dass das Zwischenmedium bei der Übertragung der Kraft eine Rolle spielt. Die Proportionalitätsfaktoren h und k sind nämlich von der Beschaffenheit des Mediums abhängig und erweisen sich umgekehrt proportional der sogen. Dielektrizitätskonstanten (ε) bezw. der sogen. magnetischen Permeabilität (μ) des Mediums[4]. Setzt man also für den leeren Raum (oder für Luft) $h = k = 1$, so ist für irgend ein anderes Medium zu setzen $k = 1/\varepsilon$, $h = 1/\mu$. Entsprechend kann man auch für den leeren Raum k und h als die reziproken Werte der Dielektrizitätskonstanten bezw. der Permeabilität des reinen Äthers bezeichnen, welche Größen also im absoluten elektrostatischen bezw. elektromagnetischen System (willkürlich) gleich 1 angenommen werden.

In den folgenden Artikeln wird übrigens eine Maßbestimmung benutzt werden, in der k und h nicht gleich 1 sondern gleich $1/4\pi$ gewählt werden, was vom Standpunkte der Feldwirkungstheorien aus naturgemäßer ist. Auch wird dort (Art. 13, Nr. 7e) ein allgemeineres Maßsystem erwähnt werden, bei welchem von einer willkürlichen Festsetzung dieser Faktoren überhaupt abgesehen wird.

2. Örsted, Biot und Savart. Die ersten Versuche über die Einwirkung des elektrischen Stromes auf die Magnetnadel hat *Örsted*[5]) angestellt. Ob er zu seinen Versuchen durch Zufall oder durch Überlegung gekommen ist, geht aus der Abhandlung nicht hervor.

Der grundlegende Versuch wurde von *Örsted* folgendermaßen beschrieben: Der Strom wird zunächst von Süd nach Nord über die Magnetnadel in der Richtung des magnetischen Meridians fortgeführt, wobei das Nordende der Nadel gegen Westen abgelenkt wird. Wird der Strom in derselben Horizontalebene gegen Westen oder Osten parallel mit sich verschoben, so ergibt sich in beiden Fällen gleichsinnige Ablenkung der Nadel. *Örsted* zieht hieraus den Schluß, daß die Wirkung des Stromes auf die Nadel nicht von anziehenden oder abstoßenden Kräften herrühren könne, weil alsdann derjenige Pol der

4) *M. Faraday*, Experimental researches, 11. Reihe § 1164, 14. Reihe § 1669 und 1670, ebenfalls teilweise von *Cavendish* antizipiert.

5) *Chr. Örsted*, Experimenta circa efficaciam conflictus electrici in acum magneticam, Hafniae 1820. Abgedruckt Schweigger's Journal 29 (1820), p. 273 und Annalen d. Phys. u. Chemie (Gilbert) 66 (1820), p. 295.

Nadel, der sich dem Strom nähert, wenn er auf der östlichen Seite liegt, sich ihm auch nähern müßte, wenn er auf der westlichen Seite fließt. Wird der Strom unter der Nadel vorbeigeführt, so ist die Ablenkung entgegengesetzt derjenigen, die sich ergab, als er sich oberhalb der Nadel befand. Aus diesen Tatsachen scheint nun für *Örsted* hervorzugehen, daß der „elektrische Strom einen Wirbel um den Leiter bilde"; denn es sei die Eigentümlichkeit des Wirbels, an den Enden eines Durchmessers im entgegengesetzten Sinne zu wirken.

Man kann bemerken, daß die Vorstellung des Wirbels recht gut mit demjenigen Bilde stimmt, welches man sich heute über den Verlauf der magnetischen Kraftlinien um einen geraden Leiter bildet.

Örsted begnügte sich mit der *qualitativen* Darlegung der Verhältnisse. Die *quantitative* Untersuchung führten noch in demselben Jahre *J. B. Biot* und *F. Savart* durch[6]). Sie stellten sich die Aufgabe, die Wirkung eines *Stromelementes* auf den Magnetpol ihrer Größe nach zu bestimmen.

Zunächst wurde die Wirkung eines vertikalen Stromes auf eine in der Horizontalebene schwingende Nadel in ihrer Abhängigkeit von der Entfernung untersucht, indem die Schwingungen, welche die Nadel unter dem Einfluß des Stromes ausführte, ihrer Schwingungsdauer nach verglichen wurden. Dabei zeigte sich, dass die Kraft, welche der als unendlich lang zu betrachtende Strom auf den einzelnen Magnetpol ausübt, umgekehrt proportional der kürzesten Entfernung des Pols vom Strome ist. Die Richtung der Kraft steht auf der durch den Stromleiter und den Pol bestimmten Ebene senkrecht.

Da die relative Lage eines Stromelementes gegen einen Pol aber nicht nur von der Entfernung, sondern auch von dem Winkel zwischen Entfernung und Stromelement abhängt, so untersuchten *Biot* und *Savart* weiter die Wirkung eines gegen die Vertikale geneigten Stromes, indem sie den Stromleiter in einer Vertikalebene schief gegen die Nadel führten, derart, daß der Leiter von oben gegen die durch die Nadel gelegte Horizontalebene unter einem Winkel α verlief und unterhalb dieser Ebene mit einem Knick unter demselben Winkel α in der gleichen Vertikalebene fortgeführt wurde. Hierbei ergab sich,

6) Mitteilungen über die Versuche wurden im Oktober und Dezember 1820 an die Pariser Akademie gemacht, die indessen nicht veröffentlicht wurden. Die erste gedruckte Mitteilung findet sich im Journal des Savants 1821, p. 221. Ausführlich sind die Versuche dargestellt in der 3. Aufl. von *Biot's*: Précis élémentaire de physique, 2, p. 704, Paris 1818 und 1821, deutsch von *Fechner,* 4, p. 158, Leipzig 1828. Vgl. auch Coll. de Mémoires, 2, p. 80.

daß die Wirkung proportional der Tangente des halben Winkels α war, wenn α an der der Nadel abgewandten Seite des Knickes gemessen wurde.

Von diesen Tatsachen aus mußte nun auf die Wirkung der Stromelemente geschlossen werden. Wenn die Wirkung des geraden Stromes umgekehrt proportional der ersten Potenz des kürzesten Abstandes ist, so mußte die Wirkung des Stromelementes umgekehrt proportional *dem Quadrat des Abstandes* r von Pol und Stromelement angesetzt werden. Wenn ferner die Wirkung des oben geschilderten geknickten Drahtes proportional mit $\operatorname{tg} \alpha/2$ und umgekehrt proportional mit dem Abstand a des Knickungspunktes vom Pol ist, so mußte das Differential eines Integrals gesucht werden, welches längs des geknickten Drahtes geführt, den Wert $\frac{1}{a} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ ergab. Eine mögliche Form dieses Differentials ist

$$ds \frac{\sin(ds, r)}{r^2}, \tag{2}$$

wo ds die Länge des Stromelementes und (ds, r) den Winkel zwischen ds und r bedeutet. Denn es wird für den genannten Integrationsweg

$$\int \frac{\sin(ds, r)}{r^2} ds = \frac{2}{a} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Die Formel (2) spricht das *Biot-Savart*'sche Gesetz aus, wonach *die Wirkung eines Stromelementes auf einen Magnetpol umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung und direkt proportional dem Sinus des Winkels zwischen dem vom Pol aus gezogenen Radiusvektor und der Richtung des Stromelementes ist.* Der Richtung nach steht die Kraft sowohl auf dem Stromelement wie auf dem Radiusvektor senkrecht.

Zur Bestimmung der absoluten Grösse dieser Wirkung, also zur Bestimmung des von der Stromstärke abhängigen Proportionalitätsfaktors, fehlte in jener Zeit noch ein geeignetes Maß der Stromstärke, welches in theoretisch befriedigender Weise erst durch die Untersuchungen von *Ampère* geliefert wurde.

Ebenfalls von *Ampère* rührt eine allgemeingültige Regel zur Bestimmung des *Sinnes* der Kraft her; (*Ampère*'sche *Regel*): Wenn man sich im Stromelement schwimmend denkt, so daß der positive Strom zum Kopfe austritt und das Gesicht der Magnetnadel zugewandt ist, so weist die auf den Nordpol der Nadel wirkende Kraft nach *links.*

Einfacher gestaltet sich die Ausdrucksweise, wenn man eine allgemeine Verabredung darüber trifft, wie einem gegebenen Drehsinn ein bestimmter Fortschreitungssinn zugeordnet werden soll. Man knüpft

hierbei passend an das Bild einer *Rechtsschraube* an und setzt fest: einem gegebenen Drehsinn *entspreche* als zugehöriger Fortschreitungssinn derjenige, in dem die Rechtsschraube bei der vorgegebenen Drehung vorrückt. (Vgl. die nebenstehende Figur, die als Grundlage für eine konsequente Bestimmung der Vorzeichen in der gesamten mathematischen Physik dienen kann.)

Handelt es sich um zwei Drehungen mit irgendwie zugeordneten Fortschreitungsrichtungen, so werden wir sagen, dass die Zuordnung *gleichnamig* ist, wenn in beiden Kombinationen die Fortschreitungsrichtungen dem Sinne der Drehungen entsprechen oder in beiden nicht entsprechen; daß dagegen die Zuordnung *ungleichnamig* ist, wenn in der einen Kombination die Fortschreitungsrichtung der Drehrichtung entspricht, in der anderen nicht entspricht.

Im Falle des *Biot-Savart*'schen Gesetzes wird nun durch die Richtung des positiven Stromes im Linienelement ein bestimmter Umkreisungssinn des Magnetpols innerhalb der durch Element und Pol gelegten Ebene festgelegt; der Inhalt der *Ampère*'schen Regel lässt sich alsdann einfach dahin aussprechen, dass *der Sinn der auf den Nordpol wirkenden Kraft dem Sinn dieser Umkreisung „entspricht"*.

3. Ampère. Kurz nach *Örsted* hat *A. Ampère* die Kräfte untersucht[7]), welche vom Strom durchflossene Leiter aufeinander ausüben. Er ging dabei mit wunderbarer Folgerichtigkeit sogleich auf die scharfe mathematische Formulierung des Gesetzes aus; seine Methode zeigt eine seltene Vereinigung von experimentellem und mathematischem Denken. Dass *Ampère* ein Elementargesetz suchte, d. h. daß er die Wirkung endlicher Ströme aufeinander aus der Summation der Wirkungen ihrer einzelnen Elemente abzuleiten wünschte, ist bei dem grossen Einfluß, den das *Newton*'sche Anziehungsgesetz auf die Entwicklung der gesamten mathematischen Physik ausgeübt hat, nicht zu verwundern, um so weniger, als *Coulomb* für die Wirkung ruhender elektrischer Mengen ein dem *Newton*'schen analoges Gesetz gefunden hatte.

Dem *Newton*'schen Gesetz entnahm *Ampère* die Hypothese, daß die Kraft zwischen zwei Stromelementen *einer Potenz der Entfernung*

7) Die Versuche *Ampère*'s waren ziemlich gleichzeitig mit denen von *Biot* und *Savart* im Jahre 1820 Gegenstand von Mitteilungen an die Pariser Akademie. Die erste Veröffentlichung erfolgte in den Ann. chim. phys. 15, p. 59—76, p. 170—218. Die in der Literaturübersicht aufgeführte große zusammenfassende Arbeit: Mémoire de la théorie mathém. etc. erschien in den Par. Mém. 6, p. 175—388. Vgl. auch Collection de mém. 2, p. 7—54.

umgekehrt proportional sei, sowie daß die Wirkung in die *Richtung der Verbindungslinie der Elemente* falle.

Da die Ableitung[8]) der *Ampère*'schen Formel aus den experimentellen Tatsachen in fast alle Lehrbücher übergegangen ist, so mögen hier nur die (allerdings wohl etwas unsicheren) experimentellen Grundlagen angeführt werden, aus denen jene folgt. Dieselben sind:

1. Die Wirkung eines Stromes bleibt der absoluten Größe nach dieselbe, wird aber entgegengesetzt gerichtet, wenn der Strom umgekehrt wird.

2. Fließt ein Strom von A nach B in gerader Linie oder in einer beliebigen von der Geraden nur wenig abweichenden Zickzacklinie, so ist die Wirkung beidemal dieselbe.

3. Die Wirkung eines beliebigen geschlossenen Stromes auf ein Stromelement steht auf diesem stets senkrecht.

4. Die Wirkung zweier Stromelemente aufeinander bleibt unverändert, wenn die Elemente bei gleichbleibendem Strom und ähnlicher relativer Lage in demselben Verhältnis vergrößert werden wie ihre Entfernung.

Zunächst ist es nötig, ein bestimmtes Maß für die Stromstärke einzuführen. Wir folgen dabei den Ausführungen *Ampère*'s in etwas freier Weise.

Es seien i und i' die Verhältnisse der Intensitäten der fraglichen beiden Ströme zu demjenigen Strom, dessen Stärke als Einheit angenommen wird und es seien ds und ds' die Längen der beiden Stromelemente; die letzteren mögen parallel zu einander und auf ihrer Verbindungslinie senkrecht stehen. Nach der Erfahrungstatsache 1. kann alsdann die Wirkung der beiden Stromelemente aufeinander, wenn sie sich in der Entfernung 1 befinden, gleich gesetzt werden

$$k\,i\,i'\,ds\,ds'.$$

Das Vorzeichen möge so gewählt werden, daß das Zeichen $+$ eine Abstoßung, das Zeichen $-$ eine Anziehung bedeutet. Der Proportionalitätsfaktor k hängt dabei von der Wahl der Einheiten ab, also von dem zur Messung der Intensitäten benutzten Einheitsstrom und von der zur Messung der Wirkung benutzten Krafteinheit. *Setzt man mit Ampère den Faktor k gleich* -1, so ist dadurch eine Beziehung zwischen der Einheit des Stromes und der Einheit der Kraft fest-

---

8) Diese Ableitung ist diskutiert und stellenweise verschärft von *J. Liouville*, Ann. de chimie (2) 41 (1829), p. 415.

9) Vgl. Mémoire sur la théorie etc., p. 199 u. 200.

gelegt; die Einheit des Stromes bleibt nicht mehr willkürlich, sobald über die Einheit der Kraft verfügt ist.

Der Zeit *Ampère*'s lag es am nächsten, alle Kräfte auf die Schwere zu beziehen, also diejenige Kraft als Einheit zu wählen, die die Schwere auf die Volumeinheit eines geeigneten Körpers ausübt. Wählt man als diesen Körper Wasser und als Längeneinheit 1 cm, so ist die Krafteinheit als 1 gr (Gewicht) zu bezeichnen. Die hieraus mit $k = -1$ resultierende Stromeinheit möge „*Ampère*'s elektrodynamische Einheit" heissen.

Wählt man dagegen die Krafteinheit nach dem absoluten Maßsystem gleich 1 Dyne, so entsteht eine andere Stromeinheit, die schlechtweg als „elektrodynamische Einheit" bezeichnet wird. Da 1 gr (Gewicht) = 981 CGS-Einheiten (Dynen) ist, so wird die *Ampère*sche Stromeinheit gleich dem $\sqrt{981}$-fachen der gewöhnlichen elektrodynamischen Einheit.

Die durch internationale Festsetzung definierte und nach *Ampère* benannte Stromeinheit ist nicht auf das elektrodynamische, sondern auf das elektromagnetische Maß begründet (vgl. Nr. **6**); sie ist gleich 1/10 der elektromagnetischen Stromeinheit, während sich die gewöhnliche elektrodynamische Stromeinheit gleich $\sqrt{1/2}$ der elektromagnetischen Stromeinheit erweist (vgl. Nr. **6**). Somit ergibt sich die von *Ampère* definierte Stromeinheit gleich

$$\sqrt{\frac{981}{2}} \cdot 10 \text{ Amp.} = 221{,}4 \text{ Amp.}^{10)}$$

Im folgenden wird zunächst das auf die Dyne als Krafteinheit bezogene elektrodynamische Strommaß zu Grunde gelegt werden.

Aus den vorangestellten Erfahrungsthatsachen 1. und 2. folgt nun zunächst eine erste allgemeine Form des *Ampère*'schen Gesetzes.

Es sei r die Entfernung der Stromelemente ds, ds', ϑ und ϑ' ihre bez. Winkel gegen r, ω der Winkel der beiden Ebenen (ds, r) gegen (ds', r). Den Stromelementen ds und ds', sowie dem Fahrstrahl r wird dabei ein bestimmter Sinn beigelegt. Die Ebenen (ds, r) und (ds', r) sind als Halbebenen zu denken, welche nach derselben Seite von r wie ds oder ds' weisen. Die Winkel ϑ, ϑ' und ω sind hiernach eindeutig bestimmt als Winkel derjenigen kleinsten Drehungen, welche den Sinn von ds oder ds' in den von r oder die Halbebene (ds, r) in die Halbebene (ds', r) überführen. Die Intensitäten i (i') werden positiv gerechnet, wenn die Richtung des positiven Stromes

10) Vgl. eine Bemerkung von *Joubert* zu der Ausgabe der *Ampère*'schen Abhandlungen, Collection de mémoires 3, p. 24.

mit dem Sinne von ds (ds') übereinstimmt, negativ im entgegengesetzten Falle. Die Kraft $\mathfrak{F}$ zwischen beiden Elementen wird dann:

$$(3) \qquad \mathfrak{F} = -\frac{ii'ds\,ds'}{r^n}(\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\omega + \varkappa\cos\vartheta\cos\vartheta'),$$

wo $\varkappa$ und n zunächst noch unbekannte Zahlen sind. Führt man den Winkel $\varepsilon = (ds, ds')$ zwischen den Richtungen der beiden Stromelemente ein, so kann man auch schreiben:

$$(4) \qquad \mathfrak{F} = -\frac{ii'ds\,ds'}{r^n}[\cos\varepsilon + (\varkappa - 1)\cos\vartheta\cos\vartheta'].$$

Weitere Formen desselben Ausdrucks ergeben sich mit Hülfe der Differentialformeln für den Zusammenhang von r, ds und ds' mit den vorbenutzten trigonometrischen Funktionen, nämlich

$$(5) \qquad \begin{cases} \mathfrak{F} = \dfrac{ii'ds\,ds'}{r^n}\left(r\dfrac{d^2r}{ds\,ds'} + \varkappa\dfrac{dr}{ds}\dfrac{dr}{ds'}\right) \\ \quad = \dfrac{ii'ds\,ds'}{r^{n+\varkappa-1}}\dfrac{d}{ds'}\left(r^\varkappa\dfrac{dr}{ds}\right) \\ \quad = \dfrac{ii'ds\,ds'}{1+\varkappa}r^{1-n-\varkappa}\dfrac{d^2(r^{1+\varkappa})}{ds\,ds'}. \end{cases}$$

Mit Hülfe der letzten Formeln leitet *Ampère* nun aus der Erfahrungstatsache 3. ab, daß

$$1 - n - 2\varkappa = 0$$

und endlich aus der vierten, daß

$$n = 2, \text{ also } \varkappa = -\frac{1}{2}$$

ist. Die definitive Form des *Ampère*'schen Gesetzes lautet daher nach (4):

$$(6) \qquad \mathfrak{F} = -\frac{ii'ds\,ds'}{r^2}\left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'\right).$$

Da die *Ampère*'schen Schlüsse zwingend sind, so ist das vorstehende Gesetz das *einzige*, welches mit den vorausgeschickten Erfahrungstatsachen und der Annahme vereinbar ist, daß die Kraft allein von der relativen Lage der Elemente abhängt und, dem *Newton*schen Gesetze der Wechselwirkung entsprechend, in der Verbindungslinie wirkt.

Ampère gibt sodann für die Wirkung eines geschlossenen Stromes auf ein Stromelement eine Reihe bemerkenswerter Entwicklungen und Umformungen. Das Stromelement ds' befinde sich im Koordinatenursprung und bilde mit den rechtwinkligen Koordinatenachsen die Winkel λ, μ, ν. Das Koordinatensystem sei im Sinne der vorigen

Nr. so gewählt, daß die positive z-Achse demjenigen Drehsinne „entspricht“, durch den die positive x- in die positive y-Achse auf kürzestem Wege übergeführt wird. x, y, z sind die Koordinaten eines Punktes des geschlossenen Stromes, dx, dy, dz die Koordinatenänderungen beim Fortschreiten längs des Stromes in der durch willkürliche Festsetzung als positiv vereinbarten Richtung. Für die x-Komponente der Gesamtwirkung auf ds' erhält man

$$\mathfrak{F}_x = \frac{ii'}{2} ds' \left\{ \cos\mu \int \frac{x\,dy - y\,dx}{r^3} - \cos\nu \int \frac{z\,dx - x\,dz}{r^3} \right\},$$

wo sich die Integrale über den geschlossenen Strom erstrecken. Entsprechende Formeln gelten für die anderen Komponenten.

Ampère führt nun einen Vektor D ein, dessen drei Komponenten nach den Koordinatenachsen A, B, C er folgendermaßen definiert:

$$(7) \qquad A = \int \frac{y\,dz - z\,dy}{r^3}, \quad B = \int \frac{z\,dx - x\,dz}{r^3}, \quad C = \int \frac{x\,dy - y\,dx}{r^3}.$$

Dieser Vektor heißt die *Direktrix des Stromes*[11]). Er hängt nur von der Gestalt der geschlossenen Strombahn ds und dem Orte des Elementes ds', nicht aber von der Orientierung des letzteren und den Stromintensitäten ab. In den Größen A, B, C sind die Zähler der Integralelemente die (mit Vorzeichen gerechneten) doppelten Projektionen der durch die Elemente des geschlossenen Stromes und die Radienvektoren r bestimmten Dreiecke auf die Koordinatenebenen. Für ungeschlossene Ströme oder Stromelemente kommt der Begriff der Direktrix bei *Ampère* nicht vor. Den Gleichungen (7) kann man auch die Form geben:

$$(7') \qquad A = -\int \left(\frac{\partial\, 1/r}{\partial y} dz - \frac{\partial\, 1/r}{\partial z} dy \right) \text{ u. s. w.}$$

Mit Hülfe dieses Vektors D lässt sich die auf das Element ds' ausgeübte Kraft $\mathfrak{F}$ einfach folgendermaßen bestimmen; es ist

$$(8) \qquad \begin{cases} \mathfrak{F}_x = \frac{1}{2} ii'\,ds'\,(C\cos\mu - B\cos\nu), \\ \mathfrak{F}_y = \frac{1}{2} ii'\,ds'\,(A\cos\nu - C\cos\lambda), \\ \mathfrak{F}_z = \frac{1}{2} ii'\,ds'\,(B\cos\lambda - A\cos\mu). \end{cases}$$

Hiernach gelten die Gleichungen:

---

11) Seine halben Komponenten bezeichnet *F. Neumann* als die *Determinanten* des geschlossenen Stromes. Vgl. Vorlesungen über elektr. Ströme, § 41, p. 121.

$$\mathfrak{F}_x \cos\lambda + \mathfrak{F}_y \cos\mu + \mathfrak{F}_z \cos\nu = 0,$$
$$\mathfrak{F}_x A + \mathfrak{F}_y B + \mathfrak{F}_z C = 0.$$

Die erste derselben drückt die oben unter 3. genannte Tatsache aus, daß die Wirkung eines geschlossenen Stromes auf ein Element auf diesem senkrecht steht. Die zweite Gleichung zeigt außerdem, daß diese Wirkung auch senkrecht zur Direktrix gerichtet ist.

Man kann die Schreibweise der Gleichung (8) aber noch weiter vereinfachen, wenn man die Begriffe der Vektorrechnung, insbesondere den des vektoriellen Produktes einführt[12]). Faßt man neben D auch ds' vektoriell auf, so kann man sagen: $\mathfrak{F}$ *ist nach Richtung und Größe gleich dem mit* $\frac{1}{2}ii'$ *multiplizierten vektoriellen Produkt von* ds' *und* D:

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{2} ii' [ds' \cdot D]. \tag{9}$$

Für die Größe von $\mathfrak{F}$ erhält man nach der Bedeutung jener Produktbildung insbesondere noch die folgende Formel:

$$|\mathfrak{F}| = \frac{1}{2} ii' ds' D \sin(ds', D). \tag{10}$$

Die physikalische Bedeutung der Direktrix, die bei *Ampère* nur als Rechnungsgröße auftritt, wird bei der folgenden Darstellung der *Ampère'schen Theorie des Magnetismus* hervortreten.

Man betrachte zunächst eine unendlich kleine geschlossene ebene Strombahn. ξ, η, ζ seien die Winkel der Normalen der Stromebene gegen die Koordinatenachsen, x, y, z die Koordinaten eines Punktes der vom Strom umflossenen unendlich kleinen Fläche, f die Größe dieser Fläche, l der Radiusvektor vom Koordinatenanfang nach der Stromfläche, q das vom Koordinatenanfang auf die Stromebene gefällte Lot. Die Normale soll dabei nach derjenigen Seite gezogen werden, welche dem für die Umlaufung der Stromfläche gewählten Sinne entspricht. Das jener Normalen parallele Lot q soll positiv oder negativ gerechnet werden, je nachdem es dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung wie jene Normale hat. Für die Komponenten der Direktrix dieser Strombahn im Koordinatenanfang ergeben sich die Werte:

---

12) Vgl. hierzu den Art. *Abraham* IV 14 oder den Anfang des folgenden Art. von *H. A. Lorentz*. Es sei hervorgehoben, daß wir den *Sinn* des vektoriellen Produktes stets folgendermaßen wählen werden: Der aus den Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gebildete, zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ senkrechte Produktvektor $[\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}]$ weist nach derjenigen Seite hin, welche der kürzesten Überdrehung von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ „entspricht“.

$$A = -f\left(\frac{\cos\xi}{l^3} - \frac{3qx}{l^5}\right),$$

$$B = -f\left(\frac{\cos\eta}{l^3} - \frac{3qy}{l^5}\right),$$

$$C = -f\left(\frac{\cos\zeta}{l^3} - \frac{3qz}{l^5}\right).$$

Statt einer einzelnen unendlich kleinen Strombahn werde jetzt ein System von Strombahnen betrachtet, ein „Solenoid", welches folgendermassen definiert ist: Man denke sich im Raum eine beliebige Linie Mm, welche von unendlich kleinen ebenen Strombahnen umkreist wird. Die unendlich benachbarten Ebenen derselben stehen senkrecht auf der Kurve Mm und haben alle voneinander denselben Abstand a. Der Sinn aller dieser Ströme entspreche dem Sinne der Fortschreitung von M nach m. f sei die gemeinsame Flächengröße der Strombahnen. Auf ein Element ds der Kurve Mm kommen alsdann ds/a Strombahnen und man erhält für die Direktrix des Solenoides die Gleichung:

$$A = -\frac{f}{a}\int\left(\frac{\cos\xi}{l^3} - \frac{3qx}{l^5}\right)ds, \text{ u. s. w.,}$$

wo die Integration längs der Linie Mm zu erstrecken ist. Hier sind die Winkel ξ, η, ζ nichts anderes wie die Neigungswinkel der Tangente von Mm gegen die Koordinatenachsen, ihre Kosinusse also nichts anderes wie $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, wenn dx, dy, dz die Koordinatenzuwächse beim Fortschreiten längs Mm bedeuten. Ferner ist $l^2 = x^2 + y^2 + z^2$ und $q = x\frac{dx}{ds} + y\frac{dy}{ds} + z\frac{dz}{ds} = l\frac{dl}{ds}$. Man erhält also

$$A = -\frac{f}{a}\int\left(\frac{dx}{l^3} - \frac{3x\,dl}{l^4}\right) = \frac{f}{a}\left(\left(\frac{x}{l^3}\right)_M - \left(\frac{x}{l^3}\right)_m\right), \text{ u. s. w.}$$

Fällt der Pol M des Solenoides ins Unendliche, so folgt, wenn man die Koordinaten des anderen Poles wieder einfacher mit x, y, z und seinen Abstand vom Koordinatenanfang mit r bezeichnet:

$$A = -\frac{f}{a}\frac{x}{r^3}, \quad B = -\frac{f}{a}\frac{y}{r^3}, \quad C = -\frac{f}{a}\frac{z}{r^3}.$$

Die Direktrix hat also die Richtung der von dem Pole m nach dem Koordinatenanfang gezogenen Strecke und die Größe

$$D = \frac{f}{ar^2}.$$

Befindet sich im Koordinatenursprung ein Stromelement $i'ds'$ und ist i die Stärke der das Solenoid umkreisenden Ströme, so berechnet sich die Wirkung des Solenoides auf jenes Stromelement nach Gleichung (10) zu

$$(11) \qquad |\mathfrak{F}| = f\frac{ii'ds'\sin(r, ds')}{2ar^2};$$

nach Gleichung (9) steht diese Wirkung senkrecht auf der durch den Solenoidpol und das Stromelement gelegten Ebene und hat den entgegengesetzten Sinn wie diejenige Normale dieser Ebene, welche dem Umlaufssinne des Stromelementes um den Solenoidpol entspricht.

In analoger Weise kann man nach der Wirkung zweier Solenoide aufeinander fragen. Liegt von beiden Solenoiden der eine Pol im Unendlichen, der andere je in einem bestimmten endlichen Punkte und haben f', a', i' dieselbe Bedeutung für das zweite Solenoid wie f, a, i für das erste, so ergibt sich die Größe der Wirkung, wenn r den Abstand der beiden im Endlichen gelegenen Solenoidpole bedeutet, zu

$$(12) \qquad |\mathfrak{F}| = \frac{ff'ii'}{2aa'r^2};$$

der Richtung nach fällt diese Wirkung mit der Verbindungslinie r der Pole zusammen; sie bedeutet Abstoßung oder Anziehung je nachdem für beide Pole die Zuordnung zwischen der Umlaufsrichtung der positiven Ströme und der nach dem Pole hin verlaufenden Achse des Solenoides „gleichnamig" oder „ungleichnamig" ist.

Aus den letzteren Ergebnissen folgt die Berechtigung der *Ampère'schen Auffassung des Magnetismus*, wonach ein Magnet nichts anderes als ein System unendlich kleiner elektrischer Ströme (Molekularströme) oder ein Solenoid ist.

In der Tat deckt sich Gleichung (12) mit dem *Coulomb*'schen Gesetz der magnetischen Wirkungen, sobald man die den beiden Solenoidpolen entsprechenden (magnetisch gemessenen) Magnetismen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}'$ aus der Beschaffenheit der Solenoide folgendermaßen definiert:

$$(13) \qquad \mathfrak{m} = \frac{fi}{\sqrt{2}a}, \quad \mathfrak{m}' = \frac{f'i'}{\sqrt{2}a'}.$$

In gleicher Weise deckt sich Gleichung (11) mit einer gewissen Umkehrung des Gesetzes von *Biot* und *Savart*. Bei gleicher Messung und Erklärung der Stärke $\mathfrak{m}$ des Magnetpols wie soeben und bei Benutzung des elektrodynamischen Strommaßes sagt Gleichung (11) aus, daß ein Magnetpol $\mathfrak{m}$ auf ein Stromelement $i'ds'$ die Kraft

$$(14) \qquad |\mathfrak{F}| = \frac{\mathfrak{m}i'ds'\sin(r, ds')}{\sqrt{2}r^2}$$

senkrecht zur Ebene durch $\mathfrak{m}$ und ds' ausübt, welche in ds' angreift und den oben bei Gleichung (11) angegebenen Sinn hat. Nimmt man an, daß ebenso groß nur entgegengesetzt gerichtet und in $\mathfrak{m}$

angreifend diejenige Kraft ist, die das Stromelement auf den Magnetpol ausübt, so hat man in (14) den *verschärften zahlenmäßigen Ausdruck des Gesetzes von Biot und Savart.*

In der Tat stimmt die so definierte Kraft nach Richtung, Sinn und Größe mit der *Biot-Savart*'schen Kraft überein, soweit die letztere durch die Angaben der vorigen Nr. überhaupt bestimmt war.

Trotzdem besteht ein Gegensatz zwischen dem *Biot-Savart*'schen Gesetz und den vorstehend aus dem *Ampère*'schen Gesetz gezogenen Folgerungen. Dieser Gegensatz betrifft den Angriffspunkt der Kraft. Die Grundlage der *Ampère*'schen Theorie bildet nämlich die ausnahmslose Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung. Wenn also die Wirkung des Magnetpols auf das Stromelement in einer Kraft besteht, die im Stromelemente angreift, so müsste nach der *Ampère*'schen Theorie die Wirkung des Stromelementes auf den Magnetpol in einer Kraft von entgegengesetztem Sinn bestehen, *die ebenfalls im Stromelemente angreift.* Will man sie mit *Biot* und *Savart* durch eine Kraft ersetzen, *die im Magnetpol angreift,* so wäre nach dem in der Statik starrer Systeme gebräuchlichen Verfahren noch ein Kräftepaar hinzuzufügen, welches aus zwei entgegengesetzt parallelen Kräften im Stromelement und im Magnetpol besteht. Für den mit der Erfahrung allein vergleichbaren Fall der Wirkung eines geschlossenen Stromes auf einen Magneten kommt indessen dieser Gegensatz in Fortfall, weil die hierbei auftretenden Kräftepaare in der Summe verschwinden, und steht also die *Ampère*'sche Theorie mit dem *Biot-Savart*'schen Gesetze in vollem Einklang.

Eine bemerkenswerte Fassung kann man der Umkehrung des *Biot-Savart*'schen Gesetzes noch dadurch geben, daß man die dem Magnetpole $\mathfrak{m}$ entsprechende Feldstärke einführt. Dieselbe wurde in Nr. **1** als die auf einen Einheitspol wirkende mechanische Kraft definiert und hat nach dem *Coulomb*'schen Gesetz die Größe

$$\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{m}}{r^2}$$

und die Richtung von r. Mithin läßt sich die Umkehrung des *Biot-Savart*'schen Gesetzes auch so schreiben:

$$|\mathfrak{F}| = \frac{i'}{\sqrt{2}} |\mathfrak{H}| \, ds' \sin(ds', \mathfrak{H})$$

oder, wenn man den Begriff des vektoriellen Produktes benutzt und das Linienelement ds' vektoriell auffaßt:

$$\mathfrak{F} = \frac{i'}{\sqrt{2}} [ds' \cdot \mathfrak{H}]. \tag{15}$$

Diese Darstellung bringt außer der Größe auch Richtung und Sinn der Kraftwirkung $\mathfrak{F}$ zum Ausdruck.

Die *Ampère*'sche Auffassung des Magnetismus, die in genialer Weise die weiten Gebiete der Elektrizität und des Magnetismus zu einem Ganzen verschmilzt, hat sich in vieler Hinsicht als fruchtbar erwiesen; es ist andrerseits bemerkt worden, daß sie die magnetischen Begriffe zu abgeleiteten Größen herabdrückt und auf diese Weise dazu beigetragen hat, „die Aufmerksamkeit von dem heute für den ganzen Auffassungskreis so bedeutsamen Vektor der magnetischen Kraft abzulenken“[13]).

Es erübrigt noch, die physikalische Bedeutung der *Ampère*'schen Direktrix auf Grund des Begriffes der magnetischen Feldstärke zu erläutern. Da nach dem *Biot-Savart*'schen Gesetze ein Stromelement auf einen Magnetpol eine Kraft ausübt, so dürfen wir sagen, dass *ein vom Strom durchflossenes Leiterelement in seiner Umgebung ein magnetisches Feld erzeugt.* Da ferner nach Gleichung (14) die Größe der vom Stromelemente $i\,ds$ auf den magnetischen Einheitspol ausgeübten Kraft gleich $i\,ds \sin(r, ds)/\sqrt{2}\,r^2$ ist, so wird die Stärke des genannten Feldes gleich $i/\sqrt{2}\,r^3$ multipliziert in das aus dem Stromelemente ds und der Entfernung r gebildete Parallelogramm. Wünscht man zugleich mit der Größe auch die zu ds und r senkrechte Richtung der Feldstärke zum Ausdruck zu bringen, so empfiehlt sich wieder die folgende vektorielle Schreibweise, bei welcher $\mathfrak{r}$ die vom Magnetpol zum Stromelement hin gezogene Strecke r vektoriell darstellt:

$$\mathfrak{H} = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{[\mathfrak{r} \cdot ds]}{r^3}.$$

Legt man sodann durch den Anfangspunkt der Strecke $\mathfrak{r}$ ein rechtwinkliges Koordinatensystem und bezeichnet mit x, y, z die Koordinaten eines Punktes von ds, so werden die Komponenten des Vektors $\mathfrak{H}$ im Koordinatenursprung nach den drei Koordinatenachsen die folgenden:

$$(16)\quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{H}_x = \dfrac{i}{\sqrt{2}} \dfrac{y\,dz - z\,dy}{r^3}, \quad \mathfrak{H}_y = \dfrac{i}{\sqrt{2}} \dfrac{z\,dx - x\,dz}{r^3}, \\ \mathfrak{H}_z = \dfrac{i}{\sqrt{2}} \dfrac{x\,dy - y\,dx}{r^3}. \end{array} \right.$$

Betrachtet man endlich statt eines Elementes einen geschlossenen Strom von beliebiger Gestalt, so findet man das zu letzterem gehörige magnetische Feld durch Integration über die Strombahn zu:

---

13) Vgl. *E. Wiechert*, Festschrift, p. 34.

$$\mathfrak{H}_x = \frac{i}{\sqrt{2}}\int\frac{y\,dz - z\,dy}{r^3}, \quad \mathfrak{H}_y = \frac{i}{\sqrt{2}}\int\frac{z\,dx - x\,dz}{r^3},$$
$$\mathfrak{H}_z = \frac{i}{\sqrt{2}}\int\frac{x\,dy - y\,dx}{r^3}.$$

Vergleicht man aber diese Werte mit den Definitionsgleichungen (7) der *Ampère*'schen Direktrix, so zeigt sich, daß

$$A : B : C = \mathfrak{H}_x : \mathfrak{H}_y : \mathfrak{H}_z, \quad \frac{i}{\sqrt{2}} D = |\mathfrak{H}|.$$

Die Ampère'sche Direktrix bedeutet also nach Größe und Richtung diejenige magnetische Feldstärke, welche ein Strom von der elektrodynamisch gemessenen Stromstärke $i = \sqrt{2}$ in seiner Umgebung erzeugt[14]).

Endlich möge noch aus dem reichen Inhalt der *Ampère*'schen Untersuchungen erwähnt werden, daß *Ampère* die Möglichkeit, einen geschlossenen Strom von endlichen Dimensionen als ein System unendlich kleiner Ströme aufzufassen, benutzt hat, um den endlichen Strom durch eine sogen. magnetische Doppelschale zu ersetzen, eine Auffassung, die sich für die spätere Entwickelung als besonders fruchtbar erwiesen hat.

4. Graßmann. Während die *Ampère*'schen Sätze, soweit sie sich auf geschlossene Ströme beziehen, als erfahrungsmäßig sichergestellt gelten müssen, kann die *Ampère*'sche Elementarformel für Stromelemente angezweifelt und durch andere Formeln ersetzt werden, die dann allerdings für geschlossene Ströme zu dem gleichen Ergebnis wie die *Ampère*'sche Formel führen müssen. Vor allem ist in dieser Hinsicht ein von *H. Graßmann*[15]) aufgestelltes Elementargesetz zu nennen, welches übrigens in den *Ampère*'schen Formeln für geschlossene Ströme bereits vorgebildet erscheint.

Gegen das *Ampère*'sche Gesetz macht *Graßmann* geltend, daß dieses die Analogie mit dem *Newton*'schen Gravitationsgesetz auf einem äusserlichen Wege suche, da die Annahme einer nach der Verbindungslinie der Agentien gerichteten Wirkung bei zwei punktförmigen Massen geboten, dagegen bei zwei „Linienteilen" (Stromelementen) willkürlich sei. Ferner sieht er die folgende Konsequenz des *Ampère*schen Gesetzes als höchst unwahrscheinlich an, daß sich für zwei

14) Vgl. z. B. *R. Clausius*, Mechan. Behandlung der Elektrizität (näheres s. Literaturübersicht) Abschn. VIII, § 3 und 4, p. 209. *Ampère* selbst spricht sich über diesen Zusammenhang nicht explicite aus.

15) *H. Graßmann*, Ann. Phys. Chem. 64 (1845), p. 1; J. f. Math. 83 (1877) und Ges. Werke 2^2, p. 147 und 203, Leipzig 1902. Bei der Festlegung des Sinnes der Kraftwirkung sind wir von *Graßmann* abgewichen; die diesbezügliche Angabe von *Graßmann* ist unzutreffend, da sie bei stetiger Drehung von ds' eine unstetige Änderung der Kraftrichtung ergeben würde.

parallele Stromelemente ($\varepsilon = 0$, $\vartheta' = \vartheta$) die Wirkung Null ergeben soll, wenn das eine Stromelement auf einer Kegeloberfläche liegt, deren Spitze sich in dem wirkenden Element befindet, deren Achse mit diesem zusammenfällt und deren Winkel an der Spitze zum Kosinus $\frac{1}{3}$ hat, daß ferner innerhalb dieser Kegeloberfläche Abstoßung, außerhalb derselben Anziehung stattfinden soll.

Die Formel, welche *Graßmann* als Ersatz des *Ampère*'schen Gesetzes vorschlägt, lautet:

$$\frac{1}{2}\frac{i\,ds\,i'\,ds'}{r^2}\sin(r, ds)\cdot\sin(n, ds'),$$

wo n die Normale zu der durch das wirkende Element ds und den Abstand r gelegten Ebene bedeutet, so zwar, daß n dem Umlaufssinne von ds um ds' „entspricht“. Die Richtung der Kraft steht nach *Graßmann* senkrecht auf ds' und n; ihr Sinn entspricht demjenigen Drehsinne, durch welchen der Sinn des Elementes ds' auf kürzestem Wege in den Sinn der Normalen n übergedreht wird. In diesen Festsetzungen liegt, wie man sieht, eine Verletzung des *Newton*'schen Gesetzes der Wechselwirkung, auf welches sich andererseits die *Ampère*sche Annahme einer in der Verbindungslinie wirkenden Kraft stützt. Übrigens läßt sich eine Verletzung des Wechselwirkungsgesetzes sofort rechtfertigen, wenn man sich auf den Standpunkt der Feldwirkung stellt, wonach es sich im vorliegenden Falle nicht um die direkte Wirkung zweier räumlich getrennter Elemente, sondern um eine durch das Zwischenmedium vermittelte Wirkung handelt.

Liegen beide Elemente im besonderen in einer Ebene, so kann man sich denken, daß die Wirkung von ds auf ds' und ebenso die von ds' auf ds die Elemente ds' bezw. ds um den gemeinsamen Schnittpunkt beider bei unveränderter Entfernung vom Schnittpunkte zu drehen strebt und kann die Produkte Masse mal Winkelbeschleunigung dieser Drehung für beide Elemente bestimmen. Dieselben ergeben sich, wenn wie vorausgesetzt die Elemente in einer Ebene liegen, und wenn R, R' die Abstände der Elemente ds, ds' vom Schnittpunkte bedeuten:

$$(\text{für } ds')\quad \frac{1}{2}\frac{i\,ds\,i'\,ds'}{r^2}\frac{\sin(r, ds)}{R'} = \frac{1}{2}\frac{i\,ds\,i'\,ds'}{r^3}\sin(ds, ds'),$$

$$(\text{für } ds)\quad \frac{1}{2}\frac{i\,ds\,i'\,ds'}{r^2}\frac{\sin(r, ds')}{R} = \frac{1}{2}\frac{i\,ds\,i'\,ds'}{r^3}\sin(ds, ds').$$

Die Produkte aus Masse und Winkelbeschleunigung werden also für beide Elemente der Grösse nach gleich; der Sinn der Drehungen ergibt sich daraus, daß sich vermöge dieser Winkelbeschleunigungen der Winkel (ds, ds') vermindert, wenn beide Elemente nach dem

Schnittpunkte hin oder beide von ihm fortweisen, daß er sich vergrößert, wenn das eine Element nach dem Schnittpunkte hin- das andere von ihm fortweist. In diesem Umstande sieht *Graßmann* die wahre Analogie zum *Newton*'schen Gesetz, indem er die Begriffe: wirkende Punkte, wirkende Linienteile; Verbindungslinie der Punkte, Durchschnittspunkt der Linienteile; Entfernungsbeschleunigung der Punkte, Winkelbeschleunigung der Linienteile sich dual entsprechen läßt. Auch die Größe der nach seinem Gesetz berechneten Winkelbeschleunigung setzt *Graßmann* zunächst wieder für den besonderen Fall zweier sich schneidender Stromelemente in Analogie zu der Größe der *Newton*schen Entfernungsbeschleunigung, da nach der Terminologie der Ausdehnungslehre (vgl. Bd. III, Art. 1 B 3) die *Newton*'sche Kraft oder das Produkt aus Masse und Entfernungsbeschleunigung proportional dem durch r^3 dividierten Produkt der beiden anziehenden Punkte und andererseits das nach obigem Gesetz berechnete Produkt aus Masse mal Winkelbeschleunigung proportional dem durch r^3 dividierten (äußeren) Produkt der beiden Linienteile, nämlich proportional dem Inhalte des von ihnen gebildeten Parallelogrammes ist[16]).

Um den Zusammenhang des *Graßmann*'schen mit dem *Ampère*'schen Gesetz hervortreten zu lassen, führen wir denjenigen Vektor ein, dessen rechtwinklige Komponenten die bei der Definition der *Ampère*'schen Direktrix vorkommenden Integranden sein mögen und mit dA, dB, dC bezeichnet werden sollen:

$$(17) \qquad dA = \frac{y\,dz - z\,dy}{r^3}, \quad dB = \frac{z\,dx - x\,dz}{r^3}, \quad dC = \frac{x\,dy - y\,dx}{r^3}.$$

Derselbe hat Richtung und Sinn der Normalen n und die Größe:

$$|dD| = \frac{ds \sin(r, ds)}{r^2}.$$

Man kann daraufhin die Formel für die Größe der *Graßmann*'schen Kraft zunächst so schreiben:

$$|\mathfrak{F}| = \tfrac{1}{2}\, ii'ds'\, |dD| \sin(dD, ds').$$

Es lassen sich aber auch die obigen Angaben über Richtung und Sinn der *Graßmann*'schen Kraft bequem durch die Formel zum Ausdruck bringen; man hat nämlich

$$(18) \qquad \mathfrak{F} = \tfrac{1}{2}\, ii' \, [ds' \cdot dD].$$

Gleichung (18) unterscheidet sich von der aus der Ampère'schen Theorie gefolgerten Gleichung (9) nur dadurch, daß an Stelle der

16) Die *Graßmann*'sche Ausdrucksweise ist an dieser Stelle etwas verschwommen. *Graßmann* spricht von Winkeländerung statt von dem Produkt Masse mal Winkelbeschleunigung. Vgl. p. 10—12 in Ann. Phys. Chem. 64.

Direktrix des geschlossenen Stromleiters (s) die des Stromelementes (ds) getreten ist. *Graßmann* verteilt also, ohne es übrigens selbst auszusprechen, die von *Ampère* abgeleitete Integralwirkung eines geschlossenen Stromes in naheliegender Weise auf die einzelnen Elemente des geschlossenen Stromes. Dass das *Graßmann*'sche Gesetz für geschlossene Ströme zu demselben Ergebnis wie das *Ampère*'sche führen muß, ist auf Grund der vorigen Formeln einleuchtend.

Endlich läßt sich das *Graßmann*'sche Gesetz auch in Beziehung zu dem *Biot-Savart*'schen setzen. Da nämlich die für das einzelne Stromelement berechnete Direktrix nach den Gleichungen (17) und (16) bis auf den Faktor $i/\sqrt{2}$ mit der von diesem Element erzeugten magnetischen Feldstärke sich identisch erweist, so kann man statt der vorigen Gleichung auch schreiben:

$$\mathfrak{F} = \frac{i'}{\sqrt{2}}[ds' \cdot \mathfrak{H}]. \tag{19}$$

In dieser Form deckt sich das *Graßmann*'sche Gesetz völlig mit der Umkehrung des *Biot-Savart*'schen Gesetzes (Gleichung (15)), mit dem einzigen Unterschiede, dass bei dem einen Gesetz das magnetische Feld von einem Magnetpol, bei dem anderen von einem stromdurchflossenen Leiterelemente erzeugt gedacht wird.

5. Franz Neumann. Das Jahr 1831 [17]) brachte die Entdeckung der elektromagnetischen Induktion durch *Michael Faraday*. Die nächste Aufgabe der theoretischen Physik mußte darin bestehen, diese Erscheinungen an die bekannten Gesetze anzugliedern.

Den ersten Schritt hierzu hat *E. Lenz* [18]) getan durch Aufstellung der nach ihm benannten Regel, welche die Erscheinungen der durch Bewegung hervorgerufenen Induktion wenigstens qualitativ auf die *Ampère*'schen Gesetze zurückzuführen gestattet. Die *Lenz*'sche Regel lautet: *Der induzierte Strom hat immer eine solche Richtung, daß die Wirkung, welche der induzierende Strom oder Magnet auf den induzierten Leiter ausübt, wenn die Induktion durch eine Bewegung des letzteren hervorgerufen ist, diese Bewegung hemmt.* Oder mit anderen Worten: Die Richtung des induzierten Stromes ist derjenigen entgegengesetzt, die ein Strom haben müßte, wenn die vorhandene Bewegung durch elektrodynamische Einwirkung des induzierenden Systems erzeugt werden soll; wenn eine elektrodynamische Wirkung die fragliche Bewegung nicht hervorzubringen imstande ist, so ist die Bewegung auch nicht imstande, Induktion hervorzubringen. Die *Lenz*'sche Regel

17) November 1831. Vgl. Experimental-Untersuchungen, Art. 1—139.
18) Ann. Phys. Chem. 31 (1834), p. 483.

bezieht sich hiernach lediglich auf die Induktion durch *Bewegung* des induzierten Leiters. Aber gerade diese bot die Handhabe zur mathematischen Behandlung der Erscheinungen.

Eine weitere allgemeine Vorarbeit, welche der Entdeckung der Induktionserscheinungen noch vorausging, wurde durch die Feststellung des Zusammenhanges zwischen Stromstärke und elektromotorischer Kraft (*Ohm'sches Gesetz*) geliefert. *Der Begriff der elektromotorischen Kraft* war einerseits durch den *Volta*'schen Fundamentalversuch und die Aufstellung der Spannungsreihe der Metalle, andererseits durch die Untersuchungen von *Th. J. Seebeck* über die Thermoströme und die Aufstellung der thermoelektrischen Reihe begründet. Man versteht unter der *elektromotorischen Kraft längs eines bestimmten* (geschlossenen oder ungeschlossenen) *Weges* das *Linienintegral der gesamten auf die Elektrizitätseinheit wirkenden Kraft.* Von der elektromotorischen Kraft zwischen zwei Punkten schlechtweg (ohne Angabe des Weges) kann also nur in solchen Fällen die Rede sein, wo jenes Linienintegral einen vom Weg unabhängigen Sinn hat, wo also die Feldstärke wirbelfrei verteilt ist oder wie man sagt ein Potential hat (elektromotorische Kraft = Potentialdifferenz).

G. S. Ohm[19]) ging in seinen theoretischen Überlegungen von der Analogie der elektrischen Strömung mit der Wärmeleitung aus. Der strömenden Wärme entspricht hierbei die strömende Elektrizität, der Temperaturdifferenz die elektromotorische Kraft[20]).

So wie nach dem *Fourier*'schen Ansatz der Wärmeleitung die eine Fläche durchströmende Wärme dem Temperaturgefälle proportional ist und wie letzteres bei stationärem Zustande längs eines linearen homogenen Wärmeleiters konstant wird, so wird auch die den Querschnitt eines homogenen Drahtes in der Zeiteinheit durchströmende Elektrizität (die Stromstärke) dem Spannungsgefälle (Potentialgefälle) proportional und bei stationärer Strömung, wo das Spannungsgefälle durch den ganzen Leiter konstant ist, auch der Spannungsdifferenz an den Enden des Drahtes oder der elektromotorischen Kraft proportional. Der Proportionalitätsfaktor hat die bekannte Bedeutung des reziproken *Widerstandes* und hängt nur von den Abmessungen und der Materialbeschaffenheit des Leiters ab.

---

19) Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet, Berlin 1827.

20) *Ohm* selbst spricht nicht von elektromotorischer, sondern von elektroskopischer Kraft und definiert sie nicht ganz klar als Dichtigkeit der Elektrizität. *Gauß* sucht sich den Begriff in einer nicht für den Druck bestimmten Aufzeichnung dadurch näher zu führen, dass er von „Etwas einer Höhe Analogem" spricht, welches längs des Stromes gleichmäßig abfällt. Vgl. Ges. Werke 5, p. 602.

Die experimentelle Bestätigung seines Gesetzes gelang *Ohm* durch Beobachtungen an Thermoketten, während die Hydroketten zu jener Zeit zu inkonstant waren, um einer genaueren quantitativen Forschung dienlich sein zu können.

Durch Verknüpfung des *Ohm*'schen Gesetzes mit der *Lenz*'schen Regel und den *Faraday*'schen Entdeckungen kam nun *F. E. Neumann*[21]) zu einem einfachen mathematischen Ausdruck, der das Gesamtgebiet der Induktion umfaßt.

Neumann baute seine Theorie auf die folgenden Grundsätze[22]) auf, die als Zusammenfassung der Beobachtungsergebnisse anzusehen sind:

1. Induzierte Ströme entstehen allemal da, wo die „virtuelle Wirkung“ des induzierenden Stromes auf den Leiter eine Änderung erfährt, d. h. diejenige elektrodynamische Wirkung, die der induzierende Strom auf den Leiter ausüben würde, wenn der letztere von einem konstanten Strom, z. B. dem Strom 1, durchflossen gedacht wird.

2. Die induzierte elektromotorische Kraft ist unabhängig von der Substanz der Leiter.

3. Unter sonst gleichen Umständen ist die induzierte elektromotorische Kraft der Geschwindigkeit proportional, mit welcher die Stromelemente gegeneinander bewegt werden.

4. Die nach der Richtung der Bewegung genommene Komponente der elektrodynamischen Wirkung, welche der induzierende Strom auf ein Element des bewegten induzierten Leiters ausübt, ist immer negativ (*Lenz*'sche Regel).

5. Unter sonst gleichen Umständen ist die induzierte Stromstärke der induzierenden proportional.

Der Gedankengang der ersten *Neumann*'schen Abhandlung ist folgender. Es sei $\mathfrak{J}$ die elektrodynamische Wirkung des induzierenden Stromes auf die Längeneinheit des zu induzierenden Leiters, wenn dieser in einem willkürlich gewählten aber festen Sinne von der Stromeinheit durchflossen wird, i die Stärke des induzierten Stromes. Dann beträgt die elektrodynamische Wirkung auf das Stromelement $i\,ds$:

$$i\,ds\,\mathfrak{J}$$

und die Komponente dieser Wirkung in der Bewegungsrichtung

$$i\,ds\,\mathfrak{J}_v,$$

21) Die mathematischen Gesetze der induzierten elektrischen Ströme, Berlin. Abhdlg. 1845. Über ein allgemeines Prinzip der mathematischen Theorie induzierter elektrischer Ströme, Berlin. Abhdlg. 1848. *Ostwald*'s Klassiker Nr. 10 und 36.

22) Vgl. Vorlesungen über elektrische Ströme, p. 267.

wenn $\mathfrak{F}_v$ die Komponente von $\mathfrak{F}$ in der Richtung der dem Element ds erteilten Geschwindigkeit v ($\mathfrak{F}_v = \mathfrak{F} \cos(\mathfrak{F}, v)$) bedeutet.

Es werde zunächst angenommen, daß die Bewegung in einer bloßen Parallelverschiebung des zu induzierenden Leiters bestehe, sodaß allen seinen Elementen dasselbe v zukommt. Nach 3. schliesst man mit Hinzuziehung des *Ohm*'schen Gesetzes, daß ebenso wie die elektromotorische Kraft auch die induzierte Stromstärke i der Geschwindigkeit v proportional ist. Es sei etwa

$$i = jv.$$

Die Komponente der elektrodynamischen Wirkung in der Bewegungsrichtung kann daher auch geschrieben werden

$$jv\mathfrak{F}_v ds,$$

woraus sich für die Gesamtwirkung ergibt:

$$jv\int \mathfrak{F}_v ds$$

(das Integral erstreckt über den induzierten Leiter). Dieser Ausdruck muss nach 4. das umgekehrte Vorzeichen wie v haben; man genügt dieser Bedingung am einfachsten, indem man

$$j = -K\int \mathfrak{F}_v ds$$

setzt, wo K eine positive Größe ist. Der induzierte Strom wird daher

$$i = -Kv\int \mathfrak{F}_v ds$$

und die elektromotorische Kraft E im induzierten Leiter, wenn ω seinen Widerstand bedeutet, nach dem *Ohm*'schen Gesetz:

$$E = i\omega = -\omega K v \int \mathfrak{F}_v ds.$$

Es ist aber diese elektromotorische Kraft nach 2. von der Substanz des Leiters unabhängig. Deshalb muß ωK eine universelle, nur von den gewählten Maßeinheiten des Stromes, der Länge etc. abhängige Konstante sein, die *Neumann* als „Induktionskonstante ε“ bezeichnet. Die gesamte elektromotorische Kraft ist daher

$$E = -\varepsilon v\int \mathfrak{F}_v ds.$$

Bedeutet ferner $\mathfrak{E}$ die elektromotorische Kraft pro Längeneinheit des Leiters oder die Komponente der elektrischen Feldstärke nach der Richtung von s, so hat man

$$E = \int \mathfrak{E} ds = -\varepsilon v \int \mathfrak{F}_v ds.$$

Man genügt dieser Gleichung unter der Annahme einer allen Leiterelementen gemeinsamen Geschwindigkeit v am einfachsten, indem man

die elektromotorische Kraft auf die Elemente des Leiters verteilt und dementsprechend schließt:

$$(20) \qquad \mathfrak{E} = -\varepsilon v \mathfrak{F}_v.$$

Dies ist die Grundgleichung der *Neumann*'schen Theorie, von der die weitere Untersuchung ausgeht. Während bei ihrer Ableitung der besondere Fall der Parallelverschiebung vorausgesetzt ist, läßt sie sich nachträglich auf eine beliebige aus Parallelverschiebung und Drehung zusammengesetzte Bewegung des Leiters sowie auf den Fall, wo die einzelnen Teile des Leiters gegeneinander relative Bewegungen ausführen (Vorhandensein von Gleitstellen), übertragen.

Noch mögen die *Neumann*'schen Bezeichnungen *Differentialstrom* und *Integralstrom* erwähnt werden. Der Differentialstrom bedeutet die in der Zeit dt durch einen Querschnitt des induzierten Leiters fließende Elektrizitätsmenge idt, der Integralstrom die während der Gesamtbewegung hindurchfließende Elektrizitätsmenge $\int idt$.

Von besonderer Bedeutung für die Theorie der Induktion und für die Elektrizitätslehre überhaupt war sodann der von *Neumann* geführte Nachweis, daß die elektrodynamische Wirkung zweier *geschlossener* Ströme aufeinander ein *Potential* besitzt. Dieses *Neumannsche Potential der beiden Stromkreise i und i' aufeinander* lautet:

$$(21) \quad V_{ii'} = -\frac{ii'}{2}\iint\limits_{(s)\,(s')}\frac{dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz'}{r} = -\frac{ii'}{2}\iint\limits_{(s)\,(s')}\frac{ds\,ds' \cos(ds, ds')}{r}.$$

In allgemeinster Weise wird man auf das *Neumann*'sche Potential geführt[23]), wenn man die Arbeit der elektrodynamischen Kräfte $\mathfrak{F}$ bei einer virtuellen Bewegung des Leiters s' berechnet, bei welcher dem einzelnen Elemente ds' die beliebige Verrückung $(\delta x', \delta y', \delta z')$ erteilt wird und die genannten Verrückungskomponenten als Funktionen von s' anzusehen sind. (Mit dx', dy', dz' bezeichnen wir zum Unterschiede die Projektionen des Elementes ds' auf die Koordinatenaxen.) Die Arbeit ist alsdann gegeben durch

$$\sum \{ \mathfrak{F}_x \delta x' + \mathfrak{F}_y \delta y' + \mathfrak{F}_z \delta z' \},$$

wo sich die Summation auf den Leiter s' erstreckt. Wir schreiben dafür, indem wir durch die Gleichungen (8) die *Ampère*'sche Direktrix einführen und für die letztere die Darstellung (7') benutzen:

$$\frac{1}{2} ii' \int \{ (C dy' - B dz') \delta x' + \cdots \} = \frac{1}{2} ii' \int\int \Big\{ \Big(\frac{\partial\, 1/r}{\partial x'} dy dy' - \frac{\partial\, 1/r}{\partial y'} dx dy' - \frac{\partial\, 1/r}{\partial z'} dx dz' + \frac{\partial\, 1/r}{\partial y'} dz dz' \Big) \delta x' + \cdots \Big\}.$$

23) Vgl. die zweite der in der vorigen Anm. cit. Abhdlgn., Anhang, wo

Hierbei wurde davon Gebrauch gemacht, daß $\frac{\partial 1/r}{\partial x} = -\frac{\partial 1/r}{\partial x'}$ ist. Fügen wir noch geeignete Zusatzglieder mit positivem und negativem Vorzeichen hinzu, so erhalten wir

$$(22)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}ii'\iint\left(\frac{\partial 1/r}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial 1/r}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial 1/r}{\partial z'}\delta z'\right)(dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz') \\ \qquad - \frac{1}{2}ii'\iint\frac{\partial 1/r}{\partial s'}ds'(dx\,\delta x' + dy\,\delta y' + dz\,\delta z'). \end{cases}$$

In dem letzten Ausdruck der Arbeitsgröße kann man die erste Zeile gleichsetzen:

$$\frac{1}{2}ii'\iint\delta\left(\frac{1}{r}\right)(dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz');$$

die zweite Zeile lässt sich durch partielle Integration umformen und gibt:

$$\frac{1}{2}ii'\iint\frac{1}{r}(dx\,d\delta x' + \cdots) = \frac{1}{2}ii'\iint\frac{1}{r}\delta(dx\,dx' + \cdots).$$

Mithin wird die Gesamtarbeit:

$$(23)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}ii'\iint\left\{\delta\left(\frac{1}{r}\right)(dx\,dx' + \cdots) + \frac{1}{r}\delta(dx\,dx' + \cdots)\right\} \\ \qquad = \frac{1}{2}ii'\delta\iint\frac{dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz'}{r} = -\delta V_{ii'}, \end{cases}$$

wenn bei der Variation von V die Stromstärken i und i' festgehalten werden.

V bedeutet hiernach die gesamte mechanische Arbeit, welche gegen die auf die Stromleiter wirkenden elektrodynamischen Kräfte zu leisten ist, wenn diese Leiter auf einem durchaus beliebigen Wege mit durchaus beliebiger Geschwindigkeit aus unendlicher gegenseitiger Entfernung in die betrachtete gegenseitige Endlage versetzt werden, vorausgesetzt, daß beide Leiter von den *konstanten* Strömen i und i' durchflossen gedacht werden, daß also durch geeignete Vorkehrungen das Auftreten von induzierten Strömen vermieden wird. Eine unmittelbare Folge hiervon ist, daß sich die Resultierende der elektrodynamischen Kräfte sowie das resultierende Drehmoment für jeden der beiden Leiter durch die *negativen Ableitungen*[24]) des *Neumann*'schen Potentials nach den die Lage des Leiters definierenden Koordinaten darstellen läßt.

---

etwas spezieller die Komponenten der auf den Leiter wirkenden Einzelkraft und Drehkraft durch die Ableitungen des Potentials nach den die Lage des Leiters bestimmenden Koordinaten dargestellt werden.

24) Wir sind bei der Definition des Potentials der zweiten der in Anm. 21 genannten Abhandlungen gefolgt; in der ersten wird das Potential mit dem umgekehrten Vorzeichen gerechnet und werden daher die Kräfte durch die *positiven* Differentialquotienten von V dargestellt.

Der *Neumann*'sche Potentialausdruck und seine mechanische Bedeutung läßt sich ohne weiteres auch auf nicht-lineare, räumlich ausgedehnte Leiter erweitern, wenn man diese in einzelne Stromfäden zerlegt denkt und bei der Berechnung des Potentials die Verteilung der Stromfäden im Innern der Leiter und ihre Stromstärken als unveränderlich und an der bewegten Materie haftend voraussetzt. Wegen des Zusammenhanges des *Neumann*'schen Potentials mit der magnetischen Feldstärke und der magnetischen Feldenergie vgl. *E. Wiechert*[25]).

Indem nun *Neumann* weiter zeigte, dass seine Induktionsgesetze sich ebenfalls mit Hilfe seines Potentials in einfacher Weise darstellen lassen, knüpfte er das Auftreten der induzierten Ströme an die Leistung eines gewissen Quantums mechanischer Arbeit an und lieferte damit, wie später *Helmholtz*[26]) ausgeführt hat, einen wichtigen Beitrag zu der Lehre von der Energieverwandlung, welche umgekehrt die sicherste Stütze der Induktionsgesetze bildet. Zunächst soll hierbei wieder nur die Induktion durch Bewegung betrachtet werden; der induzierende Strom i' wird daher als konstant angesehen und es wird vorausgesetzt, daß in dem induzierten Leiter außer der durch Induktion erregten keine andere elektromotorische Kraft vorhanden ist.

Der sog. Differentialstrom ist nach dem *Ohm*'schen Gesetz und der *Neumann*'schen Gleichung (20) bei einer beliebigen Bewegung des induzierten Leiters, bei welcher die verschiedenen Leiterelemente ev. verschiedene Wege δw zurücklegen und verschiedene Geschwindigkeiten $v = \delta w / \delta t$ besitzen:

$$i \delta t = \frac{\delta t}{\omega} \int \mathfrak{E} ds = -\frac{\varepsilon}{\omega} \delta t \int v \mathfrak{F}_v ds = -\frac{\varepsilon}{\omega} \int \delta w \mathfrak{F}_v ds,$$

wo ω wie früher den Widerstand des induzierten Leiters bedeutet. Da in Gleichung (20) $\mathfrak{F}_v$ die elektrodynamische Wirkung des induzierenden Systems auf die Längeneinheit des von der Stromeinheit durchflossenen induzierten Leiters war, so bedeutet $\mathfrak{F}_v ds$ die Komponente dieser Wirkung auf das Stromelement ds in der Richtung des Weges δw und daher $\delta w \mathfrak{F}_v ds$ die am Elemente ds geleistete elektrodynamische Arbeit. Das über den induzierten Leiter erstreckte Integral dieser Arbeitsgröße wird daher gleich der negativen Änderung des *Neumann*'schen Potentials bei der fraglichen Bewegung, berechnet

---

25) Festschrift, Art. 25 und 26.

26) *Helmholtz,* Über die Erhaltung der Kraft, Berlin, Phys. Gesellschaft (1847), Abschn. VI, vervollständigt in Ann. Phys. Chem. 91 (1854), p. 241. Vgl. auch die Einwände von *C. Neumann,* Math. Ann. 6 (1873), p. 342; *A. Seydler,* Prager Sitzungsber. 1883, p. 235 (Referat hierüber von *Lorberg* in Fortschritte d. Mathem. 17 (1885), p. 1026).

für den Strom 1 im induzierten und für den Strom i' im induzierenden Leiter. Es gilt daher die folgende Darstellung des Differentialstroms:

$$i\delta t = \frac{\varepsilon}{\omega}\delta V_{1i'}.$$

Hieraus folgt für den Integralstrom:

$$\int i dt = \frac{\varepsilon}{\omega}\left\{(V_{1i'})_e - (V_{1i'})_a\right\},$$

wo die Indices a und e auf die Anfangs- und Endlage des Leiters hinweisen, und für die jeweilige Stromstärke im induzierten Leiter:

$$i = \frac{\varepsilon}{\omega}\frac{d}{dt}V_{1i'}. \tag{24}$$

Nennt man W die im induzierten Leiter geleistete Stromarbeit, d. h. das Produkt aus der elektromotorischen Kraft in die durch den Strom beförderte Elektrizitätsmenge, so ist die Stromarbeit pro Zeiteinheit

$$\frac{dW}{dt} = iE = \omega i^2$$

und man kann auf Grund der vorigen Gleichung schreiben

$$\frac{dW}{dt} = \varepsilon i \frac{d}{dt}V_{1i'}. \tag{25}$$

Die Stromarbeit dW erweist sich hiernach zunächst *proportional* der bei der Bewegung zur Überwindung der elektrodynamischen Kräfte aufgewandten mechanischen Arbeit. Daraus, daß sie ihr nach dem Energiegesetz *gleich* sein muß[26]), folgt der Wert der universellen Induktionskonstanten ε. *ε muß bei den gewählten Maßeinheiten gleich 1 sein.* Gleichung (25) zeigt dann, daß die mechanische Arbeit bei der Bewegung des Leiters ihr genaues Äquivalent in der Stromarbeit (der durch den induzierten Strom erzeugten Wärme) findet.

Die gleichen Gesetze und ihr Zusammenhang mit dem gleichen Potentialausdruck übertragen sich schließlich von dem bisher vorausgesetzten Falle der Induktion (Induktion durch gegenseitige Bewegung der Leiter) auf die Magnetoinduktion und diejenigen Induktionserscheinungen, wo nicht die Lage, sondern die Stärke des induzierenden Stromes eine Änderung erfährt. Im letzteren Falle entspricht der „Strom Null im induzierenden Leiter“ demjenigen Zustande, von dem aus bei der Bestimmung des Potentiales die Arbeit zu zählen ist, also demjenigen Zustande, der früher als „Entfernung unendlich“ bezeichnet wurde.

Ausführlicher möge noch der Fall der Magnetoinduktion dargestellt werden, wegen der besonders einfachen Formulierung, die

Neumann für diesen Fall gefunden hat, und deswegen, weil sie den Übergang zu den Vorstellungen *Faraday's* vermittelt.

Wir betrachten zunächst, von der *Neumann*'schen Darstellung[27]) abweichend, zwei unendlich kleine, geschlossene, ebene Strombahnen (s) und (s'), welche beide von dem Strom $+1$ in demjenigen Sinne umflossen sein mögen, in welchem die Variabeln s und s' gemessen werden. Die Flächeninhalte derselben seien f und f'. Nach der *Ampère*'schen Theorie des Magnetismus kann eine unendlich kleine Strombahn f ersetzt werden durch ein unendlich kurzes Solenoid, dessen Achse senkrecht zur Strombahn nach der der Stromrichtung entsprechenden Seite gerichtet ist und die Länge dn haben möge, oder durch einen Elementarmagneten, dessen Nord und Südpol um dn voneinander abstehen. Um die diesen Polen zuzuschreibende Stärke zu bestimmen, haben wir für unseren Fall in Gleichung (13) $i = 1$ zu setzen und zu beachten, daß dort $1/a$ die auf die Längeneinheit der Solenoidaxe entfallende Anzahl der Strombahnen f bedeutete. Da in unserem Falle auf die Länge dn nur die eine Strombahn f kommt, so ist $a = dn$ zu nehmen. Die Polstärken der den Strombahnen f und f' zugeordneten Elementarmagnete betragen daher

$$\mathfrak{m} = \frac{f}{\sqrt{2}\,dn}, \quad \mathfrak{m}' = \frac{f'}{\sqrt{2}\,dn'}.$$

Nun ist das Potential der nach *Coulomb* berechneten Wirkung eines Poles unseres ersten Elementarmagneten auf einen Einheitspol am Orte von f' gleich

$$\frac{\mathfrak{m}}{r} = \frac{f}{\sqrt{2}\,dn}\,\frac{1}{r},$$

und dementsprechend das ebenso berechnete Potential der beiden Pole unseres ersten Elementarmagneten

$$\frac{f}{\sqrt{2}}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}.$$

Da wir aber in f' nicht einen Einheitspol, sondern die beiden Pole unseres zweiten Elementarmagneten von der Stärke $\pm\,\mathfrak{m}'$ haben, ergibt sich als Potential der Wirkung unseres ersten auf unseren zweiten Elementarmagneten und zugleich als *Neumann*'sches Potential unserer unendlich kleinen, von Einheitsströmen durchflossenen Strombahnen:

$$V_{1,1'} = \frac{ff'}{2}\,\frac{\partial^2 1/r}{\partial n\,\partial n'}, \tag{26}$$

ein Ausdruck, der auch durch Umrechnung aus dem *Neumann*'schen Potentialgesetz hätte gefunden werden können.

27) Vgl. § 12 der in Anm. 21 zuerst genannten Abhdlg.

Um die geometrische Bedeutung des Ausdruckes (26) anzugeben, betrachten wir die Größe

$$K = -f\frac{\partial 1/r}{\partial n} = \frac{f}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{f\cos(r,n)}{r^2}. \tag{27}$$

Hier bedeutet $f\cos(r,n)$ die Projektion der Fläche f auf eine zu r senkrechte Ebene und daher K die von f' aus gesehene *scheinbare Größe von* f oder die Öffnung desjenigen Kegels, welcher von f' aus die Fläche f projiziert. K wird dabei positiv oder negativ gerechnet, je nachdem man die Fläche von der einen oder anderen Seite her betrachtet.

Das Neumann'sche Potential zweier unendlich kleinen von Einheitsströmen umflossenen Strombahnen (s) *und* (s') *drückt sich daher durch die scheinbare Grösse* K *bezw.* K' *dieser Bahnen folgendermaßen aus:*

$$V_{1,1'} = -\frac{f'}{2}\frac{\partial K}{\partial n'} = -\frac{f}{2}\frac{\partial K'}{\partial n}.$$

Wir ersetzen jetzt einerseits die unendlich kleine Strombahn s durch ein System solcher Strombahnen, die wir auf einem beliebigen berandeten Flächenstück gleichsinnig nebeneinander reihen. Ein solches System von unendlich kleinen Strombahnen ist, wie schon *Ampère* erkannt hat (vgl. p. 20) äquivalent einem die Berandung des Flächenstücks umkreisenden Strom. Andererseits ergänzen wir die Strombahn s' durch Hintereinanderreihung unendlich vieler gleich großer im Abstand a' einander folgender Bahnen zu einem aus dem Unendlichen bis zur Stelle von (s') reichenden Solenoid. Endlich gehen wir noch von den Strömen 1, 1 zu den Strömen i, i' über. Wir erhalten dadurch das *Neumann*'sche Potential eines Solenoidpoles auf einen endlichen Strom in der Form:

$$V_{i,i'} = -ii'\frac{f'}{2}\sum\frac{\partial K}{\partial n'}.$$

Hierin bedeutet K nunmehr die Summe der zu dem System der Strombahnen s gehörigen unendlich kleinen Kegelöffnungen, d. h. die gesamte scheinbare Größe des endlichen Stroms. Das $\sum$-Zeichen bezieht sich auf das System der Strombahnen s' und läßt sich durch eine Integration nach der Axe des Solenoides, welche mit der jeweiligen Richtung von n' zusammenfällt, ersetzen.

Auf das Achsenelement dn' kommen $\frac{dn'}{a'}$ Strombahnen. Man hat daher

$$\sum\frac{\partial K}{\partial n'} = \frac{1}{a'}\int\frac{\partial K}{\partial n'}dn' = \frac{1}{a'}(K_P - K_\infty) = \frac{1}{a'}K_P,$$

wo K_P die vom Pole des Solenoids gesehene Kegelöffnung ist. Mithin wird

$$V_{i,i'} = -\frac{1}{2}\frac{ii'f'}{a'}K_P.$$

Hier führen wir abermals die Polstärke $\mathfrak{m}' = f'i'/\sqrt{2}\,a'$ nach Gleichung (13) ein und erhalten schließlich als wechselseitiges Potential des Stromes i und des Magnetpoles $\mathfrak{m}'$:

$$(28) \qquad V_{i,\mathfrak{m}} = -\frac{i\mathfrak{m}'}{\sqrt{2}}K_P.$$

Sämtliche Erscheinungen der Magnetoinduktion, sowie sämtliche ponderomotorische Wirkungen zwischen Strom und Magnetpol folgen nun aus den Änderungen des Potentials $V_{1\mathfrak{m}}$ bez. $V_{i\mathfrak{m}}$ bei einer Lagenänderung des Stromes gegen den Pol oder des Poles gegen den Strom, hängen also im Grunde nur von der Änderung der scheinbaren Größe K des Stromes ab.

Um zu der *Faraday*'schen Auffassung der Gesetze der Magnetoinduktion überzugehen, denken wir uns von dem Magnetpole eine der Stärke desselben proportionale hinreichend grosse Anzahl $4\pi\mathfrak{m}'N$ von *Kraftlinien* gleichmäßig nach allen Seiten ausstrahlen, d. h. von Linien, welche überall die Richtung der magnetischen Feldstärke haben und welche im besonderen geradlinig verlaufen, wenn der Pol als isoliert vorhanden gedacht wird. (Wegen der allgemeinen Definition und Verwendung von Kraft- und Erregungslinien vgl. den folgenden Art. Nr. **30**.) Die Anzahl derjenigen Linien, welche die Strombahn (s) durchsetzen, beträgt alsdann $\mathfrak{m}'NK_P$; das *Neumann*'sche Potential des Poles $\mathfrak{m}$ auf den Strom 1 ist daher dieser Kraftlinienzahl proportional. *In demselben Sinne ist die im Stromkreise induzierte elektromotorische Kraft proportional der (positiven oder negativen) Änderung, die diese Kraftlinienzahl bei einer Bewegung von Strom oder Pol erfährt.*

Handelt es sich nicht um einen einzelnen Pol, sondern um eine beliebige Verteilung von magnetischen Mengen, so tritt in der obigen Formel $\sum \mathfrak{m}K$ an die Stelle von $\mathfrak{m}'K$; die magnetischen Kraftlinien sind alsdann nicht mehr geradlinig, sondern gekrümmt, da sie überall der Richtung der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$ folgen; ihre Dichte ist gleich $|\mathfrak{H}|N$ zu wählen, d. h. so zu bestimmen, daß eine zur Richtung der Feldstärke senkrechte Fläche $d\sigma$ von $|\mathfrak{H}|Nd\sigma$ Kraftlinien getroffen wird. Der Satz über die Änderung der die Strombahn durchsetzenden Kraftlinienzahl aber bleibt bestehen.

Auch für die Induktion zweier Ströme aufeinander läßt sich der *Faraday*'sche Kraftlinienbegriff verwerten, wenn man dem induzierenden Strom durch den Vektor der *Ampère*'schen Direktrix sein magne-

tisches Feld zuordnet und in diesem das System der Kraftlinien konstruiert.

Hervorzuheben ist noch, daß *Neumann* die Gültigkeit seiner Theorie ausdrücklich auf langsam veränderliche Felder und auf langsame Bewegungen beschränkt. *Neumann* schließt also „z. B. die durch elektrische Entladungen induzierten Ströme“ von der Betrachtung aus. Das Wort „langsame Bewegung“ versteht *Neumann* in dem Sinne, daß nur Geschwindigkeiten vorkommen, die „klein sind gegen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Elektrizität“ (gegen die Lichtgeschwindigkeit, wie man heutzutage sagen würde).

6. Wilhelm Weber. Unter den zahlreichen Leistungen von *W. Weber* auf dem Gebiete der Elektrizitätslehre ist die Aufstellung des nach ihm benannten Grundgesetzes vielleicht nicht die größeste. Wir erwähnen von seinen anderen Arbeiten die genaue experimentelle Prüfung des *Ampère*'schen Gesetzes mit Hülfe des Dynamometers[28]) und, als besonders bedeutsam und fruchtbar, die Einführung eines allgemeinen und konsequenten, auf den Ideen von *Gauß* (vgl. p. 6) fußenden *elektromagnetischen Maßsystems.*

Durch die Arbeiten von *Gauß* war ein absolutes Maß für die Menge des Magnetismus und für das magnetische Moment eines Stabmagneten sowie für die magnetische Feldstärke eingeführt. Es handelte sich nun darum, die Messung der elektrischen Größen, insbesondere die des elektrischen Stromes an jene magnetischen Maße anzugliedern.

Die Möglichkeit hierzu bot die Wechselwirkung von Strom und Magnetpol nach dem *Biot-Savart*'schen Gesetz oder die Magnetoinduktion. Am bequemsten ist es dabei, an das *Neumann*'sche Potential, welches jene beiden Wirkungen, die ponderomotorischen und die elektromotorischen, zusammenfaßt, anzuknüpfen.

Das *Neumann*'sche Potential V eines ebenen geschlossenen Stromes auf einen Magnetpol von der Gaußisch gemessenen Stärke 1 ist proportional der (z. B. elektrodynamisch gemessenen) Stromstärke i und der scheinbaren Größe der vom Strom umflossenen Fläche f. Man bezeichne irgend einen Punkt im Innern von f als „Mittelpunkt“ und nenne r den Abstand dieses Punktes vom Einheitspol. Befindet sich der letztere in hinreichend großer Entfernung, aber sonst in beliebiger Lage gegen den Strom, so kann man das Potential nach den Gleichungen (27) und (28), unter n die Normale zur Ebene des

28) Elektr. Maßbest. 2, insbes. Widerstandsmessungen.

Stromleiters, unter k einen von der Wahl der Einheiten abhängigen Proportionalitätsfaktor verstanden, gleichsetzen:

$$V = -\frac{k i f \cos(n, r)}{r^2}. \tag{29}$$

Man denke sich andererseits durch den „Mittelpunkt" senkrecht zur Ebene des Stromleiters einen Stabmagneten hindurchgesteckt; sein Moment M kann berechnet werden aus der im Nord- und im Südpol konzentriert gedachten magnetischen Menge $\pm \mathfrak{m}$ und dem Abstand l dieser beiden Pole: $M = \mathfrak{m} l$. Das Potential für die *Coulomb*'sche Kraftwirkung der beiden Pole auf unseren Einheitspol ist im *Gauß*schen Maß:

$$V = -\frac{\mathfrak{m} l}{r^2} \cos(n, r) = -\frac{M \cos(n, r)}{r^2}. \tag{30}$$

Der Vergleich dieses Ausdrucks mit dem Ausdrucke (29) zeigt, *Ein ebener Strom von der Stärke i und der umflossenen Fläche f wirkt auf einen Magnetpol in hinreichender Ferne wie ein Stabmagnet vom Momente*

$$M = k i f, \tag{31}$$

der am Orte des Stromkreises senkrecht zur Ebene desselben angebracht ist.

Auf diesen Satz gründet sich das *elektromagnetische* oder *Weber*sche *Maß der Stromstärke*: *Weber* setzt in (31) $k = 1$, bestimmt also den zahlenmäßigen Wert der Stromstärke, welcher (zum Unterschied mit dem elektrodynamisch gemessenen Werte) J heißen möge, aus dem Momente des äquivalenten Stabmagneten durch die Beziehung $J = M/f$. Mit $k = 1$ wird der Wert V des *Neumann*'schen Potentiales nach Gleichung (29)

$$V = -J f \frac{\cos(n, r)}{r^2};$$

andererseits ergibt die frühere Darstellung (28) desselben Potentials mit $\mathfrak{m}' = 1$ bei hinreichendem Abstand von Strom und Einheitspol

$$V = -\frac{i f}{\sqrt{2}} \frac{\cos(n, r)}{r^2}.$$

Es wird daher, wenn man denselben Strom einmal elektrodynamisch das andere Mal elektromagnetisch mißt:

$$J = \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

Die elektromagnetische Maßzahl der Stromstärke ist also $\sqrt{2}$*-mal kleiner wie die elektrodynamische. Umgekehrt ist die elektromagnetische Einheit der Stromstärke* $\sqrt{2}$*-mal größer als die elektrodynamische Einheit.*

Gleichzeitig mit der Stromstärke ist auch die Elektrizitätsmenge elektromagnetisch bestimmt; die Einheit derselben ist diejenige Elek-

trizitätsmenge, die der Strom 1 in der Einheit der Zeit durch den Querschnitt befördert. Hieraus ergibt sich ferner auch die Feldstärke in elektromagnetischem Maß; ein Feld besitzt die Stärke 1, wenn es in dem betrachteten Punkte auf die elektromagnetische Elektrizitätseinheit die Kraft 1 Dyne ausübt, u. s. w.

Andererseits liefern die oben erörterten Beziehungen die Handhabe dazu, auch das an das *Coulomb*'sche elektrische Gesetz anknüpfende *elektrostatische Maßsystem* einheitlich durchzuführen. Indem man die Stromstärke elektrostatisch mißt als die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt beförderte elektrostatisch gemessene Elektrizitätsmenge und indem man wieder in (31) $k=1$ setzt, kann man zunächst die elektrostatische Einheit des magnetischen Momentes festsetzen als Moment desjenigen Stabmagneten, welcher dem die Fläche 1 umkreisenden Strome 1 in seiner Wirkung auf einen hinreichend entfernten Pol äquivalent ist. Hieraus folgt weiter die elektrostatische Einheit des Magnetismus und der magnetischen Feldstärke.

Dass dieses elektrostatische System weniger gebräuchlich ist, wie das elektromagnetische System, liegt namentlich daran, daß die *internationalen praktischen Einheiten* an das letztere System anknüpfen und sich nur durch Potenzen von 10 von den Einheiten desselben unterscheiden. Z. B. ist bekanntlich

1 Amp = 0,1 elektromagn. Stromeinheiten.

Durch Einführung des elektromagnetischen Strommaßes wird der formale Ausdruck der früher genannten Gesetze vereinfacht, indem darin ein Faktor $1/2$ bezw. $1/\sqrt{2}$ in Fortfall kommt. Z. B. wird in diesem Maßsystem *der Neumann'sche Potentialausdruck:*

$$V = -JJ'\int\int\frac{ds\,ds'\cos(ds,ds')}{r}, \tag{32}$$

der Ausdruck des Biot-Savart'schen Gesetzes nach p. 17

$$\mathfrak{F} = \frac{\mathfrak{m}J\,ds\sin(r,ds)}{r^2}, \tag{33}$$

der Umkehrung des Biot-Savart'schen Gesetzes nach p. 18

$$\mathfrak{F} = J[ds\cdot\mathfrak{H}], \quad \mathfrak{H} = \frac{m}{r^2}, \tag{34}$$

des Graßmann'schen Gesetzes nach p. 23 und 19

$$\mathfrak{F} = J[ds\cdot\mathfrak{H}], \quad \mathfrak{H} = \frac{J'[\mathfrak{r}\cdot ds']}{r^3}, \tag{35}$$

endlich *des Ampère'schen Gesetzes*

$$\mathfrak{F} = -\frac{JJ'\,ds\,ds'}{r^2}\left(2\cos(ds,ds') - 3\cos(r,ds)\cos(r,ds')\right). \tag{36}$$

Wir kommen nun zur Darstellung des *Weber'schen Grundgesetzes.* Dasselbe beabsichtigt namentlich, das *Coulomb*'sche Gesetz für ruhende Elektrizitäten mit den *Ampère-Neumann*'schen Gesetzen für strömende Elektrizität in Zusammenhang zu bringen. Nach dem Vorbilde von *Newton* und *Coulomb* wünschte *Weber* ein *Punktgesetz* aufzustellen, also die elektrostatischen, elektrodynamischen und elektrokinetischen Wirkungen aus dem Ort und der Bewegung der elektrischen Elementarquanten abzuleiten. Da elektrische Massenpunkte, die ihre gegenseitige Lage nicht ändern, keine andere als die *Coulomb*'sche Wirkung aufeinander ausüben, war in erster Linie die relative Geschwindigkeit der elektrischen Mengen in Rechnung zu setzen.

Weber benutzt bei der Ableitung[29]) und nachträglichen Bestätigung seines Grundgesetzes drei spezielle Tatsachen, welche allerdings, da sie sich auf Stromelemente beziehen, nicht mit Sicherheit aus der direkten Erfahrung erschlossen werden können:

1) Daß zwei Stromelemente, welche in gerader Linie liegen, mit welcher ihre Richtung zusammenfällt, sich abstoßen oder anziehen, je nachdem sie von der Elektrizität in gleichem oder entgegengesetztem Sinne durchflossen werden.

2) Daß zwei parallele Stromelemente, welche mit ihrer Verbindungslinie rechte Winkel bilden, einander anziehen oder abstoßen, je nachdem sie von der Elektrizität in gleichem oder entgegengesetztem Sinne durchflossen werden.

3) Daß ein Stromelement, welches mit einem Leiterelement in gerader Linie liegt, mit welcher die Richtungen beider Elemente zusammenfallen, einen gleich oder entgegengesetzt gerichteten Strom induziert, je nachdem seine eigene Stromintensität abnimmt oder zunimmt.

Von grundlegender Bedeutung ist ferner der Umstand, daß *Weber* sich der *dualistischen* Auffassung in der Elektrizitätslehre anschließt, nach der sich, im Gegensatz zu der *unitarischen* Auffassung, die positive und negative Elektrizität im elektrischen Strom mit entgegengesetzt gleicher Geschwindigkeit bewegt.

Schwierig bleibt hierbei die Vorstellung, die man sich über die Verkettung von elektrischen und ponderabeln Massen zu bilden hat, worüber die Theorie eigentlich eine bestimmte Vorschrift geben sollte. Die auftretenden Kräfte sind in der *Weber*'schen Theorie rein elektrischer Natur und greifen in den elektrischen Teilchen an; die letz-

29) Elektr. Maßbest. 1, insbes. über ein allgem. Grundgesetz der elektr. Wirkungen (1846) = Ges. Werke 3, p. 25.

teren sind in den Leitern frei beweglich; trotzdem übertragen sich die Kräfte unter Umständen auf diese. In Fällen wie die unter 1) und 2) genannten hat man sich wohl die Elektrizitäten im Stromelement zwangläufig zu denken; die in ihnen angreifenden Kräfte gehen dann auf die ponderabeln Träger der Elektrizitäten über und wirken ponderomotorisch. Bei Fragen wie die unter 3) hat man sich dagegen den induzierten Stromleiter als festgehalten oder zwangläufig geführt zu denken; die an den Elektrizitätsteilchen angreifenden Kräfte wirken dann auf diese selbst, also elektromotorisch.

Sind $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}'$ die elektrischen Mengen, r die Entfernung derselben, t die Zeit, so führt die erste Tatsache mit Rücksicht auf die *Coulomb*sche Kraftwirkung zunächst zu dem folgenden Ansatz für die zwischen ihnen wirkende Kraft:

$$\frac{\mathfrak{e}\mathfrak{e}'}{r^2}\left(1 - a^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right).$$

Derselbe genügt aber nicht, um von der unter 2) genannten Tatsache Rechenschaft zu geben, da er sich bei paralleler und senkrecht gegen die Verbindungslinie gerichteter Bewegung der Elektrizitätsmengen (wegen $dr/dt = 0$) auf die *Coulomb*'sche Wirkung reduzieren würde. Es muß daher noch ein Glied mit d^2r/dt^2 hinzutreten und der vorstehende Ansatz folgendermaßen ergänzt werden:

$$\frac{\mathfrak{e}\mathfrak{e}'}{r^2}\left(1 - a^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + b\,\frac{d^2r}{dt^2}\right).$$

Damit diese Form des Gesetzes gleiche Resultate mit dem *Ampère*schen Gesetz ergebe, ist notwendig und hinreichend, daß $b = 2ra^2$, sodaß die *definitive Form des Weber'schen Gesetzes* lautet:

$$\frac{\mathfrak{e}\mathfrak{e}'}{r^2}\left(1 - a^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + 2a^2r\,\frac{d^2r}{dt^2}\right). \tag{37}$$

Indem hierdurch auch die dritte der oben angeführten Tatsachen und bei geeigneter Berücksichtigung von eventuellen „Gleitstellen" die Induktionserscheinungen überhaupt dargestellt werden, ergibt sich eine erste Bestätigung des Gesetzes.

Die Konstante a ist, wie aus dem *Weber*'schen Gesetz unmittelbar folgt, der *reziproke Wert einer Geschwindigkeit*[30]). In dem besonderen Falle, wo die relative Beschleunigung d^2r/dt^2 gleich Null ist, ergibt sich die Bedeutung von $1/a$ als diejenige Geschwindigkeit elektrischer Teilchen, bei der die gegenseitige Einwirkung derselben ver-

30) Die bekannte *Weber*'sche Bezeichnung dieser Geschwindigkeit ist c; wir reservieren hier den Buchstaben c für die Lichtgeschwindigkeit, welche der $\sqrt{2}^{\text{te}}$ Teil des *Weber*'schen c ist.

schwindet oder bei welcher die elektrostatische Wirkung durch die elektrodynamische gerade aufgehoben wird. Die Bedeutung dieser Geschwindigkeit für die elektrischen Maßeinheiten, daß sie nämlich *das Verhältnis der elektrostatischen und der elektromagnetischen Stromeinheit* gibt, wird von *Weber* bei der Vergleichung seines Gesetzes mit dem *Ampère*'schen auseinandergesetzt. Schreibt man nämlich z. B. in dem oben genannten Fall 1) die zwischen zwei gleich gerichteten und in der gleichen Geraden liegenden Stromelementen ausgeübte Kraft einmal nach dem *Weber*'schen, das andere Mal nach dem *Ampère*'schen Gesetze hin, so erhält man, wenn e, e' die in der Längeneinheit der Leiter in jedem Augenblick enthaltenen und mit der Geschwindigkeit v, v' sich bewegenden Mengen positiver Elektrizität bedeuten:

$$\text{nach } Weber \quad \frac{8ee'vv'}{r^2}a^2\,ds\,ds' \qquad \text{Gl. (37)},$$

$$\text{nach } Ampère \quad \frac{JJ'}{r^2}\,ds\,ds' \qquad \text{Gl. (36)}.$$

Nun sind e, e' ebenso wie $\mathfrak{e}, \mathfrak{e}'$ *elektrostatisch* gemessene Elektrizitätsmengen, v und v' die in der Zeiteinheit von ihnen zurückgelegten Wege und ev, $e'v'$ die in der Zeiteinheit den Querschnitt des Leiters durchströmenden positiven Elektrizitäten, also $2ev$, $2e'v'$ nach der dualistischen Auffassung die pro Zeiteinheit den Querschnitt passierenden gesamten Elektrizitätsmengen oder die elektrostatisch gemessenen Stromstärken, $J(\text{stat})$ bezw. $J'(\text{stat})$. Damit Übereinstimmung mit dem *Ampère*'schen Gesetze herrscht, muß sein

$$2J(\text{stat})\,J'(\text{stat})\,a^2 = J(\text{magn})\,J'(\text{magn})$$

und daher auch

$$\frac{J(\text{stat})}{J(\text{magn})} = \frac{1}{\sqrt{2}\,a}.$$

Das Verhältnis der elektrostatischen zur elektromagnetisch gemessenen Stromstärke (und ebenso der Elektrizitätsmengen) ist der Dimension nach eine Geschwindigkeit und dem Zahlenwerte nach gleich $\sqrt{\frac{1}{2}}$-mal der Geschwindigkeit $1/a$. *Weber* ist in späteren Arbeiten auf diese Verhältnisse vielfach zurückgekommen, bis er im Jahre 1855 den zahlenmäßigen Wert von $1/a$ im Verein mit *R. Kohlrausch* experimentell bestimmte[31]). Es ergab sich

$$\frac{1}{a} = 439\,450 \cdot 10^5\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}}.$$

31) Über die Elektrizitätsmenge, welche bei galvanischen Strömen durch den Querschnitt der Kette strömt, Ann. Phys. Chem. 99 (1856), p. 10 und Elektr. Maßbest. 4.

Dividiert man diesen Wert durch $\sqrt{2}$, so erhält man die Zahl

$$\frac{1}{\sqrt{2}\,a} = 3{,}11 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}},$$

also eine Zahl, die auffallend genau mit der Lichtgeschwindigkeit übereinstimmt[32]). Es war *Maxwell* vorbehalten, aus dieser Übereinstimmung fundamentale Schlüsse zu ziehen, nachdem bereits früher (vgl. die folgende Nummer) *Riemann* an eben diese Übereinstimmung theoretische Überlegungen geknüpft hatte.

Man kann das *Weber*'sche Gesetz ansehen als eine Formel, in der die Wirkung zweier elektrischen Massen aufeinander dargestellt wird durch eine Reihe, die nach den zeitlichen Differentialquotienten des die Massen verbindenden Fahrstrahls fortschreitet und in der die ersten Glieder aus der Erfahrung bestimmt sind. Da indessen bereits die ersten Glieder hinreichen, um die elektrodynamischen und elektrokinetischen Wirkungen vollständig wiederzugeben, so hat man von der möglichen Hinzufügung unbekannter höherer Glieder abgesehen; vielmehr nahm *Weber* für sein Gesetz in Anspruch, daß es in der angegebenen Form genau und für alle Fälle gültig sei. Dem gegenüber möge erwähnt werden, daß *Helmholtz*[33]) gelegentlich bemerkt hat, ein von ihm gegen das *Weber*'sche Gesetz erhobener Einwand, auf den wir unten zu sprechen kommen, werde hinfällig, wenn man dem *Weber*'schen Gesetz noch ein geeignetes Glied mit dem dritten Differentialquotienten des Fahrstrahls nach der Zeit hinzufügt.

Das *Weber*'sche Gesetz ist Gegenstand vielfacher Diskussion gewesen.

Der erste Einwand gegen das *Weber*'sche Gesetz rührte von *W. Thomson* und *P. G. Tait*[34]) her und machte geltend, daß das Gesetz von der Erhaltung der Energie dadurch verletzt werde. *Weber* begegnete diesem Einwand mit dem Nachweis, daß bei allen durch sein Gesetz beherrschten Bewegungen die Summe

$$T + U + V$$

konstant bleibt[35]) (Beweis s. p. 42 oben); hier bedeutet T die kinetische Energie der bewegten Teilchen, U das elektrostatische Potential oder das

32) Vgl. auch die Korrektion, welche *W. Voigt* an der Berechnung der *Weber*'schen Versuchsresultate anbringt, Ann. Phys. Chem. (3) 2 (1877), p. 476.

33) Ges. Abhdlg. Bd. 1, p. 554 Anm.

34) Natural Philosophy, 1. Aufl., deutsche Übersetzung, Braunschweig 1871, Nr. 385, p. 351. In die 2. Aufl. ist der Einwand nicht aufgenommen.

35) *W. Weber*, Ann. Phys. Chem. 73 (1848), p. 29 oder Jubelband (1874), p. 199. Ausführlicher in Elektr. Maßbestimmungen, 6. Abhdlg.

Potential der *Coulomb*'schen Kraft, also wenn nur zwei Teilchen in Betracht gezogen werden

$$U = \frac{\mathfrak{e}\mathfrak{e}'}{r},$$

während V die Bedeutung hat

$$V = -\frac{\mathfrak{e}\mathfrak{e}'}{r} a^2 \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \tag{38}$$

und als *Weber*'sches *elektrodynamisches Potential* bezeichnet werden möge. Die Gleichung $T + U + V = \text{const.}$ stellt mithin die *Energiegleichung* für das *Weber*'sche Gesetz dar. Dementsprechend bedeutet die *Summe*

$$U + V = \frac{\mathfrak{e}\mathfrak{e}'}{r}\left(1 - a^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right) \tag{39}$$

die gesamte *potentielle Energie zweier bewegter Elektrizitätsteilchen* $\mathfrak{e}\mathfrak{e}'$; diese Summe ist es, die *Weber* selbst als das zu seinem Gesetz gehörige Potential bezeichnet.

In anderem Sinne nennt *C. Neumann*[36]) die *Differenz*:

$$U - V = \frac{\mathfrak{e}\mathfrak{e}'}{r}\left(1 + a^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right) \tag{40}$$

das „effektive Potential" des *Weber*'schen Gesetzes. Er zeigt nämlich, daß man, ausgehend von den allgemeinen Variationsprinzipien der Mechanik, die *Weber*'sche Kraft aus diesem Ausdrucke durch *Variation* gewinnt, ähnlich wie man aus einem nur von den Lagenkoordinaten abhängigen Potential die Kraft durch *Differentiation* ableitet. Schon vor *C. Neumann* hatte 1861 *B. Riemann* in einer Göttinger Universitätsvorlesung den Gedanken entwickelt, aus einem geeignet gewählten Potential mittels der mechanischen Variationsprinzipien die elektrodynamischen Kräfte abzuleiten (vgl. die folgende Nr.).

Schwerer als der *Thomson-Tait*'sche wiegt der erste Einwurf von *Helmholtz*[37]), daß unter dem Einfluß des *Weber*'schen Gesetzes ein Teilchen in endlicher Entfernung von einem anderen eine unendliche Geschwindigkeit, also auch eine unendlich große lebendige Kraft annehmen könne.

Ist nämlich m die Masse des Trägers der elektrischen Menge $\mathfrak{e}$, welche der Abstoßung einer gleichartigen ruhenden Menge $\mathfrak{e}'$ unterworfen ist, und geht die Bewegung in der Richtung des Radiusvektors vor sich, so lautet die Gleichung der Bewegung:

---

36) *C. Neumann*, Prinzipien der Elektrodynamik und Allg. Unters. über das *Newton*'sche Prinzip der Fernwirkungen, Kap. VIII (s. Literaturübersicht), sowie Math. Ann. 1 (1869), p. 317 und Math. Ann. 17 (1880), p. 400.

37) J. f. Math. 72 (1870), p. 57—129.

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{ee'}{r^2}\left(1 - a^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + 2a^2r\frac{d^2r}{dt^2}\right).$$

Hieraus folgt als Energiegleichung durch Multiplikation mit $\frac{dr}{dt}$ und Integration:

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{ee'}{r}\left(1 - a^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right) = C$$

oder

$$a^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{C - \frac{ee'}{r}}{\frac{m}{2a^2} - \frac{ee'}{r}}.$$

Dementsprechend wird die Geschwindigkeit unendlich groß für

$$r = \varrho = \frac{2ee'a^2}{m}.$$

Dies ist ein möglicher positiver Wert des Radiusvektors, wenn, wie vorausgesetzt, die Massen e und e' gleichartig sind. Damit für $r = \varrho$ die Geschwindigkeit der Bewegung reell, die Lage $r = \varrho$ selbst also möglich wird, ist nur erforderlich, daß im Falle einer abstoßenden Wirkung, wo zu Anfang $r < \varrho$ und daher $\frac{ee'}{r} > \frac{m}{2a^2}$ ist, auch $\frac{ee'}{r} > C$ sei, was durch geeignete Verfügung über die Anfangsgeschwindigkeit zu erreichen ist.

Gegen diesen Einwurf machte *Weber* geltend[38]), daß die Entfernung ϱ jedenfalls eine sehr kleine (molekulare) Entfernung wird, weil in ihrem Zähler die Größe $2a^2$ vorkommt, die experimentell gleich dem reziproken Quadrate der Lichtgeschwindigkeit gefunden wurde (s. oben), daß aber für so kleine Entfernungen möglicherweise ganz andere Gesetze gelten können als für endliche Entfernungen.

Helmholtz erwiderte darauf, daß man nicht notwendig auf molekulare Entfernungen geführt wird, wenn man außer den elektrischen noch andere ponderomotorische Kräfte auf den Träger der elektrischen Menge e einwirken lasse. Allgemein argumentiert *Helmholtz* so[39]):

Man nehme eine beliebige Anzahl N von elektrisch geladenen Punkten, deren träge Massen mit μ_n bezeichnet werden; sie mögen alle oder zum Teil Quanten von Elektrizität enthalten, die nach elektrostatischem Maß gemessen mit e_n bezeichnet werden; es sei r_{nm} die Entfernung der Punkte n und m, q_n die Geschwindigkeit des Punktes n, ϑ_{nm} der Winkel, den die Geschwindigkeit q_n mit der über

---

38) Elektr. Maßbest. 7, insbes. über die Energie der Wechselwirkung (1871) = Ges. W. 4, p. 247.

39) J. f. Math. 75 (1873), p. 35—66 = Ges. Abhdlgn. 1, p. 647.

n hinaus verlängerten Richtung der Linie r_{nm} bildet. Dann ist entsprechend dem *Coulomb*'schen Gesetz der Wert des elektrostatischen Potentials:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{(n)} \sum_{(m)} \frac{e_n e_m}{r_{nm}},$$

nach dem *Weber*'schen Gesetz der Wert des elektrodynamischen Potentials:

$$V = -\frac{a^2}{2} \sum_{(n)} \sum_{(m)} \frac{e_n e_m}{r_{nm}} (q_n \cos \vartheta_{nm} + q_m \cos \vartheta_{mn})^2.$$

Der letztere Ausdruck läßt sich in zwei Teile sondern, von denen der eine

$$Q = -a^2 \sum_{(n)} \sum_{(m)} \frac{e_n e_m}{r_{nm}} q_n q_m \cos \vartheta_{nm} \cos \vartheta_{mn}$$

sei und der andere unter Benutzung der Abkürzung

$$p_n = 2\,a^2 \sum_{(m)} \frac{e_m}{r_{nm}} \cos^2 \vartheta_{nm}$$

geschrieben werden kann:

$$-\frac{1}{2} \sum_{(n)} e_n p_n q_n^2.$$

Er ist mithin, da er das Quadrat der Geschwindigkeit enthält, von der Form des Ausdruckes der lebendigen Kraft.

Bedeutet endlich P das Potential der übrigen Kräfte, welche auf die träge Masse wirken, so ist nach dem *Weber*'schen Gesetz die Gleichung für die Erhaltung der Energie:

$$\tfrac{1}{2} \sum (\mu_n - p_n e_n)\, q_n^2 + P + Q + U = \text{const.}$$

Hieraus geht hervor, daß diejenige Größe, welche die lebendige Kraft des Punktsystems vertritt (das erste Glied der vorstehenden Gleichung), von der gewöhnlichen Form dadurch abweicht, daß die Quadrate der Geschwindigkeiten mit Faktoren multipliziert werden, die nicht notwendigerweise positiv sind. Sollte also für einen Punkt die Größe $\mu_n - p_n e_n$ negativ sein, so würde der Punkt gewissermaßen negative Masse haben und einer Vergrößerung seiner Geschwindigkeit würde eine Verminderung seiner „lebendigen Kraft" entsprechen. Wenn die Summe $T = \frac{1}{2} \sum (\mu_n - e_n p_n)\, q_n^2$ aus einer Anzahl positiver und negativer Größen bestände, so würde die Geschwindigkeit einzelner Punkte über alle Grenzen hinaus wachsen, die Summe selbst aber konstant bleiben können. Hierin sieht *Helmholtz* einen Verstoß gegen das Energieprinzip.

Besonders deutlich zeigt sich dies in dem Falle, daß nur eine Masse μ sich bewegt und die übrigen auf einer Kugel gleichmäßig verteilt sind.

Weber[40]) und *C. Neumann*[41]) wandten hiergegen ein, der erstere, daß die Koeffizienten von q_n^2 in T keine wirkliche Masse bedeuten, der letztere, daß dem Energieprinzip in solchen Fällen wie dem in Rede stehenden eine erweiterte Fassung gegeben werden müsse, daß nämlich nur eine von dem augenblicklichen Zustande des Systems (Lage und Geschwindigkeit seiner Massenteile) abhängige Funktion zu existieren brauche, die bei der Bewegung ungeändert bleibt. (Neumann's *Postulat*, s. Nr. 8.)

Ferner zeigte *Helmholtz*[42]) noch, daß sich unter Umständen aus dem *Weber*'schen Gesetz eine Elektrizitätsverteilung auf Konduktoren ergeben könne, die in labilem Gleichgewicht ist.

Wenn *R. Clausius*[43]) einen Vorwurf gegen das *Weber*'sche Gesetz aus der demselben zu Grunde liegenden dualistischen Auffassung der Elektrizitätsbewegung konstruierte, so ist dagegen zu bemerken, daß zu jener Zeit die Entscheidung zwischen der unitarischen und dualistischen Auffassung mehr Sache des persönlichen Geschmacks wie des objektiven Urteils war und daß erst neuere Erfahrungen und Theorien über bewegte Elektronen gegen die Annahme einer mit entgegengesetzt-gleicher Geschwindigkeit erfolgenden Strömung der positiven und negativen Elektrizität sprechen.

Die mathematische Behandlung spezieller Probleme wird unter Zugrundelegung des *Weber*'schen Gesetzes meist recht kompliziert. Selbst die Bewegung eines einzelnen, frei beweglichen, geladenen Massenteilchens, welches von einem festen Zentrum nach dem *Weber*schen Gesetz angezogen wird[44]), gibt zu recht umständlichen Rechnungen mit elliptischen Funktionen und zu zahlreichen Fallunterscheidungen Anlaß.

Wie es scheint, sind die Diskussionen über das *Weber*'sche Gesetz nicht bis zu einem positiven Ergebnis durchgeführt worden. Das Für und Wider versiegte allmählich, weil sich das Interesse einstweilen, zu Gunsten der *Faraday-Maxwell*'schen Auffassung, überhaupt von

40) Ann. Phys. Chem. 156 (1875), p. 1 = Ges. Werke 4, p. 312.

41) Leipz. Ber. 1872 und 1874; Ann. Phys. Chem. 155 (1875), p. 211.

42) J. f. Math. 72 (1870), § 4, p. 85 = Ges. Abhdlgn. 1, p. 578.

43) J. f. Math. 82 (1877), p. 85.

44) Vgl. *E. Riecke*, Gött. Nachr. 1874; *G. Lolling*, Leopoldina 44; *E. Ritter*, Ztschr. Math. Phys. 37. Wegen der einschlägigen Arbeiten astronomischer Richtung vgl. Art. 2 dieses Bandes Nr. 21.

der Frage nach der Form eines umfassenden Massenpunktgesetzes abkehrte.

7. Gauß und Riemann. Während *Weber* in konsequentester Weise den Standpunkt der Fernwirkungen verfocht, machten sich in seiner unmittelbaren Umgebung, bei seinem Lehrer *Gauß* und seinem Schüler *Riemann*, Strömungen entgegengesetzter Richtung geltend.

Im Jahre 1845 schrieb *Gauß*[45]) an *Weber* auf eine Mitteilung von dessen Grundgesetz hin, daß er sich zehn Jahre früher selbst mit ähnlichen Untersuchungen beschäftigt, daß er sie aber nicht bekannt gemacht hätte, „weil ihm das gefehlt, was er als den eigentlichen Schlußstein betrachtet hatte, nämlich die *Ableitung* der Zusatzkräfte (die zu der gegenseitigen Wirkung ruhender Elektrizitätsteile noch hinzukommen, wenn sie in gegenseitiger Bewegung sind) *aus der nicht instantanen*, sondern (auf ähnliche Weise wie beim Licht) in der Zeit sich fortpflanzenden Wirkung". Hierzu wäre es seiner Überzeugung nach nötig, „sich von der Art, *wie* die Fortpflanzung geschieht, eine *konstruierbare* Vorstellung zu machen".

Gauß ist auch später nicht dazu gekommen, seine Untersuchungen im Sinne dieser Forderung zu ergänzen. Das *Gauß'sche Grundgesetz*[46]), welches in seinem Nachlaß veröffentlicht ist, genügt dieser Forderung nicht. Dasselbe ist vom Juli 1835 datiert und lautet

$$\mathfrak{F} = \frac{\mathfrak{e}\mathfrak{e}'}{r^2}\left\{1 + k\left(u^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right)\right\}, \tag{41}$$

wo $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}'$ die in Bewegung befindlichen Elektrizitätsmengen, $\sqrt{1/k}$ eine bestimmte Geschwindigkeit, r den Abstand von $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ und u die relative Geschwindigkeit der Punkte $\mathfrak{e}$ (xyz) und $\mathfrak{e}'$ $(x'y'z')$ bedeutet, sodaß

$$u^2 = (\dot{x} - \dot{x}')^2 + (\dot{y} - \dot{y}')^2 + (\dot{z} - \dot{z}')^2. \tag{42}$$

Nach einer Kritik von *Maxwell*[47]) gibt dieses Gesetz indessen die Induktionserscheinungen nicht richtig wieder.

Ganz im Sinne der *Gauß*'schen Forderung liegt dagegen eine Theorie, die *B. Riemann*[48]) im Jahre 1858 aufgestellt hat. Er bestimmt das Potential V eines bewegten elektrischen Teilchens als Lösung einer Differentialgleichung, die der *Poisson*'schen Gleichung der Potentialtheorie nachgebildet ist, nämlich:

---

45) Ges. Werke 5, p. 627.

46) Ges. Werke 5, p. 616.

47) Treatise, 2. Ausg., 2, p. 437.

48) Ann. Phys. Chem. 131 (1867), p. 237 = Ges. Werke, 2. Aufl. Leipzig 1892, p. 288.

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \Delta V + 4\pi\varrho,$$

in der ϱ die räumliche Dichte der Elektrizität im Punkte x, y, z und α eine Geschwindigkeit bedeutet. Nach dieser Gleichung pflanzt sich das Potential mit der Geschwindigkeit α fort und braucht, um vom Punkte $x'y'z'$ zu dem um r entfernten Punkte xyz zu gelangen, die Zeit r/α. Will man also die Potentialwirkung im Punkte $\mathfrak{e}\,(xyz)$ zur Zeit t bestimmen, die von einer elektrischen Masse $\mathfrak{e}'$ ausgeht, so hat man diejenige Lage $x'y'z'$ der letzteren in Betracht zu ziehen, in der sie sich zu einer gewissen früheren Zeit t' befunden hat. t' kann, wenn die Bewegung von $\mathfrak{e}'$, also insbesondere die Entfernung der Lage des Teilchens $\mathfrak{e}'$ zu jeder früheren Zeit von dem Orte des Teilchens $\mathfrak{e}$ zur Zeit t bekannt ist, durch Auflösung der Gleichung $t' = t - r/\alpha$ nach t' gefunden werden. Man erhält auf diese Weise als Elementarpotential der Wirkung von $\mathfrak{e}'$ auf $\mathfrak{e}$

$$\frac{\mathfrak{e}\mathfrak{e}'}{r(t,t')}, \tag{43}$$

wo $r(t, t')$ die Entfernung des Ortes von $\mathfrak{e}$ zur Zeit t von dem Orte von $\mathfrak{e}'$ zur Zeit t' bedeutet. Dieses Elementarpotential ist eine Lösung der vorangestellten Differentialgleichung.

Riemann summiert nun dieses Elementarpotential über alle elektrischen Massen $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ zweier stromführender Leiter und findet durch Schlüsse, deren Zulässigkeit von *R. Clausius*[49]) angefochten worden ist, für das Gesamtpotential einen Wert, der sich mit dem *Neumann*'schen Potential deckt, wenn α mit der von *Weber* und *Kohlrausch* bestimmten Geschwindigkeit $1/a$ nach der Gleichung zusammenhängt $\alpha^2 = 1/2a^2$, d. h. *wenn α gleich der Lichtgeschwindigkeit c gewählt wird.* Das Interesse der *Riemann*'schen Theorie beruht einerseits in dem letztgenannten Ergebnis, welches *Riemann* als Vorläufer *Maxwell*'s kennzeichnet, andererseits darin, daß die neuere Elektronentheorie in gewissem Sinne zu der *Riemann*'schen Form des Elementarpotentials zurückführt[50]).

---

49) Ann. Phys. Chem. 135 (1869), p. 606. Vgl. auch die Bemerkungen *H. Weber*'s in Riemann's Ges. Werken, 2. Aufl. p. 293.

50) Vgl. Art. 14, Nr. 4 und 5. Allerdings spricht die Elektronentheorie das fragliche Potentialgesetz nicht für punktförmige sondern für räumlich verteilte Elektrizitätsmengen aus; auf die Wichtigkeit und Notwendigkeit dieser Abweichung von dem *Riemann*'schen Ansatz weist besonders *E. Wiechert* hin, Haarlem Arch. Néerl. (2) 5 (1900), p. 563 (Jubelband für *H. A. Lorentz*). In der Elektronentheorie kommt zu dem skalaren Potential der Wirkung zweier Elektronen noch ein Vektorpotential hinzu, auf welches in Nr. 9 des vorliegenden Art. hingewiesen wird.

Wohl zu unterscheiden von diesen weittragenden Spekulationen ist ein Grundgesetz der elektrodynamischen Wirkungen, welches *Riemann* in seinen Universitätsvorlesungen[51]) vorgetragen, das er selbst aber nicht publiziert hat. *Die Riemann'sche Form des Grundgesetzes* der Wirkung zweier bewegter elektrischer Mengen $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ schreibt sich am einfachsten ebenfalls in der Form eines Potentials; dasselbe lautet:

$$V = -\frac{\mathfrak{e}\mathfrak{e}'}{r}\frac{u^2}{2c^2}, \tag{44}$$

wo u die in Gl. (42) angegebene Bedeutung der relativen Geschwindigkeit der Elektrizitätsmengen $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ hat; die letzteren sind dabei in elektrostatischem Maß gemessen; c bedeutet die Lichtgeschwindigkeit.

V bestimmt nach *Riemann* die potentielle Energie zweier Elektrizitätsteilchen, soweit sie elektrodynamischen Ursprungs ist; hierzu kommt die potentielle Energie elektrostatischen Ursprungs, welche wieder U heißen möge, sowie die kinetische Energie T. Die Energiegleichung lautet daher nach *Riemann*

$$T + U + V = \text{const.} \tag{45}$$

Es entsteht nun allgemein die Frage, wie aus der Form der einen Energiegleichung auf das Kraftgesetz und die Bewegungsgleichungen (sechs Gleichungen bei zwei Teilchen) geschlossen werden kann. Die Frage ist zunächst natürlich unbestimmt, da man in sehr mannigfaltiger Weise Kraftausdrücke bilden kann, die mit der vorgegebenen Energiegleichung im Einklange sind. Es muß daher noch eine weitere Annahme hinzutreten; diese besteht bei *Riemann* und ähnlich bei *C. Neumann* (vgl. die vorige Nr.) in der Forderung eines möglichst engen Anschlusses an die Mechanik. Als allgemeinste Formulierung der Mechanik kann das Variationsprinzip gelten, welches in Deutschland gewöhnlich das *Hamilton*'sche Prinzip genannt wird und welches *Riemann* zutreffender als *Lagrange*'sches Prinzip bezeichnet. Hängt die potentielle Energie nur von der Lage des Systems ab, so lautet das Prinzip bekanntlich

$$\delta\int(T - U)\,dt = 0$$

(bei gegebener Anfangs- und Endlage des Systems und bei festgehaltenen Grenzen des Integrals). Die hieraus folgenden Bewegungsgleichungen geben als zugehörige Energiegleichung $T + U = \text{const.}$ Wenn dagegen, wie im vorliegenden Falle, die potentielle Energie auch von der Geschwindigkeit abhängt, so ist die geeignete Form

---

51) Schwere, Elektrizität und Magnetismus, Hannover 1876, § 98, § 99.

des Prinzipes erst zu suchen. Maßgebend hierbei muß der Gesichtspunkt sein, daß die Folgerungen des Prinzipes mit dem Energiegesetz in der Form (45) verträglich sein sollen. Man setze in dem Sinne das Prinzip zunächst mit unbestimmtem Vorzeichen folgendermaßen an:

$$\delta\int(T - U \pm V)\,dt = 0. \tag{46}$$

Das System besteht aus zwei Teilchen von den Massen m, m' und den Ladungen $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}'$; $x\,y\,z$ und $x'y'z'$ sind die rechtwinkligen Lagenkoordinaten, $\dot{x}\,\dot{y}\,\dot{z}$ und $\dot{x}'\dot{y}'\dot{z}'$ die entsprechenden Geschwindigkeitskoordinaten. Aus (46) folgt nach den Regeln der Variationsrechnung:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}(T - U \pm V) = \frac{\partial}{\partial x}(T - U \pm V) \tag{47}$$

und entsprechende Gleichungen für die Variabeln $y\,z\,x'y'z'$. Um zur Energiegleichung zu gelangen, multipliziere man die Gleichungen der Reihe nach mit $\dot{x}\,\dot{y}\,\dot{z}$, $\dot{x}'\dot{y}'\dot{z}'$ und addiere. Da

$$\dot{x}\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}(\qquad) = \frac{d}{dt}\dot{x}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}(\qquad) - \ddot{x}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}(\qquad),$$

ergibt sich, wenn zu jedem der hingeschriebenen Glieder diejenigen fünf hinzugedacht werden, die durch Vertauschung von x mit $y\,z\,x'\,y'\,z'$ daraus entstehen:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} + \cdots\right)(T - U \pm V) = \left(\dot{x}\frac{\partial}{\partial x} + \cdots + \ddot{x}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} + \cdots\right)(T - U \pm V).$$

Nun ist nach (42) und (44) V ebenso wie T eine homogene Funktion zweiten Grades von $\dot{x}\,\dot{y}\,\dot{z}\,\dot{x}'\dot{y}'\dot{z}'$, während U von diesen Größen unabhängig ist. Die linke Seite wird daher gleich $2\,d(T \pm V)/dt$; auf der rechten Seite steht der vollständige Differentialquotient von $T - U \pm V$ nach t. Mithin lautet die Energiegleichung:

$$2\frac{d}{dt}(T \pm V) = \frac{d}{dt}(T - U \pm V) \quad \text{oder} \quad \frac{d}{dt}(T + U \pm V) = 0.$$

Soll dieses mit (45) stimmen, so muß bei V das obere Vorzeichen gewählt werden. Dieser Umstand läßt sich dahin deuten, daß bei der Anwendung der mechanischen Prinzipien das Potential V eigentlich als eine Art kinetischer Energie aufgefaßt werden sollte, so daß es sich in dem Ausdrucke (46) nicht zu U, sondern zu T hinzuaddiert.

Aus Gleichung (47) ergeben sich nun die Komponenten der auf das Teilchen $\mathfrak{e}$ wirkenden Kraft $\mathfrak{F}$. Man hat nämlich:

$$\mathfrak{F}_x = m\ddot{x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}(U - V) - \frac{\partial}{\partial x}(U - V). \tag{48}$$

Insbesondere erhält man, wenn man für U den Ausdruck $\mathfrak{e}\mathfrak{e}'/r$ und für V den Ausdruck (44) einträgt, als *Riemann'sches Kraftgesetz:*

$$(49)\qquad \mathfrak{F}_x = \frac{\mathfrak{e}\mathfrak{e}'}{r^2}\left(1 + \frac{u^2}{2c^2}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\mathfrak{e}\mathfrak{e}'}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x} - \dot{x}'}{r}\right)$$

u. s. w.

Setzt man dagegen in (48) für V das *Weber*'sche elektrodynamische Potential aus Gleichung (38) ein, welches nur von r und $\dot{r}$ abhängt, und schreibt r, $\dot{r}$ statt x, $\dot{x}$, so folgt

$$\mathfrak{F}_r = \frac{d}{dt}\left(2\mathfrak{e}\mathfrak{e}'a^2\frac{\dot{r}}{r}\right) + \frac{\mathfrak{e}\mathfrak{e}'}{r^2}(1 + a^2\dot{r}^2)$$
$$= \frac{\mathfrak{e}\mathfrak{e}'}{r^2}(1 - a^2\dot{r}^2 + 2a^2 r\ddot{r}),$$

d. h. genau der Ausdruck des *Weber*'schen *Gesetzes* aus Gleichung (37).

Weiter möge noch der Zusammenhang eines vorgelegten beliebigen Elementarpotentials V zweier bewegter elektrischer Teilchen $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ mit dem *Neumann*'schen Potential $V_{ii'}$ zweier Stromkreise s und s' erörtert werden. Wir erteilen, wie es bei der Ableitung des *Neumann*schen Potentiales geschah, den Stromkreisen s und s' eine beliebige virtuelle Verrückung, durch welche ihre gegenseitige Lage verändert wird. Die Verrückungskomponenten für irgend eine Stelle seien $\delta x\, \delta y\, \delta z$ und $\delta x'\, \delta y'\, \delta z'$. Die Stromstärken i und i' werden dabei ungeändert gelassen.

Indem wir uns die Strömung durch Bewegung elektrischer Elementarquanten hervorgerufen denken, stellen wir uns jeden der beiden Leiter in seiner ursprünglichen und in seiner variierten Lage von Teilchen $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}'$ durchströmt vor, so zwar, daß sich ein individuelles Teilchen $\mathfrak{e}$ in dem ursprünglichen Leiter an der wechselnden Stelle $x \ldots$ und gleichzeitig mit unveränderter Ladung in dem variierten Leiter an derjenigen Stelle $x + \delta x \ldots$ befindet, die vermöge unserer virtuellen Verrückung der Stelle $x \ldots$ jeweils entspricht. Je zwei entsprechende Querschnitte des Leiters in der einen und anderen Lage werden alsdann von genau denselben Ladungen gleichzeitig durchströmt, d. h. die Stromstärke bleibt, wie es sein soll, bei dieser Auffassung der Variation konstant. Wir bemerken noch, daß die Geschwindigkeitskomponenten eines individuellen Teilchens in dem ursprünglichen Leiter $dx/dt \ldots$ oder $\dot{x} \ldots$ und in dem variierten Leiter $d(x + \delta x)/dt \ldots$ oder $\dot{x} + d\delta x/dt \ldots$ sind; bezeichnen wir die letzteren mit $\dot{x} + \delta\dot{x} \ldots$, so ergibt sich die Bedeutung von $\delta\dot{x}$ gleich $\frac{d}{dt}(\delta x)$.

Die bei unserer virtuellen Verrückung von den elektrodynamischen Kräften an beiden Stromkreisen im Ganzen geleistete Arbeit ist nun einerseits nach der Definition des *Neumann*'schen Potentials:

$$\delta W = -\delta V_{ii'} \tag{50}$$

(i und i' konstant); sie kann andererseits aus den Kräften $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ berechnet werden zu

$$\delta W = \sum \mathfrak{F}_x \delta x + \cdots,$$

wo das Zeichen Σ über die Kombination irgend zweier Teilchen $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ zu erstrecken ist und wo zu dem hingeschriebenen diejenigen fünf Glieder hinzuzudenken sind, die durch Vertauschung von x mit $y\,z\,x'\,y'\,z'$ entstehen. Nach (48) ist aber, wenn wir von den elektrostatischen Kräften absehen, also U gleich Null setzen:

$$\sum \mathfrak{F}_x \delta x \cdots = -\sum \delta x \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} + \cdots + \sum \delta x \frac{\partial V}{\partial x} + \cdots$$

$$= -\frac{d}{dt}\sum \delta x \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} + \cdots + \sum \delta \dot{x} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} + \cdots + \sum \delta x \frac{\partial V}{\partial x} + \cdots$$

In der letzten Zeile verschwindet das erste Glied, weil die Strömung sowohl in den ursprünglichen wie in den variierten Leitern stationär ist. Die beiden folgenden Glieder stellen zusammen die vollständige Variation von ΣV bei der virtuellen Verrückung dar. Es wird daher auch

$$\delta W = \delta \Sigma V. \tag{51}$$

Aus (50) und (51) ergibt sich

$$\Sigma V = -V_{ii'}. \tag{52}$$

Dieser Bedingung muß jedes Elementarpotential V, welches man für die Wirkung zweier Teilchen aufstellen mag, genügen, wenn anders es den durch das *Neumann*'sche Potential dargestellten Erfahrungstatsachen entsprechen soll. Im Falle des *Riemann*'schen sowie des *Weber*'schen Potentials ist Gleichung (52) bei dualistischer Auffassung des Strömungsvorganges befriedigt. Insbesondere liegt bei dem ersteren die Sache so, daß *Riemann*, ausgehend von dem *Neumann*'schen Potential, dieses durch Hinzufügung von Gliedern, die bei der Integration über einen geschlossenenen Stromkreis den Wert Null ergeben, in eine Form setzte, die sich als Summe der gegenseitigen Wirkungen zweier Teilchen $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ auffassen ließ, daß also *Riemann* auf sein Potential durch eine geeignete Zerspaltung des *Neumann*'schen Potentials im Sinne der Gleichung (52) geführt wurde.

Inwieweit sich das *Riemann*'sche Potential in seinen Folgerungen von dem *Weber*'schen Potential der Elementarwirkung zweier bewegter

Elektrizitätsmengen unterscheidet, wird in der letzten Nummer erörtert werden.

Man hat versuchsweise sowohl das *Gauß*'sche wie das *Riemann*sche Gesetz auf bewegte ponderable Massen übertragen und auf astronomische Probleme angewandt (vgl. Art. 2 dieses Bandes Nr. **21**); jedoch scheint sich diese Übertragung nicht als fruchtbar zu erweisen.

8. Carl Neumann. Von den elektrodynamischen Untersuchungen dieses Forschers heben wir zunächst eine Gruppe von Arbeiten[52]) hervor, in denen der schon von *Riemann* ausgesprochene Gedanke einer zeitlichen Fortpflanzung des Potentials aufgenommen, aber in wesentlich anderer Weise ausgeführt wird. *Neumann* drückt sich etwa folgendermaßen aus: Zur Zeit t' geht von einem elektrischen Teilchen $\mathfrak{e}'$ ein „Befehl" an ein zweites Teilchen $\mathfrak{e}$ aus; derselbe wird mit konstanter, sehr großer Geschwindigkeit β *auf dem* die beiden Teilchen verbindenden, im Raume veränderlichen *Radiusvektor* r transmittiert. Er erreicht das Teilchen $\mathfrak{e}$ zur Zeit $t = t' + \Delta t$, wo $\Delta t = r/\beta$ und r die Entfernung von $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ zur Zeit t ist. Der Befehl oder das von $\mathfrak{e}'$ emittierte Potential bemißt sich nach der Entfernung von $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ zur Zeit t' der Emission, welche r' heißen möge, und laute $\mathfrak{e}\mathfrak{e}'\varphi(r')$, wo φ eine zunächst unbestimmt gelassene Funktion des Argumentes ist. Entsprechend $t' = t - \Delta t$ setze man $r' = r - \Delta r$ und entwickle $\varphi(r') = \varphi(r - \Delta r)$ nach Potenzen der kleinen Größe $\Delta t = r/\beta$ unter Vernachlässigung der dritten und höheren Potenzen. Es ergibt sich für das *zur Zeit* t' *von* $\mathfrak{e}'$ *emittierte und zur Zeit* t *von* $\mathfrak{e}$ *rezipierte Potential* der Wert

$$\mathfrak{e}\mathfrak{e}'\left(\varphi - \frac{r}{\beta^2}\frac{d\varphi}{dr}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right) + \mathfrak{e}\mathfrak{e}'\frac{d}{dt}\left(\frac{\int\varphi\,dr - r\varphi}{\beta} + \frac{r^2}{2\beta^2}\frac{d\varphi}{dr}\frac{dr}{dt}\right).$$

Während also ursprünglich das Potential als reine Funktion der Entfernung r' zur Zeit der Emission angesetzt wurde, wird es, wenn man es durch die Entfernung r zur Zeit der Rezeption ausdrückt, eine Funktion von r, dr/dt und d^2r/dt^2.

Um aus diesem Potential die zwischen den beiden Teilchen $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ wirkende Kraft abzuleiten, benutzt *Neumann* (vgl. die vorige Nummer) das *Hamilton*'sche Prinzip. Bei der Anwendung dieses Prinzipes kommt das zweite Glied des vorstehenden Ausdruckes in Fortfall, da es durch einen Differentialquotienten nach t dargestellt wird. Das erste Glied geht, wenn man die nächstliegende Annahme $\varphi = 1/r$ macht, über in

52) Math. Ann. 1 (1869), p. 317, vgl. auch die frühere Anm. 36.

$$\frac{ee'}{r}\left(1 + \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right);$$

es stimmt also, wenn man noch $\beta = 1/a$ wählt, überein mit dem Ausdrucke (40) und führt wie dieser bei Ausführung der im *Hamilton*'schen Prinzip vorgeschriebenen Variation auf das *Weber*'sche Gesetz.

Neumann weist selbst darauf hin, daß die Analogie seiner Theorie mit der *Riemann*'schen sowie der von ihm angenommenen Fortpflanzung des Potentials mit der Fortpflanzung des Lichtes nur eine äußerliche ist. In der Tat wird die von *Neumann* postulierte Potentialgeschwindigkeit β nicht gleich der Lichtgeschwindigkeit c (oder dem *Riemann*'schen α), sondern gleich $1/a = \sqrt{2}c$ gesetzt. Ferner ist für die *Neumann*'sche Untersuchung die Annahme wesentlich, daß sich das Potential auf dem die beiden Teilchen verbindenden, im Raume veränderlichen Radiusvektor, nicht im Raume selbst mit konstanter Geschwindigkeit fortpflanzt. Bei *Neumann* kann daher nicht, wie bei *Riemann*, der absolute Raum (oder der Äther) als das die Potentialwirkung übertragende Mittel angesehen werden, vielmehr hängt ganz im Sinne von *W. Weber* die Größe des Potentials und die Art seiner Übertragung nur von der relativen Lage der Teilchen und dem dieselben verbindenden relativen Radiusvektor ab, so daß es verständlich wird, warum diese *Neumann*'sche Vorstellung gleiche Resultate wie die *Weber*'sche Theorie ergibt.

In einer anderen Gruppe von Arbeiten stellt sich *Neumann* die Aufgabe, die Grundlagen der Elementargesetze, namentlich des *Ampère*schen „ponderomotorischen" Gesetzes, scharf zu formulieren und ein „elektromotorisches" Elementargesetz zu entdecken, welches das *F. Neumann*'sche für geschlossene Ströme ausgesprochene Integralgesetz ergänzt und auf die Wirkung von Stromelementen zurückführt. Eine zusammenfassende Darstellung dieser Untersuchungen gibt das Werk „Die elektrischen Kräfte, Erster Teil". (Vgl. Literaturübersicht.)

Neumann geht hierbei von einer allgemeinen Formulierung des Energiegesetzes aus. Die potentielle Energie des Systems wird hierbei als eine zwar durchaus unbekannte, jedenfalls aber nur von dem augenblicklichen Zustande des Systems abhängige Funktion F angesehen, deren Existenz eben durch das Energiegesetz postuliert wird. Er nennt sie deshalb „das Postulat des Systems". Betrachtet man nur die elektrodynamischen Wirkungen innerhalb des Systems, so läßt sich das Energiegesetz dahin aussprechen, daß die Summe der von den elektrodynamischen Kräften hervorgerufenen Vermehrung der lebendigen Kraft und der im System entwickelten (*Joule*'schen) Wärme

ein vollständiges Differential sein soll, nämlich das negative Differential $-dF$ des elektrodynamischen Postulates.

Was zunächst das *ponderomotorische Elementargesetz* angeht, so hält *Neumann* an den *Ampère*'schen *Hypothesen* (vgl. pag. 11) fest, mit Ausnahme derjenigen, daß die Kraft einer Potenz der Entfernung umgekehrt proportional sei. Macht man den allgemeinen Ansatz

$$JJ' ds\, ds' P,$$

wo P eine Funktion der relativen Lage der beiden Stromelemente ds und ds' ist, so folgt aus den *Ampère*'schen Hypothesen mit Benutzung der früher erklärten Bezeichnungen:

$$(54)\quad \begin{cases} P = \varrho^{I} \cos\vartheta \cos\vartheta' + \varrho^{II} \cos\varepsilon, \\ \varrho^{I} = \frac{4}{c^2}\left[\frac{2}{r}\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2 - \frac{d}{dr}\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2\right],\ \varrho^{II} = -\frac{8}{c^2 r}\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2. \end{cases}$$

Man kann hierfür auch kürzer schreiben:

$$(55)\qquad P = \frac{8}{c^2}\frac{d\psi}{dr}\frac{d^2\psi}{ds\,ds'}.$$

ψ ist eine Funktion der Entfernung r der beiden Stromelemente, die man, um Übereinstimmung mit dem *Ampère*'schen Gesetz zu erzielen, gleich $\sqrt{r}$ zu wählen hat. Diese Wahl ist jedoch nur für endliche Entfernungen angezeigt, während für molekulare Entfernungen ψ eventuell anders zu bestimmen sein wird.

Bei der Ableitung des *elektromotorischen Elementargesetzes* für die Einwirkung eines stromdurchflossenen Drahtes auf einen beliebigen Körper werden die folgenden Hypothesen zu Grunde gelegt.

1. Die elektromotorische Kraft elektrodynamischen Ursprungs, welche in irgend einem Punkte des Körpers während der Zeit dt von dem Stromelement ds hervorgebracht wird, ist proportional mit der Länge ds desselben, sonst aber nur noch abhängig von seiner Stromstärke und seiner relativen Lage zu dem betrachteten Punkte, sowie von denjenigen Änderungen, welche Länge und Stromstärke während der Zeit dt erleiden. Sie ist Null, falls solche Änderungen nicht stattfinden.

2. Die elektromotorische Kraft ist zerlegbar in zwei Kräfte, von denen die eine mit der Stromstärke J des Elementes ds, die andere mit der Änderung dJ der Stromstärke während der Zeit dt proportional ist; mit anderen Worten, die rechtwinkligen Komponenten der elektromotorischen Kraft sind homogene lineare Funktionen von J und dJ.

3. Denkt man sich das Stromelement Jds in die rechtwinkligen Komponenten Jdx, Jdy, Jdz aufgelöst, welche mit dem Stromelement starr verbunden sind, so ist die elektromotorische Kraft von Jds

identisch mit der gesamten elektromotorischen Kraft von Jdx, Jdy, Jdz, vorausgesetzt, daß nicht nur J, sondern auch dJ für alle vier Elemente denselben Wert hat.

4. Das *F. Neumann*'sche Integralgesetz ist für geschlossene Ströme ausnahmslos gültig, wenn die Ströme ohne Gleitstellen und gleichförmig sind.

Aus den drei ersten Hypothesen und der vorausgeschickten Formulierung des Energiegesetzes folgt nun die allgemeinste Form der Wirkung zweier Stromelemente aufeinander:

Befinden sich zwei Stromelemente Jds und $J'd's'$ in irgend welchem Zustande der Bewegung und die in ihnen enthaltenen Ströme in irgend einem Zustande der Veränderung, so wird die während der Zeit dt von $J'ds'$ in der Richtung von Jds hervorgebrachte elektromotorische Kraft elektrodynamischen Ursprungs

$$Edt = J'ds' \frac{(d\Omega - Pdr) + \sigma(\cos\vartheta\, d\cos\vartheta' - \cos\vartheta'\, d\cos\vartheta)}{2} + dJ'ds'\Omega;$$

durch die Zeichen $d\Omega$, dJ', $d\cos\vartheta$, $d\cos\vartheta'$ werden diejenigen Änderungen angedeutet, die während dt stattfinden; P hat die schon genannte, Ω die folgende Bedeutung:

$$\Omega = \omega^I \cos\vartheta \cos\vartheta' + \omega^{II} \cos\varepsilon;$$

ω^I, ω^{II}, σ sind Funktionen von r allein, über deren Beschaffenheit auf Grund der ersten drei Hypothesen nichts ausgesagt werden kann.

Nimmt man aber die Hypothese 4. hinzu, so ergibt sich eine Relation zwischen ω^I, ω^{II} und ψ, nämlich

$$\omega^I + \frac{4}{c^2}\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2 = r\frac{d\omega^{II}}{dr}. \tag{56}$$

Ferner zeigt sich, daß $-JdsJ'ds'\Omega$ das elektrodynamische „Postulat“ der Stromelemente darstellt.

Zur näheren Bestimmung von ω^I und ω^{II} werden zwei weitere Hypothesen eingeführt: Die erste derselben erweitert das in der Hypothese 3. für lineare Leiter Ausgesprochene auf körperliche Leiter; die zweite lautet:

Bezeichnet dS ein unendlich kleines, genau kugelförmiges Volumelement eines Körpers B, in welchem beliebige elektrische Vorgänge stattfinden und steht der Mittelpunkt von dS in starrer Verbindung mit einem Körper A, während B selber um diesen Mittelpunkt in irgend welcher Drehung begriffen ist, so soll angenommen werden, daß die von dS in irgend einem Punkte von A hervorgebrachte elektromotorische Kraft elektrodynamischen Ursprungs immer Null ist, so-

bald die in dS vorhandene elektrische Strömung, beurteilt mit Bezug auf A, ihrer Richtung und Stärke nach konstant bleibt.

Hieraus ergeben sich zur Bestimmung der unbekannten Funktionen folgende Gleichungen:

$$\sigma = \omega^I \quad \text{und} \quad \omega^{II} = 0,$$

also wegen (56)

$$\sigma = \omega^I = -\frac{4}{c^2}\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2, \quad \omega^{II} = 0. \tag{57}$$

Von da aus gelangt *Neumann* zu dem folgenden Elementargesetz für die elektromotorische Kraft elektrodynamischen Ursprungs:

Sind zwei Körper A und B in beliebiger Bewegung begriffen, während gleichzeitig im Innern eines jeden irgend welche elektrischen Vorgänge stattfinden und bezeichnet $\mathfrak{P}$ einen Punkt des Körpers A, dS ein Volumelement des Körpers B, so setzt sich die von dS in $\mathfrak{P}$ während der Zeit dt hervorgebrachte elektromotorische Kraft aus zwei Komponenten zusammen: die eine fällt in die Richtung der Entfernung r und besitzt die Stärke

$$dS \frac{\omega d(rJ_r)}{r},$$

wo J_r die Komponente der in dS vorhandenen Strömung J, genommen nach r, bedeutet und zwar nach derjenigen Richtung von r, in welcher die elektromotorische Kraft positiv gerechnet wird; die andere ist parallel mit der Strömung J und besitzt, in der Richtung von J gerechnet, die Stärke

$$-dS \frac{\omega J dr}{r};$$

dabei ist unter ω die Funktion

$$\omega = -\frac{4}{c^2}\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2$$

zu verstehen, sodaß also ω für beträchtliche Entfernung $(\psi = \sqrt{r})$ identisch ist mit $-1/c^2 r$.

Für geschlossene Ströme liefert dieses *C. Neumann*'sche Elementargesetz, auch wenn dieselben Gleitstellen enthalten, dieselben Ergebnisse wie die *F. Neumann*'schen Integralgesetze.

Der zweite Teil der „elektrischen Kräfte“ beschäftigt sich hauptsächlich mit den *Helmholtz*'schen Arbeiten zur Elektrodynamik, über die erst im nächsten Artikel berichtet werden wird, sodaß wir von der Analyse dieses zweiten Teiles hier absehen können.

9. Clausius. Bei seinen elektrodynamischen Untersuchungen[53]) wurde *R. Clausius* von dem Wunsche geleitet, die dualistische Auf-

53) J. f. Math. 82 (1877), p. 85, sowie Mechanische Wärmetheorie, 2. Ausg., Braunschweig 1879, 2, Abschn. IX und X, p. 227—305.

fassung der Elektrizitätsbewegung durch die ihm einfacher erscheinende unitarische Auffassung zu ersetzen. Er neigte zu der Annahme, daß im elektrischen Strom nur die positive Elektrizität ströme, die negative in Ruhe sei; jedenfalls aber wünschte er die Möglichkeit offen zu lassen, beiden Elektrizitäten verschiedene Geschwindigkeiten zuzuschreiben.

Beim *Weber*'schen Gesetz sowie beim *Riemann*'schen ist man nach *Clausius* gezwungen[54]), an der dualistischen Auffassung festzuhalten. Diese Gesetze würden nämlich bei der entgegengesetzten Auffassung ergeben, daß die strömende Elektrizität auf ein statisch geladenes Teilchen eine Kraft ausübt, was nach *Clausius* der Erfahrung widerspricht.

Bei der Aufstellung seines neuen Grundgesetzes geht *Clausius* systematisch zu Werke, indem er die Kraftkomponenten als allgemeine Ausdrücke ansetzt, welche von den relativen Koordinaten des einen Teilchens zum andern und von den nach der Zeit genommenen Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung der Koordinaten beider Teilchen abhängen. Die hierin eingehenden willkürlichen Funktionen der Koordinaten bestimmt *Clausius* schrittweise teils durch Symmetriebetrachtungen, teils durch Heranziehung von Erfahrungstatsachen, bei beständiger Zugrundelegung der unitarischen Auffassung. Indem er weiter das Energiegesetz zu Hülfe nimmt und verlangt, daß die bei der Bewegung zweier Teilchen während der Zeit dt geleistete Arbeit sich durch das negative Differential einer nur von den augenblicklichen Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten der Teilchen abhängigen Funktion darstellen lasse, erhält er für diese Funktion einen Ausdruck, der nur noch eine unbekannte Funktion R von r enthält, nämlich

$$(58) \qquad ee'\left\{\frac{1}{r}-\left(\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+\frac{d^2R}{ds\,ds'}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right\}.$$

$\sqrt{1/k}$ bedeutet hierin eine Geschwindigkeit. Die Form der Funktion R bleibt dabei unbekannt und ist durch die von *Clausius* benutzten Erfahrungstatsachen nicht zu bestimmen. Es steht daher frei, sie willkürlich zu wählen. Insbesondere schlägt *Clausius* vor, $R=0$ zu nehmen. Dann ergibt sich aus (58):

$$ee'\left(\frac{1}{r}-\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right).$$

Dieser Ausdruck zerlegt sich in zwei Teile: einen statischen, der der *Coulomb*'schen Kraftwirkung entspricht, und einen dynamischen, der als *Clausius*'sches Potential bekannt ist. Der letztere lautet

---

54) Vgl. dagegen *C. Neumann,* Leipz. Abh. 1876, p. 623, 639.

$$V = -\frac{kee'}{2r} \frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt}$$

oder nach einfacher Ausrechnung

$$(59) \qquad V = \frac{kee'}{r} \left(\frac{dx}{dt} \frac{dx'}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{dy'}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{dz'}{dt} \right)$$

oder auch

$$(60) \qquad V = \frac{kee'}{r} vv' \cos(v, v'),$$

wenn v und v' die (absoluten) Geschwindigkeiten der Teilchen e und e' bedeuten.

Man zeigt leicht, daß dieses Potential in der durch Gleichung (52) geforderten Weise mit dem *Neumann*'schen Potential zusammenhängt. Betrachtet man nämlich zwei Leiterelemente ds und ds' und nennt die in der Längeneinheit der Leiter enthaltenen positiven Elektrizitätsmengen e und e', die Geschwindigkeit ihrer Bewegung v_+, v'_+, während man entsprechend der unitarischen Auffassung für die in der Längeneinheit enthaltenen negativen Elektrizitätsmengen $-e$, $-e'$ andere Geschwindigkeiten v_-, v'_- annimmt, die im besonderen etwa gleich Null gesetzt werden können, so berechnet sich nach *Clausius* die Summe der Potentialwirkungen für die vier verschiedenen Kombinationen zwischen den in ds und ds' enthaltenen positiven und negativen Elektrizitätsmengen zu:

$$\sum V = \frac{kee'}{r} ds\,ds' \cos(ds, ds') (v_+ v'_+ + v_- v'_- + v_+ v'_- + v_- v'_+)$$
$$= \frac{kee'}{r} ds\,ds' (v_+ + v_-)(v'_+ + v'_-).$$

Nach der unitarischen Auffassung bedeuten aber die Produkte $e(v_+ + v_-)$ bezw. $e'(v'_+ + v'_-)$ direkt die den Querschnitt in der Zeiteinheit passierenden elektrostatisch gemessenen Elektrizitätsmengen oder die elektrostatischen Stromstärken. Man kann daher anstatt der vorigen Formel schreiben:

$$\sum V = \frac{k J(\text{stat})\, J'(\text{stat})}{r} ds\,ds' \cos(ds, ds').$$

Dies ist im wesentlichen das einzelne Integralelement des *Neumann*schen Potentials. Dehnt man die Summation auf alle möglichen Paare von Stromelementen innerhalb zweier geschlossener Ströme aus, so wird die so entstehende Gesamtsumme der *Clausius*'schen Potentialwirkungen, wie es Gl. (52) verlangt, gleich dem negativen Werte des *Neumann*'schen Potentials selbst.

Gleichzeitig ersieht man aus dem Vergleich der vorstehenden Formel mit der Gl. (32), daß $\sqrt{k}$ gleich dem Verhältnis der elektromagnetisch gemessenen zur elektrostatisch gemessenen Stromstärke

zu wählen ist, d. h. daß $\sqrt{k}$ die reziproke Lichtgeschwindigkeit bedeutet.

Die Übereinstimmung mit dem *Neumann*'schen Potential für geschlossene Ströme zeigt, daß die beobachtbaren Induktions- und ponderomotorischen Wirkungen nach *Clausius* richtig wiedergegeben werden. Es entsteht ferner die Frage, welches Elementargesetz der ponderomotorischen Wirkungen dem *Clausius*'schen Potential entspricht. Bei der Entscheidung derselben schließt sich *Clausius* dem Vorbilde *Riemann*'s an (vgl. Nr. 7). Man erhält nach Gl. (48), indem man unter V das *Clausius*'sche und unter U wieder das Potential der *Coulomb*schen Wirkung versteht:

$$\mathfrak{F}_x = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}.$$

Benutzt man für V den Ausdruck (59), so wird

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} = \frac{kee'}{r}\dot{x}',$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = kee'\frac{\partial 1/r}{\partial x}(\dot{x}\dot{x}' + \dot{y}\dot{y}' + \dot{z}\dot{z}') = kee'\frac{\partial 1/r}{\partial x}vv'\cos(v, v')$$

und

$$\mathfrak{F}_x = -ee'\frac{\partial 1/r}{\partial x}(1 - kvv'\cos(v, v')) - kee'\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}'}{r}. \tag{61}$$

Um von hier aus zu der Wirkung zweier Stromelemente ds, ds' überzugehen, verstehe man unter e, e' die in der Längeneinheit der beiden Leiter in jedem Augenblick enthaltenen positiven Elektrizitäten und denke sich mit *Clausius* in dem einen Elemente die Elektrizitätsmenge eds mit der Geschwindigkeit v, in dem anderen Element die Menge $e'ds'$ mit der Geschwindigkeit v' bewegt. Was die negativen Elektrizitätsmengen $-eds$, $-e'ds'$ betrifft, so ist es zwar nicht notwendig aber zulässig und der Einfachheit wegen zu empfehlen, diese als ruhend anzusehen. Die Gesamtwirkung ist dann gleich der algebraischen Summe derjenigen vier Terme, die man aus den vier verschiedenen Kombinationen $\pm eds$, $\pm e'ds'$ erhält. Der Ausdruck (61) entspricht dabei nach Vertauschung von ee' mit $eds\,e'ds'$ der Kombination $(+, +)$, während den übrigen Kombinationen die folgenden Ausdrücke entsprechen:

$$(+,\ -)\quad +eds\,e'ds'\frac{\partial 1/r}{\partial x},$$

$$(-,\ +)\quad +eds\,e'ds'\frac{\partial 1/r}{\partial x} + keds\,e'ds'\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}'}{r}\right),$$

$$(-,\ -)\quad -eds\,e'ds'\frac{\partial 1/r}{\partial x}.$$

In der Summe aller vier Kombinationen hebt sich die *Coulomb*'sche Wirkung heraus; setzt man in (61)

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}'}{r} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{x}'}{r}\right)\cdot\frac{ds}{dt} + \frac{d}{ds'}\left(\frac{\dot{x}'}{r}\right)\cdot\frac{ds'}{dt}$$

$$= \dot{x}'\frac{d\,1/r}{ds}v + \frac{d}{ds'}\left(\frac{\dot{x}'}{r}\right)\cdot v'$$

und entsprechend in der Kombination (—, +), da die negative Elektrizität als ruhend angesehen wird,

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}'}{r} = \frac{d}{ds'}\left(\frac{\dot{x}'}{r}\right)v',$$

so bleibt als Gesamtwirkung übrig:

$$\sum \mathfrak{F}_x = k e ds v e' ds' v' \frac{\partial\,1/r}{\partial x}\cos(v, v') - k e ds v e' ds' \dot{x}' \frac{d\,1/r}{ds}.$$

Hier kann man ähnlich wie oben die elektrostatisch gemessenen Stromstärken einführen, welche unter der Annahme ruhender negativer Elektrizität einfach gleich ev, $e'v'$ sind und von diesen durch Multiplikation mit $\sqrt{k} = 1/c$ zu den elektromagnetischen Stromstärken J, J' übergehen, wobei

$$(62)\qquad \sum \mathfrak{F}_x = JJ' ds ds' \left(\frac{\partial\,1/r}{\partial x}\cos(ds, ds') - \frac{d\,1/r}{ds}\cdot\frac{\dot{x}'}{v'}\right).$$

Wie *Clausius* betont, erhält man eben diesen Ausdruck für die Wirkung zweier Stromelemente auch dann, wenn man nicht von der Form (60), sondern von der allgemeineren, mit der willkürlichen Funktion R behafteten Form (58) des Potentials ausgeht, da sich bei der Summation die verschiedenen die Funktion R enthaltenden Terme aufheben.

Man kann schließlich, indem man die Differentiationen ausführt und die Komponenten der Linienelemente einführt, (62) umrechnen in

$$-JJ'\left(\frac{x-x'}{r^3}(dx dx' + dy dy' + dz dz') - \frac{x-x'}{r^3}dx dx' - \frac{y-y'}{r^3}dy dx' - \frac{z-z'}{r^3}dz dx'\right)$$

$$= -JJ' dy \frac{(x-x')dy' - (y-y')dx'}{r^3} + JJ' dz \frac{(z-z')dx' - (x-x')dz'}{r^3}.$$

Um dies übersichtlicher zu gestalten, führe man einen Vektor $\mathfrak{H}$ von den Komponenten

$$\mathfrak{H}_x = J'\frac{(z-z')dy' - (y-y')dz'}{r^3} \text{ etc.}$$

ein; man erhält dann

$$\sum \mathfrak{F}_x = J(dy\,\mathfrak{H}_z - dz\,\mathfrak{H}_y)$$

und entsprechende Ausdrücke für die Gesamtwirkung in der y- und z-Richtung. Mithin schreibt sich vektoriell:

$$(63)\qquad \sum \mathfrak{F} = J[ds \cdot \mathfrak{H}], \quad \mathfrak{H} = J' \frac{[\mathfrak{r} \cdot ds']}{r^3}.$$

Dies ist nach Gl. (35) genau der Ausdruck des *Graßmann'schen Elementargesetzes.*

Dasselbe, was früher vom *Graßmann*'schen Gesetz gesagt wurde, gilt auch von dem dasselbe verallgemeinernden *Clausius*'schen Potential: *Dieses wird nur bei der Annahme eines die Wirkung vermittelnden Zwischenmediums widerspruchsfrei verständlich.* Im *Clausius*'schen Potential kommen nämlich die *absoluten*, gegen den festen Raum oder, wie man sagen könnte, gegen den ruhenden Äther gemessenen Geschwindigkeiten v und v' vor, welche gegenstandslos sein müßten, sofern es sich um die direkte Wirkung des einen Teilchens auf das andere handelte, eine Wirkung, die lediglich durch die *relative* Lage und Geschwindigkeit der beiden Teilchen bestimmt sein könnte. Insofern gehören das *Clausius*'sche Potential und das *Graßmann*'sche Gesetz nicht nur der vorausgeschickten mathematischen Ableitung, sondern auch ihrer inneren Bedeutung nach zusammen.

Es wird hiernach verständlich, daß die Elektronentheorie, welche die Vorstellung eines ruhenden, die elektrischen Wirkungen übertragenden Äthers zu Grunde legt, im wesentlichen auf das *Clausius*'sche Potentialgesetz zurückführt, sofern man nämlich dieses nicht für punktförmige sondern für räumlich ausgedehnte Ladungen ausspricht (vgl. Anm. 50) und überdies die im *Clausius*'schen Gesetz vorkommende Entfernung r der beiden Ladungen nicht aus ihren gleichzeitigen Lagen bestimmt, sondern wie in der *Riemann*'schen Theorie (vgl. Gl. (43)) ersetzt durch die Entfernung $r(t, t')$, welche die von der einen Ladung zur Zeit t' ausgehende und mit Lichtgeschwindigkeit sich fortpflanzende Potentialwirkung zurückzulegen hat, um die andere Ladung zu der Zeit t zu treffen. In diesem Sinne abgeändert stimmt das *Clausius*'sche Potential im wesentlichen mit dem sog. *Vektorpotential der Elektronentheorie* überein, während andererseits das p. 46 genannte *Riemann*'sche Potential, wie erwähnt, mit dem *skalaren Potential* der Elektronentheorie zusammenfällt. Die drei Komponenten des Vektorpotentials der Elektronentheorie nach den Richtungen x, y, z erhält man, wenn man im *Clausius*'schen Potential die Geschwindigkeit v' der Reihe nach gleich der nach der x, y, z-Achse gerichteten Einheitsgeschwindigkeit setzt und $\mathfrak{e}' = 1$ nimmt.

Es möge schließlich noch das *Clausius*'sche Potentialgesetz hinsichtlich seiner Folgerungen mit dem Potential des *Weber*'schen Grundgesetzes und dem *Riemann*'schen Potential verglichen werden.

Wir hatten (s. Gl. (60), (44) und (38)) mit Rücksicht auf die Bedeutung der konstanten a und k:

$$V_{Cl} = \frac{\mathfrak{e}\mathfrak{e}'}{c^2 r} v v' \cos(v, v'), \quad V_R = -\frac{\mathfrak{e}\mathfrak{e}'}{2c^2 r} u^2, \quad V_W = -\frac{\mathfrak{e}\mathfrak{e}'}{2c^2 r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2.$$

An die Stelle des skalaren Produktes der absoluten Geschwindigkeiten bei *Clausius* tritt also bei *Riemann* das halbe negative Quadrat der relativen Geschwindigkeit, bei *Weber* das halbe negative Quadrat der Entfernungsgeschwindigkeit, welche letztere gleich der in die Richtung der Entfernung fallenden Komponente der Relativgeschwindigkeit ist. Ein Unterschied der drei Gesetze kann natürlich nur bei ungeschlossenen Strömen oder bei konvektiv bewegten elektrischen Mengen auftreten, da ja für geschlossene Ströme alle drei Gesetze mit dem *Neumann*schen Potentialgesetz zusammenfallen.

Der Unterschied zeigt sich am klarsten, wenn man zwei elektrische Massen $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}'$ auf einem Kreise an den Endpunkten eines Durchmessers mit gleichförmiger Geschwindigkeit herumführt. In diesem Falle ist

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad v = v', \quad \cos(v, v') = -1,$$

$$\dot{x} = -\dot{x}', \quad \dot{y} = -\dot{y}', \quad u^2 = 4v^2.$$

Mithin wird das *Clausius*'sche Potential:

$$V_{Cl} = -\frac{\mathfrak{e}\mathfrak{e}'}{r}\frac{v^2}{c^2},$$

das *Weber*'sche Potential:

$$V_W = 0,$$

das *Riemann*'sche Potential:

$$V_R = -\frac{2\mathfrak{e}\mathfrak{e}'}{r}\frac{v^2}{c^2}.$$

Es verhält sich also

$$V_W : V_{Cl} : V_R = 0 : 1 : 2.$$

Die Möglichkeit einer experimentellen Entscheidung zwischen den genannten drei Gesetzen hat u. a. *E. Budde*[55]) genau erörtert. Er kommt zu dem Resultat, daß in der Tat entscheidende Versuche möglich seien. Die besten sind folgende:

a) Ladung und Entladung eines metallischen Hohlkörpers, in dem ein Magnet an einem Kokonfaden so suspendiert ist, daß seine magnetische Achse vertikal hängt. Der Magnet erleidet nach *Clausius* keine Wirkung, nach *Weber* einen sehr schwachen, nach *Riemann* einen dreimal größeren rotatorischen Stoß.

b) Rotatorische Schwingungen eines möglichst großen isolierten Magneten um seine magnetische Achse und Ableitung desselben von

55) Ann. Phys. Chem. 30 (1887), p. 100.

dem Punkt, wo die Rotationsachse seine Oberfläche schneidet, in dem Augenblick, wo er seine Maximalgeschwindigkeit hat; wenn er zur Ruhe kommt, findet man ihn nach *Riemann* geladen, nach den beiden andern Gesetzen ungeladen.

Weniger gut, aber mit außerordentlichen Mitteln vielleicht noch durchführbar sind folgende Versuche:

c) Rotation einer stark elektrischen Scheibe wie bei dem *Rowland*'schen Versuche, während ein ruhender Drahtring so befestigt ist, dass seine Medianebene durch die Rotationsachse geht. Nach *Weber* entsteht in dem Ring ein stationärer Strom, nach den beiden andern Gesetzen nicht.

d) Rotation eines kreisförmigen Multiplikators entweder in einem magnetischen Feld oder mit einem Kommutator, der den im Ring fließenden galvanischen Strom nach jeder halben Drehung umkehrt. Die Achse der Drehung ist horizontal zu legen und es ist in derjenigen Horizontalebene, welche durch die Achse geht, ein fein suspendierter polarelektrischer Körper anzubringen. Nach *Weber* wird derselbe abgelenkt, nach *Riemann* und *Clausius* nicht.

Wie es scheint, sind derartige Versuche nie zur Ausführung gekommen. Der Grund hierfür mag zum Teil in ihrer experimentellen Schwierigkeit, zum Teil darin liegen, daß zu der Zeit, als sie vorgeschlagen wurden, auf Grund der *Maxwell*'schen Theorie den Physikern dringendere Aufgaben gestellt wurden.

Vom Standpunkte der heutigen Elektronentheorie würde man unter den elektrodynamischen Gesetzen dem *Graßmann*'schen, unter den Grundgesetzen dem *Clausius*'schen den Vorzug geben, nachdem man beide Gesetze noch durch die von *Gauß* postulierte und von *Maxwell* realisierte konstruierbare Vorstellung von der zeitlichen Ausbreitung der elektrischen Wirkungen ergänzt hat.

(Abgeschlossen im Dezember 1902.)

V 13. MAXWELLS ELEKTROMAGNETISCHE THEORIE.

Von

H. A. LORENTZ

IN LEIDEN.

Inhaltsübersicht.

I. Vorbereitende Begriffe und Rechnungsmethoden.

1. Einleitung.
2. Ponderabele Materie und Äther.
3. Mathematische Behandlungsweise und Bezeichnungen.
4. Hilfssätze aus der Vektorentheorie.

II. Die mathematische Formulierung der Maxwell'schen Theorie.

5. Die in den Feldgleichungen auftretenden Vektoren.
6. Die Hauptgleichungen.
7. Bemerkungen zu den angenommenen Einheiten.
8. Beziehungen zwischen den Zustandsgrößen an derselben Stelle.
9. Elektromotorische Kräfte.

III. Anwendung der Grundgleichungen.

10. Vergleichung der Theorie mit den Beobachtungen.
11. Elektrische Ladung.
12. Elektrostatik.
13. Elektrische Polarisation.
14. Konstante Ströme in Leitern.
15. Magnetismus. Magnetisierung.
16. Das magnetische Feld konstanter Ströme.
17. Zerlegung des elektrischen Stroms.
18. Der magnetische Strom und die unipolare Induktion. Dualität zwischen den elektrischen und den magnetischen Erscheinungen.
19. Permanente Magnete.
20. Versuche von *Blondlot.*
21. Fortpflanzung des Lichtes. Aberration.

IV. Allgemeine Folgerungen und Theoreme.

22. Energie. *Poynting*'scher Satz.
23. Ponderomotorische Kräfte.
24. Beispiele für die Bestimmung der ponderomotorischen Kräfte.
25. Bemerkung zur Definition der elektrischen und der magnetischen Kraft.
26. Bewegungen des Äthers.
27. Reziprozitäts- und Minimalsätze.

28. Vektorpotential der magnetischen Erregung.
29. Änderung der magnetischen Energie bei unendlich kleiner Änderung des elektrischen Stromes.
30. Elektrische und magnetische Erregungslinien.
31. Bewegung der Erregungslinien in einfachen Fällen.
32. Verschiedene Auffassungen der Hauptgleichungen.

V. Zusammenhang der Theorie mit den Prinzipien der Mechanik. Mechanische Analogien und Bilder.

33. Anwendung der Prinzipien der Mechanik.
34. Dynamische Theorie von *Maxwell.*
35. Allgemeine Betrachtungen.
36. Ableitung der zweiten Hauptgleichung.
37. Berechnung der ponderomotorischen Kräfte.
38. *Helmholtz'* Anwendung des Prinzips der kleinsten Wirkung.
39. Bemerkungen zu der Anwendung des Prinzips der kleinsten Wirkung.
40. Die Elektrizität als inkompressibele Flüssigkeit. *Maxwell's* Vorstellungen über den Mechanismus.
41. Verschiedener Charakter der elektrischen und der magnetischen Zustandsgrößen.
42. Anschluß an die Theorie elastischer Medien.
43. Thermodynamische Behandlung.

VI. Vergleichung von Fern- und Feldwirkungstheorien.

44. Fernwirkungstheorie von *Helmholtz.*
45. Verhältnis zwischen den Feldwirkungs- und den Fernwirkungstheorien.

Literatur.

(Zugleich für den folgenden Artikel V 14.)

M. Faraday, Experimental researches in electricity, 3 vol., London 1839—1855. Deutsche Übersetzung in Ostwald's Klassikern d. exakten Wiss., Nr. 81, Leipzig 1896.

W. Thomson, Reprint of papers on electrostatics and magnetism, London 1872.

J. Clerk Maxwell, On Faraday's lines of force (1855, 1856), Transactions of the Cambridge Phil. Soc. 10 (1864), p. 27 (Scientific papers, Cambridge, 1 (1890), p. 155). Deutsche Übersetzung in Ostwald's Klassikern, Nr. 69, Leipzig 1895.

— On physical lines of force, Phil. Mag. (4) 21 (1861), p. 161, 281, 338; 23 (1862), p. 12, 85 (Scientific papers 1, p. 451).

— A dynamical theory of the electromagnetic field, Transactions of the London Royal Soc. 155 (1865), p. 459 (Scientific papers 1, p. 526).

— A treatise on electricity and magnetism, 2 vol., Oxford, 1. ed. 1873, 2. ed. 1881, 3. ed. 1892.

H. Poincaré, Électricité et optique, Paris, 1. éd. 1890, 1891; 2. éd. 1901.

L. Boltzmann, Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Elektrizität und des Lichtes, 2 Teile, Leipzig 1891, 1893.

H. Hertz, Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft, Leipzig 1892.

O. Heaviside, Electrical papers, 2 vol., London 1892.

— Electromagnetic theory, 2 vol., London 1893, 1899.

H. A. Lorentz, La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants, Leiden 1892 (auch erschienen in Archives néerlandaises 25, p. 363).

— Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern, Leiden 1895.

J. J. Thomson, Notes on recent researches in electricity and magnetism, intended as a sequel to Prof. Clerk Maxwell's treatise on electricity and magnetism, Oxford 1893.

A. Föppl, Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektrizität, Leipzig 1894.

P. Drude, Physik des Äthers auf elektromagnetischer Grundlage, Stuttgart 1894.

R. Reiff, Theorie molekular-elektrischer Vorgänge, Freiburg i. Br. und Leipzig 1896.

A. Gray, A treatise on magnetism and electricity, 2 vol., London, vol. 1 1898.

E. Wiechert, Grundlagen der Elektrodynamik (in „Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmals in Göttingen"), Leipzig 1899.

J. Larmor, Aether and matter, a development of the dynamical relations of the aether to material systems on the basis of the atomic constitution of matter, including a discussion of the influence of the earth's motion on optical phenomena, Cambridge 1900.

G. T. Walker, Aberration and some other problems connected with the electromagnetic field, Cambridge 1900.

E. Cohn, Das elektromagnetische Feld. Vorlesungen über die Maxwell'sche Theorie, Leipzig 1900.

P. Duhem, Les théories électriques de J. Clerk Maxwell, étude historique et critique, Paris 1902.

Bezeichnungen.

Radiusvektor $\mathfrak{r}$; unendlich kleine Verrückung $\mathfrak{q}$; unendlich kleine Drehung $\mathfrak{u}$; Geschwindigkeit der Materie $\mathfrak{w}$; Lichtgeschwindigkeit im Äther c.

Elektrische Feldstärke oder elektrische Kraft $\mathfrak{E}$; elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}^e$ (in Leitern $\mathfrak{E}^{el}$, in Nichtleitern $\mathfrak{E}^{ev}$); totale elektrische Kraft $\mathfrak{E}^t$ ($\mathfrak{E}^{tl}$, $\mathfrak{E}^{tv}$); elektrischer Gesamtstrom $\mathfrak{C}$; Leitungsstrom $\mathfrak{J}$; Verschiebungsstrom $\mathfrak{V}'$ oder $\mathfrak{V}$; Konvektionsstrom $\mathfrak{K}$; Röntgenstrom $\mathfrak{R}$; Flächenstrom $\mathfrak{C}^\sigma$; elektrische Erregung $\mathfrak{D}$; elektrische Polarisation $\mathfrak{P}$.

Magnetische Feldstärke oder magnetische Kraft $\mathfrak{H}$; magnetische Erregung $\mathfrak{B}$; Magnetisierung $\mathfrak{M}$.

Elektrische Ladung e; elektrische Raumdichte ϱ; elektrische Flächendichte ω.

Magnetische Menge m; magnetische Raumdichte ϱ_m; magnetische Flächendichte ω_m.

Dielektrizitätskonstante ε; Leitfähigkeit σ; magnetische Permeabilität μ.

Skalares Potential der elektrischen Kraft φ; Vektorpotential der magnetischen Erregung $\mathfrak{A}$.

Elektrische Energie pro Volumeneinheit W_e; magnetische Energie pro Volumeneinheit W_m; *Joule*'sche Wärme pro Volumen- und Zeiteinheit Q; Energiefluß $\mathfrak{S}$; potentielle Energie U; kinetische Energie T.

Äußere ponderomotorische Kraft und äußeres ponderomotorisches Kräftepaar pro Volumeneinheit $\mathfrak{F}^e$, $\mathfrak{N}^e$; Spannungskomponenten X_x, X_y, u. s. w.

Zusammenstellung der in dem Artikel durch römische Ziffern hervorgehobenen wichtigsten Gleichungen.

Hauptgleichungen:

$$\text{(I)} \int \mathfrak{H}_s ds = \frac{1}{c}\int \mathfrak{C}_n d\sigma, \quad \text{oder} \quad \int \mathfrak{H}_s ds = \frac{1}{c}\left(\int \mathfrak{J}_n d\sigma + \frac{d}{dt}\int \mathfrak{D}_n d\sigma\right),$$

$$\text{(II)} \qquad \int \mathfrak{E}_s ds = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \mathfrak{B}_n d\sigma.$$

Dieselben Gleichungen in Differentialform:

$$\text{(I')} \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\,\mathfrak{C}, \quad \text{oder} \quad \operatorname{rot}\mathfrak{H} = \frac{1}{c}(\mathfrak{J} + \dot{\mathfrak{D}}),$$

$$\text{(II')} \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{B}}.$$

Zusammenhang zwischen elektrischer Erregung und Feldstärke im isotropen und anisotropen Medium bei eventuellem Vorhandensein einer elektromotorischen (eingeprägten Verschiebungs-) Kraft:

$$\text{(III)} \quad \mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}, \qquad \text{(III')} \quad \mathfrak{D} = (\varepsilon)\mathfrak{E},$$

$$\text{(III'')} \quad \mathfrak{D} = (\varepsilon)(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^{ev}), \quad \mathfrak{E} + \mathfrak{E}^{ev} = (\varepsilon')\mathfrak{D}.$$

Zusammenhang zwischen Leitungsstrom und elektrischer Feldstärke in isotropen und anisotropen Körpern bei eventueller Anwesenheit einer elektromotorischen (eingeprägten Leitungs-) Kraft:

$$\text{(IV)} \quad \mathfrak{J} = \sigma\mathfrak{E}, \qquad \text{(IV')} \quad \mathfrak{J} = (\sigma)\mathfrak{E},$$

$$\text{(IV'')} \quad \mathfrak{J} = (\sigma)(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^{el}), \quad \mathfrak{E} + \mathfrak{E}^{el} = (\sigma')\mathfrak{J}.$$

Zusammenhang zwischen magnetischer Erregung und Feldstärke im isotropen und anisotropen Medium:

$$\text{(V)} \quad \mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}, \qquad \text{(V')} \quad \mathfrak{B} = (\mu)\mathfrak{H}.$$

Beziehungen zwischen der elektrischen Erregung und der von einer Fläche umschlossenen elektrischen Ladung, bezw. der elektrischen Raum- und Flächendichte:

$$\text{(VI)} \quad e = \int \mathfrak{D}_n d\sigma, \qquad \text{(VI')} \quad \operatorname{div}\mathfrak{D} = \varrho, \qquad \text{(VI'')} \quad \mathfrak{D}_{nII} - \mathfrak{D}_{nI} = \omega.$$

Grundgleichungen der Elektrostatik:

$$\text{(VII)} \quad \int \mathfrak{E}_s ds = 0 \text{ (für jede geschlossene Linie)},$$

$$\text{(VII')} \quad \mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\varphi.$$

Definition der elektrischen Polarisation:

$$\text{(VIII)} \quad \mathfrak{P} = \mathfrak{D} - \mathfrak{E}, \qquad \mathfrak{D} = \mathfrak{E} + \mathfrak{P}.$$

Beziehungen zwischen der magnetischen Erregung und dem von einer Fläche umschlossenen Magnetismus, bezw. der magnetischen Raum- und Flächendichte:

$$\text{(IX)} \quad m = \int \mathfrak{B}_n d\sigma,$$

$$\text{(IX')} \quad \operatorname{div}\mathfrak{B} = \varrho_m, \qquad \text{(IX'')} \quad \mathfrak{B}_{nII} - \mathfrak{B}_{nI} = \omega_m.$$

Definition der Magnetisierung:

$$\text{(X)}\quad \mathfrak{M} = \mathfrak{B} - \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{H} + \mathfrak{M}.$$

Energiefluß:

$$\text{(XI)}\quad \mathfrak{S} = c[\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{H}].$$

Energiegleichung, für die Volumen- und die Zeiteinheit:

$$\text{(XII)}\quad (\mathfrak{E}^{el}\cdot\mathfrak{J}) + (\mathfrak{E}^{ev}\cdot\underline{\dot{\mathfrak{D}}}) = ((\sigma')\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{J}) + ((\varepsilon')\mathfrak{D}\cdot\underline{\dot{\mathfrak{D}}}) + (\mathfrak{H}\cdot\underline{\dot{\mathfrak{B}}}) + \operatorname{div}\mathfrak{S}.$$

Elektrische Energie pro Volumeinheit:

$$\text{(XIII)}\quad W_e = \tfrac{1}{2}((\varepsilon')\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{D}) = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}^{tv}\cdot\mathfrak{D}),$$

$$\text{(XIII')}\quad W_e = \tfrac{1}{2}(\varepsilon'_{11}\mathfrak{D}_x^2 + \text{u. s. w.} + 2\varepsilon'_{12}\mathfrak{D}_x\mathfrak{D}_y + \text{u. s. w.})$$

Magnetische Energie pro Volumeinheit:

$$\text{(XIV)}\quad W_m = \tfrac{1}{2}((\mu')\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{B}) = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{B}),$$

$$\text{(XIV')}\quad W_m = \tfrac{1}{2}(\mu'_{11}\mathfrak{B}_x^2 + \text{u. s. w.} + 2\mu'_{12}\mathfrak{B}_x\mathfrak{B}_y + \text{u. s. w.}).$$

Joule'sche Wärme pro Volumen- und Zeiteinheit:

$$\text{(XV)}\quad Q = ((\sigma')\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{J}) = \sigma'_{11}\mathfrak{J}_x^2 + \text{u. s. w.} + [\sigma'_{12} + \sigma'_{21}]\mathfrak{J}_x\mathfrak{J}_y + \text{u. s. w.}$$

Spannungen im elektromagnetischen Felde:

$$\text{(XVI)}\quad X_x = \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{E}_x^{tv}\mathfrak{D}_x - \mathfrak{E}_y^{tv}\mathfrak{D}_y - \mathfrak{E}_z^{tv}\mathfrak{D}_z\} + \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x - \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_y - \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_z\} + \left(\frac{\partial W_e}{\partial x_x}\right)_{\mathfrak{D}} + \left(\frac{\partial W_m}{\partial x_x}\right)_{\mathfrak{B}}, \text{ u. s. w.,}$$

$$\text{(XVII)}\quad \tfrac{1}{2}(X_y + Y_x) = \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{E}_x^{tv}\mathfrak{D}_y + \mathfrak{E}_y^{tv}\mathfrak{D}_x\} + \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_y + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_x\} + \left(\frac{\partial W_e}{\partial x_y}\right)_{\mathfrak{D}} + \left(\frac{\partial W_m}{\partial x_y}\right)_{\mathfrak{B}}, \text{ u. s. w.}$$

Zusammenhang zwischen der magnetischen Erregung und ihrem Vektorpotential:

$$\text{(XVIII)}\quad \int\mathfrak{A}_s\,ds = \int\mathfrak{B}_n\,d\sigma, \qquad \text{(XVIII')}\quad \mathfrak{B} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}.$$

Darstellung der elektrischen Kraft mittels des skalaren Potentials φ und des Vektorpotentials $\mathfrak{A}$ (für ruhende Körper):

$$\text{(XIX)}\quad \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{A}} - \operatorname{grad}\varphi.$$

I. Vorbereitende Begriffe und Rechnungsmethoden.

1. Einleitung. Die Ansicht, daß bei den elektromagnetischen Erscheinungen das zwischen den aufeinander wirkenden Körpern befindliche Medium mitspiele, wurde in konsequenter Weise zuerst von *Faraday* vertreten. *Clerk Maxwell* stellte sich die Aufgabe, die *Faraday*'schen Anschauungen in die übliche mathematische Sprache

einzukleiden; nach vielen Richtungen hin vervollkommnete er die Theorie und er. krönte dieselbe durch die Schöpfung der elektromagnetischen Theorie des Lichtes. Seinen Nachfolgern gelang es, einerseits durch experimentelle Arbeiten das Zutrauen zu den neuen Ideen zu verstärken und die Fruchtbarkeit derselben durch vielseitige Anwendungen darzutun, andererseits die Grundgedanken, klarer als *Maxwell* es getan hatte, hervortreten zu lassen.

Charakteristisch für die Feldwirkungstheorien ist die Annahme, daß sich die Wirkungen mit endlicher Geschwindigkeit fortpflanzen. Dem entspricht die Darstellung der Erscheinungen mittels Differentialgleichungen, welche die örtlichen und zeitlichen Änderungen der Zustandsgrößen miteinander verknüpfen. Gleichungen, welche nur Differentialquotienten nach den Koordinaten, nicht aber solche nach der Zeit enthalten, können, da sie einen Zusammenhang zwischen gleichzeitig an verschiedenen Stellen bestehenden Zuständen ausdrücken, auch in einer Fernwirkungstheorie auftreten[1]).

Dem Zwecke der Encyklopädie wird es am besten entsprechen und eine Übersicht über das ausgedehnte Gebiet wird sich am leichtesten ergeben[2]), wenn ein System von Feldgleichungen als Ausgangspunkt gewählt wird. Wir geben denselben im wesentlichen die von *Heaviside*[3]) und *Hertz*[4]) herrührende Form. Von einer Ableitung der

1) Vgl., was das Verhältnis zwischen den beiderlei Theorien anbetrifft, weiter unten, Nr. 45.

2) Leider ist es mir unmöglich gewesen, die umfangreiche Literatur so durchzuarbeiten und zu berücksichtigen, wie ich es gewünscht hätte. Ich fürchte, daß mir manche wichtige Arbeit unbekannt geblieben ist und daß ich viele andere nicht in gebührender Weise gewürdigt habe. Ich bitte den Leser sehr, diese Mängel zu entschuldigen.

Dem Redakteur des physikalischen Teiles der Encyklopädie, Herrn Prof. *Sommerfeld,* bin ich für das an meiner Arbeit genommene Interesse zu vielem Dank verpflichtet.

3) *O. Heaviside,* Electromagnetic induction and its propagation, The Electrician 1886, p. 219, 306 (Electrical papers 1, p. 429); On the forces, stresses and fluxes of energy in the electromagnetic field, Lond. Trans. 183, A (1892), p. 423. (Electrical papers 2, p. 521).

4) *H. Hertz*, Über die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper, Ann. Phys. Chem. 40 (1890), p. 577 (Untersuchungen u. s. w., p. 208); Über die Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper, Ann. Phys. Chem. 41 (1890), p. 369 (Untersuchungen u. s. w., p. 256). Auch *E. Cohn,* Zur Systematik der Elektrizitätslehre, Ann. Phys. Chem. 40 (1890), p. 625, hat für ruhende isotrope Körper Gleichungen von derselben Gestalt aufgestellt, in solcher Modifikation jedoch, daß nur „innere“ Konstanten der Körper auftreten, d. h. Konstanten, deren Werte in absoluten Einheiten völlig durch die Natur des Körpers bestimmt sind.

Gleichungen wird dabei zunächst kaum die Rede sein; es soll höchstens kurz angedeutet werden, in welcher Weise beobachtete Tatsachen und aus denselben gezogene Verallgemeinerungen zu den Formeln geführt haben. Später wird dann über ihre Deduktion aus irgend welchen Annahmen betreffend den Mechanismus der Erscheinungen zu berichten sein. Es empfiehlt sich dieser Weg auch aus dem Grunde, weil die Feldgleichungen, wenigstens in der für einfachere Fälle geltenden Gestalt, besser gesichert erscheinen als die Vorstellungen, mittels welcher man sie mit mehr oder weniger Glück zu begründen versucht hat.

2. Ponderabele Materie und Äther. Obgleich als *Feld* oft nur ein Teil des Raumes, z. B. bei elektrostatischen Erscheinungen der von Nichtleitern eingenommene Teil bezeichnet wird, so ist doch im allgemeinen der unendliche Raum darunter zu verstehen. Jeder Raumteil enthält entweder den Sinnen direkt zugängliche Materie, *ponderabele Materie,* oder *Äther;* es soll also angenommen werden, daß im Innern eines ponderabelen Körpers kein Hohlraum hergestellt werden kann, der nicht Äther enthielte. „Äther“ ist hierbei das genannt, was man sich, bei Abwesenheit ponderabeler Materie, als Träger der in den elektromagnetischen Feldgleichungen vorkommenden Zustandsgrößen vorstellt.

Wir betrachten sofort die Gleichungen für *bewegte* Körper; in denselben sind die für ruhende Systeme geltenden als Spezialfall enthalten. Mit „Bewegung“ ist hier zunächst die *sichtbare* Bewegung ponderabeler Körper gemeint. Außerdem werden wir in diesem Artikel mit *Hertz* die Möglichkeit zulassen, daß ähnliche Bewegungen, „Strömungen“ kann man sagen, auch im Äther, außerhalb der ponderabelen Körper bestehen können. Übrigens ist jedes Durcheinanderschieben zweier Teile der betrachteten Materie von seiner Theorie ausgeschlossen; es besteht also in jedem Punkte nur eine einzige Bewegungsgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$, die in den Punkten ponderabler Körper mit der sichtbaren Bewegung dieser Punkte zusammenfällt. Aus diesem Grunde, und weil jetzt, im Gegensatz zu der später zu behandelnden Elektronentheorie (V 14), auf jede molekulartheoretische Behandlung verzichtet werden soll, braucht auf die Frage, ob sich in den ponderabelen Körpern Äther befinde, nicht eingegangen zu werden; gleichwohl soll bisweilen der Äther in einem von ponderabeler Materie entblößten Raum als „freier“ Äther bezeichnet werden. Auch wird es in diesem Artikel bequem sein, das Wort „Materie“ sowohl auf die ponderabele Materie, wie auch auf den Äther anzuwenden.

Es ist noch zu bemerken, daß die *Hertz*'sche Theorie notwendiger-

weise Dichtigkeitsänderungen des Äthers — z. B. in einer sich zusammenziehenden Höhlung — zulassen muß. Nichtsdestoweniger werden die in Betracht kommenden Eigenschaften des Äthers als *unveränderlich* vorausgesetzt.

An geeigneter Stelle (Nr. **17**, **20**, **21**) sollen übrigens einige bei *bewegten* Systemen sich zeigende Erscheinungen erwähnt werden, welche die *Hertz*'sche Theorie nicht zu erklären vermag, und die zugunsten der im nächsten Artikel zu behandelnden Theorie sprechen.

3. Mathematische Behandlungsweise und Bezeichnungen. Wir betrachten in der allgemeinen Behandlung alle den Zustand der Materie bestimmenden Größen, auch die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$, als kontinuierlich von Punkt zu Punkt veränderlich; Fälle, in denen an gewissen Flächen die Stetigkeit unterbrochen ist, können in bekannter Weise als Grenzfälle aufgefaßt werden.

Die Normale n zu einer Fläche σ ziehen wir nach einer bestimmten Seite, die wir die positive nennen, hin; bei einer geschlossenen Fläche soll das die Außenseite sein. Die Werte irgend einer Größe an den beiden Seiten einer Fläche unterscheiden wir durch die Indices I und II; dabei soll sich der Index II auf die positive Seite beziehen. Mit h bezeichnen wir eine beliebige Richtung *in* der Fläche.

Wir wollen sagen, daß einer Rotation in einer Ebene eine bestimmte Richtung der Normale *entspreche*, und zwar soll das die Richtung nach derjenigen Seite sein, auf der sich ein Beobachter befinden muß, damit für ihn die Rotation in einer der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzten Richtung verlaufe. Die Drehungsrichtung bestimmt in diesem Falle zusammen mit der Normalenrichtung eine Rechtsschraube. Vgl. auch den vorigen Art. Nr. 2.

Bei einer Linie s wird eine bestimmte Richtung positiv genannt. Dabei beachten wir, wenn es sich um die Randlinie s einer Fläche σ handelt, folgende Regel: Ist P ein Punkt von σ in der unmittelbaren Nähe von s, und durchläuft ein zweiter Punkt Q den nächstliegenden Teil von s in der positiven Richtung, so soll der Rotation der Verbindungslinie PQ die Richtung der Normale zu σ im Punkte P entsprechen.

Kommen in einer Gleichung ein Flächenintegral und ein Linienintegral zusammen vor, so ist das so zu verstehen, daß das eine Integral sich auf eine begrenzte Fläche σ, und zwar, wenn das Gegenteil nicht gesagt wird, auf eine beliebige Fläche, das andere Integral aber auf die Randlinie dieser Fläche bezieht.

Die zueinander senkrechten Koordinatenachsen OX, OY, OZ wählen wir so, daß die Richtung von OZ einer Drehung um einen rechten Winkel von OX nach OY entspricht. Die Achsen nehmen (in diesem Artikel, mit einer einzigen Ausnahme, Nr. **21**) an der Bewegung der Materie *nicht* teil.

Vektoren bezeichnen wir mit großen oder kleinen deutschen Buchstaben, die Projektion auf irgend eine Richtung unterscheiden wir durch einen passenden, sich auf diese Richtung beziehenden Index. Z. B. bedeutet $\mathfrak{A}_n$ die Komponente des Vektors $\mathfrak{A}$ nach der Richtung der positiven Normale einer Fläche; ähnlich $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$ die Komponenten nach den Koordinatenachsen. Für die Größe eines Vektors $\mathfrak{A}$ soll das bei den komplexen Zahlen (zweidimensionalen Vektoren) übliche Zeichen des absoluten Betrages $|\mathfrak{A}|$ benutzt werden; in manchen Fällen, namentlich wenn es sich um die Größe eines Quadrates handelt, kann dieses Zeichen entbehrt werden, z. B. in dem Ausdruck der lebendigen Kraft eines mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ sich bewegenden Massenteilchens $\frac{1}{2} m \mathfrak{v}^2$.

Für $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ schreiben wir Δ, und wir benutzen auch häufig die drei Zeichen

$$\text{div}, \quad \text{rot}, \quad \text{grad},$$

von denen sich die beiden ersten auf einen Vektor, das letzte auf eine skalare Größe bezieht. Das Zeichen div $\mathfrak{A}$ (sprich *Divergenz von* $\mathfrak{A}$) bedeutet die skalare Größe

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z};$$

sie wird unabhängig vom Koordinatensystem definiert als Grenzwert, dem die Größe $\frac{1}{S}\int \mathfrak{A}_n d\sigma$, berechnet für eine den Raum S umschließende geschlossene Fläche σ, zustrebt, wenn man σ auf einen Punkt zusammenzieht. Unter rot $\mathfrak{A}$ (sprich *Rotation von* $\mathfrak{A}$) verstehen wir den Vektor mit den Komponenten

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y}.$$

Unabhängig vom Koordinatensystem läßt sich rot $\mathfrak{A}$ durch den Grenzwert definieren, dem die Größe $\frac{1}{\sigma}\int \mathfrak{A}_s ds$, berechnet für eine die Fläche σ begrenzende ebene geschlossene Kurve s, zustrebt, wenn man s auf einen Punkt zusammenzieht; dieser Grenzwert gibt die Kom ponente von rot $\mathfrak{A}$ nach der auf der Ebene von s senkrechten Rich-

tung, welche dem bei der Integration gewählten Durchlaufungssinne von s entspricht. Endlich verstehen wir unter grad φ (sprich *Gradient* von φ) den Vektor mit den Komponenten

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Er kann unabhängig vom Koordinatensystem mit Hilfe der Flächen $\varphi =$ konst. definiert werden und stimmt der Richtung nach mit den Normalen jener Flächen, der Größe nach mit $\partial \varphi / \partial n$ überein.

Nachweise über die erste Einführung dieser Bezeichnungen und über gleichbedeutende abweichende Benennungen findet man in Art. IV 14, Nr. 4 und 5. Die Definition von grad φ haben wir entsprechend dem Wortsinne von Gradient so gewählt, daß grad φ den Anstieg, nicht das Gefälle von φ angibt.

Bei verschwindender Divergenz sagt man von einem Vektor, daß er quellenfrei oder solenoidal, bei verschwindender Rotation, daß er wirbelfrei, lamellar oder irrotationell verteilt sei.

Für das skalare Produkt zweier Vektoren wird die Bezeichnung

$$(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}),$$

und für das Vektorprodukt das Zeichen

$$[\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}]$$

angewandt. Das skalare Produkt ist das Produkt aus der Größe von $\mathfrak{A}$ in die senkrechte Projektion von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{A}$, ist also gleich

$$|\mathfrak{A}| \, |\mathfrak{B}| \cos(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}).$$

Das Vektorprodukt ist ein Vektor, dessen Größe durch den Inhalt des auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beschriebenen Parallelogramms gegeben wird und dessen Richtung senkrecht steht auf der durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gelegten Ebene, und zwar so, daß sie einer Rotation um weniger als 180^0 entspricht, durch welche die Richtung von $\mathfrak{A}$ in die Richtung von $\mathfrak{B}$ übergeführt wird. Die Komponenten von $[\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}]$ sind

$$\mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_z - \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_y, \quad \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_x - \mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_z, \quad \mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_y - \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_x.$$

Auch bei den mit dem Zeichen „rot“ oder „grad“ angedeuteten Vektoren, sowie im Fall eines Vektorprodukts, dienen angehängte Indices zur Bezeichnung der Komponenten.

Es sollen vielfach Vektorgleichungen benutzt werden, mitunter aber auch statt *einer* Vektorgleichung drei sich je auf eine der Koordinatenachsen beziehende Formeln. Gehen drei derartige Gleichungen oder Größen durch cyklische Vertauschung der Buchstaben und Indices ineinander über, so kann man sich darauf beschränken, nur die

erste hinzuschreiben und die beiden anderen durch ein „u. s. w." oder durch ... anzudeuten.

Wenn von einem begrenzten Raum S, einer Fläche σ, einer Linie s oder von Elementen dS, $d\sigma$, ds die Rede ist, so denken wir uns (in *diesem* Artikel) diese Gebilde als *fest mit der Materie verbunden und der Bewegung derselben folgend;* wir reden, um das anzugeben, von „substantiellen" Räumen, Flächen u. s. w. Die zeitliche Änderung einer auf ein substantielles Gebilde oder auf einen substantiellen Punkt sich beziehenden Größe bezeichnen wir mit $\frac{d}{dt}$.

In den Differentialgleichungen dagegen treten als unabhängige Variabele neben der Zeit t die Koordinaten x, y, z eines festen Punktes auf; es ist daher bei den Differentialquotienten

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}$$

einer skalaren Größe φ oder eines Vektors $\mathfrak{A}$ an einen festen Punkt (x, y, z) zu denken. Für *diese* Differentialquotienten schreiben wir auch

$$\dot{\varphi}, \dot{\mathfrak{A}}.$$

Mit der Schreibweise

$$\mathfrak{A} = (\nu)\mathfrak{B} \tag{1}$$

soll angedeutet werden, daß $\mathfrak{A}$ eine lineare Vektorfunktion von $\mathfrak{B}$ ist; diese Gleichung steht also statt der drei Gleichungen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_x &= \nu_{11}\mathfrak{B}_x + \nu_{12}\mathfrak{B}_y + \nu_{13}\mathfrak{B}_z, \\
\mathfrak{A}_y &= \nu_{21}\mathfrak{B}_x + \nu_{22}\mathfrak{B}_y + \nu_{23}\mathfrak{B}_z, \\
\mathfrak{A}_z &= \nu_{31}\mathfrak{B}_x + \nu_{32}\mathfrak{B}_y + \nu_{33}\mathfrak{B}_z,
\end{aligned}$$

in welchen die ν Konstanten sind. Für die Umkehrung von (1) möge

$$\mathfrak{B} = (\nu')\mathfrak{A}$$

geschrieben werden.

Schließlich setzen wir noch fest, daß alle Größen, welche die Abweichung vom natürlichen Zustande der betrachteten Systeme bestimmen, entweder nur in einem endlichen Raum von Null verschieden sind, oder jedenfalls bei wachsender Entfernung so rasch abnehmen, daß die etwa bei partiellen Raumintegrationen auftretenden Integrale über die „unendlich entfernte Grenzfläche des Raumes" verschwinden.

4. Hilfssätze aus der Vektorentheorie. Obwohl die folgenden Sätze zum Teil neu sein dürften[5]), wird es genügen, den Beweis nur kurz anzudeuten.

---

5) Es finden sich Formeln, die mit einigen der hier anzuführenden gleichbedeutend sind, bei verschiedenen Autoren.

a) Von einem Punkte P aus ziehen wir drei beliebige Geraden PS_1, PS_2, PS_3, deren Richtungen wir s_1, s_2, s_3 nennen, und einen beliebigen Vektor $\mathfrak{A}$. Wird dieser mittels eines schiefwinkligen Parallelepipeds nach s_1, s_2, s_3 zerlegt, so sollen die Komponenten $\mathfrak{A}^{s_1}$, $\mathfrak{A}^{s_2}$, $\mathfrak{A}^{s_3}$ heißen. Andererseits bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}_{s_1}$, $\mathfrak{A}_{s_2}$, $\mathfrak{A}_{s_3}$ die senkrechten Projektionen des Vektors auf PS_1, PS_2, PS_3. Wenn nun $\mathfrak{B}$ ein beliebiger zweiter Vektor ist, dann besteht die Beziehung

$$(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}) = \mathfrak{A}_{s_1}\mathfrak{B}^{s_1} + \mathfrak{A}_{s_2}\mathfrak{B}^{s_2} + \mathfrak{A}_{s_3}\mathfrak{B}^{s_3}.$$

Zum Beweise projiziere man den aus $\mathfrak{B}^{s_1}$, $\mathfrak{B}^{s_2}$, $\mathfrak{B}^{s_3}$ bestehenden Linienzug senkrecht auf die Richtung von $\mathfrak{A}$. Man erhält so:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}) &= |\mathfrak{A}|\ |\mathfrak{B}| \cos(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \\ &= |\mathfrak{A}|\ \{\mathfrak{B}^{s_1} \cos(\mathfrak{A}, s_1) + \mathfrak{B}^{s_2} \cos(\mathfrak{A}, s_2) + \mathfrak{B}^{s_3} \cos(\mathfrak{A}, s_3)\} \\ &= \mathfrak{A}_{s_1}\mathfrak{B}^{s_1} + \mathfrak{A}_{s_2}\mathfrak{B}^{s_2} + \mathfrak{A}_{s_3}\mathfrak{B}^{s_3}.\end{aligned}$$

b) Es seien ds_1, ds_2, ds_3 unendlich kleine von P aus in den Richtungen s_1, s_2, s_3 gezogene Strecken, dS der Inhalt des auf denselben beschriebenen Parallelepipeds, $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$ die Größen der in P zusammenstoßenden Seitenflächen, sodaß $d\sigma_1$ die Strecken ds_2 und ds_3 zu Seiten hat, u. s. w.; ferner seien n_1, n_2, n_3 die Normalen zu $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$, in solchen Richtungen gezogen, daß die Winkel (n_1, s_1), (n_2, s_2), (n_3, s_3) spitz sind, und dn_1, dn_2, dn_3 diejenigen Stücke dieser Normalen, welche zwischen je zwei Gegenflächen des Parallelepipeds enthalten sind. Es ist sodann

$$(2)\qquad (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B})\,dS = \mathfrak{A}_{s_1}ds_1 \cdot \mathfrak{B}_{n_1}d\sigma_1 + \mathfrak{A}_{s_2}ds_2 \cdot \mathfrak{B}_{n_2}d\sigma_2 + \mathfrak{A}_{s_3}ds_3 \cdot \mathfrak{B}_{n_3}d\sigma_3.$$

Dies ergibt sich aus der Gl. a) mit Rücksicht darauf, daß

$$\mathfrak{B}^{s_1}dn_1 = \mathfrak{B}_{n_1}ds_1 \quad \text{u. s. w.}$$

c) Die Punkte einer Raumfigur in dem Felde eines Vektors $\mathfrak{A}$ mögen die unendlich kleinen, sich kontinuierlich von Punkt zu Punkt ändernden Verrückungen $\mathfrak{q}$ erleiden. Wir verstehen unter ds, $d\sigma$, dS Elemente, die an diesen Verrückungen teilnehmen. Der Vektor $\mathfrak{A}$ erleide unendlich kleine Veränderungen, gänzlich unabhängig von den Verrückungen $\mathfrak{q}$. Mit einem vorgesetzten δ bezeichnen wir die wirkliche Anderung einer Größe, die sich auf einen an der Verrückung teilnehmenden Punkt, auf ein ds, ein $d\sigma$ oder ein dS bezieht, mit δ_0 aber die Änderung einer Größe in einem festen Raumpunkte.

Wir betrachten für ein ursprünglich am Punkte P liegendes Flächenelement $d\sigma$ die Änderung von $\mathfrak{A}_n d\sigma$. Es läßt sich in P ein von der Stellung und der Größe von $d\sigma$ unabhängiger Vektor $\underline{\delta\mathfrak{A}}$ angeben, derart daß

$$(3)\qquad \delta\{\mathfrak{A}_n d\sigma\} = \underline{\delta\mathfrak{A}}_n d\sigma.$$

Ebenso führt die Betrachtung der Änderung von $\mathfrak{A}_s ds$ für ein ursprünglich an P liegendes Linienelement auf einen Vektor $\underline{\underline{\delta \mathfrak{A}}}$, von solcher Größe und Richtung, daß für jedes ds

(4) $$\delta\{\mathfrak{A}_s ds\} = \underline{\underline{\delta \mathfrak{A}}}_s ds.$$

Dabei ist

(5) $$\underline{\delta \mathfrak{A}} = \delta_0 \mathfrak{A} + \operatorname{div} \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{q} + \operatorname{rot} [\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{q}],$$

(6) $$\underline{\underline{\delta \mathfrak{A}}} = \delta_0 \mathfrak{A} + \operatorname{grad} (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{q}) - [\mathfrak{q} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{A}].$$

Zum Beweise sehe man zunächst von der selbständigen Änderung $\delta_0 \mathfrak{A}$ von $\mathfrak{A}$ ab und betrachte im ersten Falle das cylindrische Volumelement dS, welches zu Grundflächen das ursprüngliche und das verschobene $d\sigma$ besitzt und dessen Mantel aus den Verrückungsvektoren $\mathfrak{q}$ gebildet wird. Man berechne nun, über die Oberfläche dieses Volumelementes erstreckt:

$$\int \mathfrak{A}_n d\sigma = dS \cdot \operatorname{div} \mathfrak{A}.$$

Die rechte Seite ist gleich $d\sigma \cdot \mathfrak{q}_n \operatorname{div} \mathfrak{A}$, wenn $d\sigma$ die am Punkte P gelegene Grundfläche des Volumelementes ist, und wenn wir zunächst annehmen, daß die bereits gewählte positive Richtung der Normale n zu dieser Grundfläche einen spitzen Winkel mit $\mathfrak{q}$ bildet. Auf der linken Seite berechne man das Integral für die beiden Grundflächen und den Mantel des Cylinders einzeln. In der Summe für beide Grundflächen erhält man $\delta\{\mathfrak{A}_n d\sigma\}$. Das über den Mantel erstreckte Integral besteht aus Elementen der Form:

$$(\mathfrak{A} \cdot [ds \cdot \mathfrak{q}]) = (ds \cdot [\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{A}]) = ds \cdot [\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{A}]_s,$$

wo ds ein Element der Randlinie von $d\sigma$ bedeutet, welches in dem der Normalen n entsprechenden Sinne positiv gerechnet wird. Deshalb wird jenes Oberflächenintegral über den Mantel gleich dem Linienintegral über diese Randlinie

$$\int ds [\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{A}]_s = d\sigma \cdot \operatorname{rot}_n [\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{A}].$$

Es ergibt sich daher:

$$\delta\{\mathfrak{A}_n d\sigma\} + d\sigma \cdot \operatorname{rot}_n [\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{A}] = d\sigma \cdot \mathfrak{q}_n \operatorname{div} \mathfrak{A}.$$

Fügt man hier rechter Hand den der Änderung $\delta_0 \mathfrak{A}$ entsprechenden Teil von $\delta\{\mathfrak{A}_n d\sigma\}$, d. h. $d\sigma \cdot (\delta_0 \mathfrak{A})_n$ hinzu, und dividiert man die Gleichung mit $d\sigma$, so erhält man Gl. (5). Daß man zu demselben Resultat gelangt, wenn n mit $\mathfrak{q}$ einen stumpfen Winkel bildet, sieht man leicht ein.

Um die zweite Formel zu beweisen, betrachte man das Viereck $d\sigma$, welches das ursprüngliche, das verschobene ds und die beiden Ver-

schiebungsvektoren in den Endpunkten von ds zu Seiten hat. Über den Umfang dieses Vierecks erstrecke man das Integral:

$$\int \mathfrak{A}_s ds = d\sigma \cdot \mathrm{rot}_n \mathfrak{A},$$

wo n die Richtung senkrecht zur Fläche des Vierecks nach der dem Integrationssinne entsprechenden Seite bedeutet. Diesen Integrationssinn wähle man so, daß das ursprüngliche Linienelement ds in der Richtung von seinem Endpunkte nach seinem Anfangspunkte durchlaufen wird. Die rechte Seite ist nun gleich

$$ds \cdot \mathfrak{q}_\nu \mathrm{rot}_n \mathfrak{A} = - ds \cdot [\mathfrak{q} \cdot \mathrm{rot}\, \mathfrak{A}]_s,$$

wo ν das in der Ebene des Vierecks auf ds errichtete Lot bedeutet, welches mit $\mathfrak{q}$ einen spitzen Winkel einschließt. Die linke Seite berechne man für die beiden Paare gegenüberliegender Seiten des Vierecks einzeln. Für das ursprüngliche und das verschobene ds erhält man in der Summe $\delta\{\mathfrak{A}_s ds\}$; die beiden anderen Seiten liefern die Beiträge $\mathfrak{q}\mathfrak{A}_\mathfrak{q} = (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{q})$, das eine Mal mit dem positiven, das andere Mal mit dem negativen Vorzeichen; die Summe dieser Beiträge ist

$$- ds \cdot \frac{\partial}{\partial s}(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{q}) = - ds \cdot \mathrm{grad}_s (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{q}).$$

Es ergibt sich daher

$$\delta\{\mathfrak{A}_s ds\} - ds \cdot \mathrm{grad}_s (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{q}) = - ds [\mathfrak{q} \cdot \mathrm{rot}\, \mathfrak{A}]_s.$$

Fügt man hier rechter Hand den der Änderung $\delta_0 \mathfrak{A}$ entsprechenden Teil von $\delta\{\mathfrak{A}_s ds\}$, d. h. $ds \cdot (\delta_0 \mathfrak{A})_s$ hinzu, und dividiert man mit ds, so findet man Gl. (6).

d) Aus (2) folgt

$$\delta\{(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}) dS\} = \mathfrak{A}_{s_1} ds_1 \cdot \underline{\delta \mathfrak{B}}_{n_1} d\sigma_1 + \text{u.s.w.} + \underline{\underline{\delta \mathfrak{A}}}_{s_1} ds_1 \cdot \mathfrak{B}_{n_1} d\sigma_1 + \text{u.s.w.},$$

also, wenn man auf der rechten Seite wieder (2) anwendet,

$$\delta\{(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}) dS\} = \{(\mathfrak{A} \cdot \underline{\delta \mathfrak{B}}) + (\underline{\underline{\delta \mathfrak{A}}} \cdot \mathfrak{B})\} dS. \tag{7}$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß diese Gleichung auch dann gilt, wenn dS ein beliebig gestaltetes Volumelement bedeutet.

e) Besteht zwischen zwei Vektoren die Relation

$$\mathrm{rot}\, \mathfrak{A} = \mathfrak{B}, \tag{8}$$

so folgt aus (5) und (6)

$$\mathrm{rot}\, \underline{\underline{\delta \mathfrak{A}}} = \delta_0 \mathfrak{B} + \mathrm{rot}\, [\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{q}] = \underline{\delta \mathfrak{B}}. \tag{9}$$

In der Tat gilt für jeden Vektor $\mathfrak{A}$ und jeden Skalar φ:

$$\mathrm{div}\, \mathrm{rot}\, \mathfrak{A} = 0, \quad \mathrm{rot}\, \mathrm{grad}\, \varphi = 0.$$

f) Wenn *vor* den besprochenen Verrückungen und Änderungen

im Punkte P der Vektor $\mathfrak{A}$ und *nach* denselben im verschobenen Punkte P' der Vektor $\mathfrak{A}'$ besteht, und wenn weiter $\mathfrak{A}''$ der Vektor ist, in den $\mathfrak{A}$ übergegangen wäre, wenn er sich, ohne die Größe zu ändern, mit einem um P liegenden Raumelemente verschoben und zu gleicher Zeit die Drehung $\frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathfrak{q}$ dieses Elementes mitgemacht hätte, dann können wir $\mathfrak{A}' - \mathfrak{A}''$ die *relative* Variation $\delta_r\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{A}$ in Bezug auf das sich drehende Raumelement nennen.

g) Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial x} = x_x, \quad \text{u. s. w.}; \quad \frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{q}_y}{\partial x} = x_y = y_x, \quad \text{u. s. w.},$$

(unendlich kleine Dehnungen und Schiebungen), so ist

$$(10)\qquad \underline{\delta\mathfrak{A}}_x = \delta_r\mathfrak{A}_x + (y_y + z_z)\,\mathfrak{A}_x - \tfrac{1}{2}x_y\mathfrak{A}_y - \tfrac{1}{2}x_z\mathfrak{A}_z, \quad \text{u. s. w.},$$

$$(11)\qquad \underline{\underline{\delta\mathfrak{A}}}_x = \delta_r\mathfrak{A}_x + x_x\mathfrak{A}_x + \tfrac{1}{2}x_y\mathfrak{A}_y + \tfrac{1}{2}x_z\mathfrak{A}_z, \quad \text{u. s. w.}$$

Zum Beweise benutze man die Gleichungen

$$\mathfrak{A}_x' - \mathfrak{A}_x = \delta_0\mathfrak{A}_x + \mathfrak{q}_x\frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial x} + \mathfrak{q}_y\frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial y} + \mathfrak{q}_z\frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial z}$$

und

$$\mathfrak{A}_x'' - \mathfrak{A}_x = -\frac{1}{2}\operatorname{rot}_z\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{A}_y + \frac{1}{2}\operatorname{rot}_y\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{A}_z$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathfrak{q}_y}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{q}_x}{\partial y}\right)\mathfrak{A}_y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathfrak{q}_x}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{q}_z}{\partial x}\right)\mathfrak{A}_z.$$

Indem man diese voneinander subtrahiert, erhält man

$$\delta_r\mathfrak{A}_x = \mathfrak{A}_x' - \mathfrak{A}_x'' = \delta_0\mathfrak{A}_x + \mathfrak{q}_x\frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial x} + \mathfrak{q}_y\frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial y} + \mathfrak{q}_z\frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial z}$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathfrak{q}_y}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{q}_x}{\partial y}\right)\mathfrak{A}_y - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathfrak{q}_x}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{q}_z}{\partial x}\right)\mathfrak{A}_z,$$

und man gelangt zu (10) und (11), wenn man auch die Gleichungen (5) und (6) speziell für die x-Richtung hinschreibt.

h) Ähnliches wie von den Variationen in einer sich verrückenden Raumfigur gilt von den zeitlichen Änderungen in einer sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ bewegenden Figur. Wir bezeichnen mit $\underline{d\mathfrak{A}}$, $\underline{\underline{d\mathfrak{A}}}$, $d_r\mathfrak{A}$ die in dem Zeitelement dt stattfindenden Variationen $\underline{\delta\mathfrak{A}}$, $\underline{\underline{\delta\mathfrak{A}}}$, $\delta_r\mathfrak{A}$ und definieren drei neue Vektoren $\underline{\dot{\mathfrak{A}}}$, $\underline{\underline{\dot{\mathfrak{A}}}}$, $\dot{\mathfrak{A}}_{(r)}$ mittels der Gleichungen

$$\frac{\underline{d\mathfrak{A}}}{dt} = \underline{\dot{\mathfrak{A}}}, \quad \frac{\underline{\underline{d\mathfrak{A}}}}{dt} = \underline{\underline{\dot{\mathfrak{A}}}}, \quad \frac{d_r\mathfrak{A}}{dt} = \dot{\mathfrak{A}}_{(r)}.$$

Weiter setzen wir

$$\frac{\partial\mathfrak{w}_x}{\partial x} = \dot{x}_x, \quad \text{u. s. w.}; \quad \frac{\partial\mathfrak{w}_x}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{w}_y}{\partial x} = \dot{x}_y = \dot{y}_x, \quad \text{u. s. w.}$$

Dann ist in genauer Analogie mit dem Vorhergehenden

$$(12)\qquad \frac{d}{dt}\{\mathfrak{A}_n d\sigma\} = \underline{\dot{\mathfrak{A}}}_n d\sigma,$$

$$(13)\qquad \frac{d}{dt}\{\mathfrak{A}_s ds\} = \underline{\underline{\dot{\mathfrak{A}}}}_s ds,$$

$$(14)\qquad \underline{\dot{\mathfrak{A}}} = \dot{\mathfrak{A}} + \operatorname{div}\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{w} + \operatorname{rot}[\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{w}],$$

$$(15)\qquad \underline{\underline{\dot{\mathfrak{A}}}} = \dot{\mathfrak{A}} + \operatorname{grad}(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{w}) - [\mathfrak{w}\cdot\operatorname{rot}\mathfrak{A}],$$

$$(16)\qquad \frac{d}{dt}\{(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B})dS\} = \{(\mathfrak{A}\cdot\underline{\dot{\mathfrak{B}}}) + (\underline{\underline{\dot{\mathfrak{A}}}}\cdot\mathfrak{B})\}\,dS,$$

und, wenn (8) gilt,

$$(17)\qquad \operatorname{rot}\underline{\underline{\dot{\mathfrak{A}}}} = \dot{\mathfrak{B}} + \operatorname{rot}[\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{w}] = \underline{\dot{\mathfrak{B}}};$$

ferner

$$(18)\qquad \underline{\dot{\mathfrak{A}}}_x = \dot{\mathfrak{A}}_{(r)x} + (\dot{y}_y + \dot{z}_z)\mathfrak{A}_x - \tfrac{1}{2}\dot{x}_y\mathfrak{A}_y - \tfrac{1}{2}\dot{x}_z\mathfrak{A}_z, \quad \text{u. s. w.},$$

$$(19)\qquad \underline{\underline{\dot{\mathfrak{A}}}}_x = \dot{\mathfrak{A}}_{(r)x} + \dot{x}_x\mathfrak{A}_x + \tfrac{1}{2}\dot{x}_y\mathfrak{A}_y + \tfrac{1}{2}\dot{x}_z\mathfrak{A}_z, \quad \text{u. s. w.}$$

Falls der Vektor $\mathfrak{A}$ zur Zeit t_0 verschwindet, ist (12) gleichbedeutend mit

$$(20)\qquad \mathfrak{A}_n d\sigma\,|_t = \int_{t_0}^{t}\underline{\dot{\mathfrak{A}}}_n d\sigma\cdot dt.$$

Bei Anwendung der obigen Sätze soll in den meisten Fällen für die Raumfigur, von der die Rede war, das System der substantiellen Punkte (Nr. 3) der Materie genommen werden.

II. Die mathematische Formulierung der Maxwell'schen Theorie.

5. Die in den Feldgleichungen auftretenden Vektoren. Diese sind: die *elektrische Feldstärke* oder *elektrische Kraft* $\mathfrak{E}$, die *magnetische Feldstärke* oder *magnetische Kraft* $\mathfrak{H}$, der *elektrische Gesamtstrom* $\mathfrak{C}$, der *Leitungsstrom* $\mathfrak{J}$, der *Verschiebungsstrom* $\mathfrak{V}'$, die *elektrische Erregung* $\mathfrak{D}$, die *magnetische Erregung* $\mathfrak{B}$.

Zur vorläufigen Orientierung möge folgendes dienen:

a) Als Maß für die elektrische Feldstärke in einem Punkte des freien Äthers wählen wir die durch e dividierte Kraft, welche auf einen daselbst befindlichen, unendlich kleinen, mit der unendlich kleinen elektrischen Ladung e versehenen und der Bewegung des Äthers folgenden Körper wirkt. Die Einheit für e (und für elektrische Ladungen überhaupt) setzen wir in der Weise fest, daß die Abstoßung zwischen zwei um r von einander entfernten, in ruhendem Äther eingelagerten Körpern mit den Ladungen e und e' durch $\frac{ee'}{4\pi r^2}$ gegeben wird[6].

6) Siehe über die Wahl der Einheiten Nr. 7.

b) Als Maß für die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ in einem Punkte des Äthers wählen wir die durch m dividierte Kraft, welche auf einen daselbst befindlichen, an der Bewegung des Äthers teilnehmenden Magnetpol von der unendlich kleinen Stärke m ausgeübt wird, und zwar soll diese Stärke in einer solchen Einheit ausgedrückt werden, daß zwei in dem ruhenden Äther liegende Magnetpole m und m' sich in der Entfernung r mit der Kraft $\frac{mm'}{4\pi r^2}$ abstoßen[7]).

Wenn von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ im Innern eines ponderabelen Körpers die Rede ist, so ist dabei wiederum an die auf die Einheit der Ladung oder auf einen Magnetpol von der Stärke Eins wirkende Kraft zu denken; eine genaue Festsetzung kann jedoch erst später gegeben werden (Nr. **10**).

Übrigens ist mit $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ die Vorstellung gewisser Zustände der Materie zu verbinden, die eben eine auf einen elektrisierten Körper oder einen Magnetpol wirkende Kraft zur Folge haben. Diese Auffassung kommt in den Benennungen „elektrische“ und „magnetische Feldstärke“ zum Ausdruck.

Bei den Bezeichnungen „elektrische“ und „magnetische Kraft“ ist zu beachten, daß $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ nicht die Dimensionen einer Kraft, sondern einer „Kraft pro Ladungseinheit“ haben.

c) Der Begriff des in leitenden Körpern unter geeigneten Bedingungen bestehenden elektrischen Stromes $\mathfrak{J}$ ist von der Elementarphysik her bekannt, und es braucht hier auch kaum an die bildliche Redeweise erinnert zu werden, nach welcher in einem Körper, der Sitz eines Stromes ist, eine Fläche σ *von einer Elektrizitätsmenge durchströmt* wird, die für die Zeiteinheit durch das Integral

$$\int \mathfrak{J}_n d\sigma \tag{21}$$

gegeben wird. Ihre Rechtfertigung findet diese Ausdrucksweise, die man nach *Hertz*'scher Auffassung auf *substantielle* Flächen (Nr. **3**) anwendet, darin, daß, wenn die Fläche zwei Systeme voneinander trennt, die Ladung des einen Systems um den Betrag (21) zu- und die des anderen Systems um gleichviel abnimmt.

Die Wahl der Einheit für den Strom ist in dem bereits Gesagten enthalten.

d) Der Begriff des Leitungsstromes $\mathfrak{J}$ umfaßt nicht nur die Ströme in Metallen und Elektrolyten, sondern auch die Elektrizitätsbewegung bei allen Entladungserscheinungen. Es gibt indessen noch einen Vorgang ganz anderer Art, den die *Maxwell*'sche Theorie gleichfalls

7) Siehe Nr. **7**.

als „elektrischen Strom“ ansieht, und den sie zur Unterscheidung *Verschiebungsstrom* $\mathfrak{B}'$[8]) nennt. Dieser Vorgang spielt sich in nichtleitenden Körpern (Dielektrika) ab, und indem er die Aufmerksamkeit auf denselben hinlenkte, wurde es *Maxwell* möglich, die Hypothese daß der elektrische Strom immer solenoidal verteilt sei, zu einer Grundlage seiner Theorie zu machen. Wird z. B. einem Konduktor durch einen Leitungsdraht eine elektrische Ladung zugeführt, so scheint auf den ersten Blick die Strombahn in dem Konduktor zu endigen; die ältere Elektrodynamik sprach denn auch in diesem Falle von einem „ungeschlossenen“ Strome. *Maxwell* dagegen stellt sich vor, daß, solange der Ladungsstrom im Leitungsdraht anhält, auch in dem den Konduktor umgebenden Dielektrikum eine Strömung stattfindet, welche die Elektrizitätsbewegung im Drahte zu einer solenoidal verteilten Strömung ergänzt. Da nun nach den heutigen Anschauungen die Ursache aller von dem geladenen Konduktor ausgehenden Wirkungen in dem umgebenden Felde liegt, so muß im Dielektrikum eine gewisse Zustandsänderung stattgefunden haben, deren Betrag um so größer ist, je größer die Ladung des Konduktors. Man kann auch sagen, diese Zustandsänderung sei um so erheblicher, je stärker der Verschiebungsstrom war und je länger derselbe dauerte; man findet also ein naheliegendes Maß für dieselbe in dem Zeitintegral des Verschiebungsstromes.

Wir verstehen — auch in vielen später in Betracht kommenden Fällen — unter t_0 eine Zeit, zu welcher die Materie noch keinen elektromagnetischen Einflüssen ausgesetzt war, und führen zur Kennzeichnung des zu einer späteren Zeit t in einem Punkte P bestehenden Zustandes einen Vektor $\mathfrak{D}$ ein, den wir so wählen, daß $\mathfrak{D}_n d\sigma$ für jedes substantielle Flächenelement in P die Elektrizitätsmenge ist, welche das Element seit der Zeit t_0 durchsetzt hat. Dieser Vektor, der oft *dielektrische Verschiebung* genannt wird, soll hier *elektrische Erregung* heißen. Nach der Definition ist [vgl. (20)]

$$\mathfrak{D}_n d\sigma \,|_t = \int_{t_0}^{t} \mathfrak{B}_n' d\sigma \cdot dt, \tag{22}$$

$$\mathfrak{B}' = \dot{\mathfrak{D}}. \tag{23}$$

Während nach dem Gesagten ein Strom in einem Nichtleiter eine Abweichung vom ursprünglichen Zustande hervorruft, die um desto größer wird, je länger der Strom in derselben Richtung anhält, kann, ohne daß etwas derartiges geschähe, ein Leitungsstrom in einem Me-

8) Der Strich bei $\mathfrak{B}'$ soll zur Unterscheidung von einem später (Nr. **17**) einzuführenden Vektor $\mathfrak{B}$ dienen.

talle während unbeschränkter Zeit bestehen. Um der Allgemeinheit willen sollen auch Körper betrachtet werden, welche die Eigenschaften der Leiter und der Nichtleiter in sich vereinen („Körper gemischter Natur“). Es soll das heißen, daß hier *nur einem Teile* des Stromes eine anwachsende Zustandsänderung der Materie entspricht. Dieser Teil, den wir den Verschiebungsstrom nennen, und mit $\mathfrak{V}'$ bezeichnen, hängt in der oben angegebenen Weise mit der elektrischen Erregung $\mathfrak{D}$ zusammen. Den übrigen Teil $\mathfrak{J}$ nennen wir den Leitungsstrom. Der Gesamtstrom ist

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{J} + \mathfrak{V}'; \tag{24}$$

nur von diesem behaupten wir, daß er immer solenoidal verteilt sei.

Da in einem Körper gemischter Natur zweierlei Ströme $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{V}'$ bestehen können, so sagen wir auch, es könne ein solcher Körper in verschiedenen Weisen, die wir als die *erste* und die *zweite* unterscheiden, von Elektrizität durchflossen werden.

Den getroffenen Festsetzungen zufolge sind für den ruhenden freien Äther die elektrische Kraft und die elektrische Erregung gleichgerichtet und von gleichem numerischen Wert. Wir betrachten diese Gleichheit

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} \tag{25}$$

als auch für bewegten Ather gültig. Für die ponderabele Materie ist die Beziehung zwischen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ weniger einfach.

e) Die gewöhnlich *magnetische Induktion*, hier aber *magnetische Erregung* genannte Größe $\mathfrak{B}$ fällt bei geeigneter Wahl der Einheit (vgl. Nr. 7) im Äther mit der magnetischen Kraft zusammen, sodaß für dieses Medium wird

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H}. \tag{26}$$

Im Innern permanent oder temporär *magnetisierter* Körper, und also genau genommen im Innern jedes ponderablen Körpers, ist $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{H}$ verschieden.

6. Die Hauptgleichungen. Diese lassen sich auf folgende Form bringen:

$$\text{(I)} \begin{cases} \displaystyle\int \mathfrak{H}_s ds = \frac{1}{c}\int \mathfrak{C}_n d\sigma, \\ \text{oder} \\ \displaystyle\int \mathfrak{H}_s ds = \frac{1}{c}\int (\mathfrak{J}_n + \mathfrak{V}_n')d\sigma = \frac{1}{c}\left(\int \mathfrak{J}_n d\sigma + \frac{d}{dt}\int \mathfrak{D}_n d\sigma\right), \end{cases}$$

$$\text{(II)} \qquad \int \mathfrak{E}_s ds = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \mathfrak{B}_n d\sigma.$$

Diesen Beziehungen äquivalent sind die Differentialgleichungen

$$(\mathrm{I}')\qquad \begin{cases} \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{1}{c}\,\mathfrak{C}, \\ \text{oder} \\ \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{1}{c}\,(\mathfrak{J} + \mathfrak{B}') = \frac{1}{c}(\mathfrak{J} + \dot{\underline{\mathfrak{D}}}), \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}')\qquad \operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\,\dot{\underline{\mathfrak{B}}}.$$

Die Konstante c hat denselben numerischen Wert wie die Lichtgeschwindigkeit im freien Äther[9]).

Erläuterungen. a) Die Gleichung (I) enthält die Verallgemeinerung des Satzes, nach welchem für eine geschlossene Linie s, die einen vom Strome i durchflossenen Draht einmal in einem der Richtung von i entsprechenden Sinne umkreist, das Integral $\int \mathfrak{H}_s ds$ der Stromstärke i proportional ist. Diese Verallgemeinerung setzt voraus, daß $\mathfrak{C}$ immer solenoidal verteilt ist.

b) Ein Urteil über das Linienintegral der elektrischen Kraft längs eines geschlossenen linearen Leitungsdrahtes gewinnt man durch die

9) Es möge hier noch kurz eine von *V. Volterra* (Il nuovo Cimento (3) 29 (1891), p. 53) herrührende Umformung der Hauptgleichungen erwähnt werden. Man charakterisiere jeden substantiellen Punkt eines sich in gegebener Weise bewegenden Systems durch drei Größen x', y' z', die im Laufe der Zeit unverändert bleiben (etwa die Koordinaten des Punktes für $t = 0$), sodaß die rechtwinkligen Koordinaten zur Zeit t sich als kontinuierliche Funktionen von x', y', z', t darstellen lassen. Es seien PX', PY', PZ', in irgend einem Punkte P, die den unendlich kleinen Zuwächsen dx', dy', dz' bei festgehaltenem t entsprechenden Strecken; die Längen derselben seien $\xi dx'$, $\eta dy'$, $\zeta dz'$. Für einen beliebigen Vektor $\mathfrak{A}$ setze man weiter (Nr. 4) $\mathfrak{A}_{(x')} = \xi \mathfrak{A}_{x'}$, u. s. w., $\mathfrak{A}^{(x')} = \frac{1}{\xi}\,\mathfrak{A}^{x'}$ u. s. w., demzufolge das Element eines Linienintegrales die Form

$$\mathfrak{A}_{(x')}dx' + \mathfrak{A}_{(y')}dy' + \mathfrak{A}_{(z')}dz'$$

annimmt. Indem man nun die Hauptgleichung (I) auf ein Parallelogramm, dessen beide Seitenpaare den Zuwächsen dy' und dz' entsprechen, anwendet, ergibt sich einerseits bei geeigneter Wahl der Umlaufsrichtung

$$\int \mathfrak{H}_s ds = \left\{\frac{\partial \mathfrak{H}_{(z')}}{\partial y'} - \frac{\partial \mathfrak{H}_{(y')}}{\partial z'}\right\} dy'dz',$$

andererseits, wenn D die Funktionaldeterminante der x, y, z nach den x', y', z' ist,

$$\int \mathfrak{J}_n d\sigma = D\mathfrak{J}^{(x')}dy'dz', \quad \int \mathfrak{D}_n d\sigma = D\mathfrak{D}^{(x')}dy'dz'.$$

Folglich:

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_{(z')}}{\partial y'} - \frac{\partial \mathfrak{H}_{(y')}}{\partial z'} = \frac{1}{c}\left(D\mathfrak{J}^{(x')} + \frac{d}{dt}\,(D\mathfrak{D}^{(x')})\right) \text{ u. s. w.}$$

Die Gleichung (II) läßt dieselbe Umformung zu, und es haben schließlich die Hauptgleichungen für bewegte Körper bis auf das Hinzutreten des Faktors D dieselbe Gestalt in den x', y', z' wie für ein ruhendes System in den x, y, z.

Beobachtung des in demselben bestehenden Stromes; dementsprechend bringt die Gleichung (II) das allgemeine Gesetz für die *induzierten*, d. h. durch Veränderung des magnetischen Feldes hervorgerufenen Ströme zum Ausdruck. Liegt die Fläche σ vollständig im Äther, so geht Gleichung (II) über in

$$(27) \qquad \int \mathfrak{E}_s \, ds = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \mathfrak{H}_n d\sigma.$$

Da nun das rechts stehende Integral auch bei der Betrachtung der ponderomotorischen (eventuell elektrodynamischen) Kräfte, die im Magnetfelde auf einen Stromleiter wirken, auftritt, so kann man die Formel als Ausdruck des Zusammenhanges zwischen den ponderomotorischen Wirkungen und den Induktionserscheinungen ansehen. Es ist das der Zusammenhang, den unter Zugrundelegung des Energiegesetzes *Helmholtz*[10]) und Lord *Kelvin*[11]) zuerst nachgewiesen haben.

Die Beobachtungen über die durch magnetisierte Körper erregten Induktionsströme haben weiter gezeigt, daß sich in jedem Punkte ein bestimmter, von dem magnetischen Zustande abhängiger Vektor $\mathfrak{B}$ angeben läßt, der Art, daß das Induktionsgesetz noch immer die soeben angeführte Gestalt (27) hat, nur daß $\mathfrak{B}$ an die Stelle von $\mathfrak{H}$ tritt. Die Hauptgleichung (II) ist die Verallgemeinerung für ganz oder teilweise in ponderabeler Materie liegende Linien und für bewegte Körper.

Es möge noch hervorgehoben werden, daß nach den Grundgleichungen dem Strome $\mathfrak{C}$ und dem Vektor $\underline{\dot{\mathfrak{B}}}$ die Eigenschaft der solenoidalen Verteilung zukommt, und daß sich hieraus für jede Diskontinuitätsfläche die Stetigkeitsbedingungen

$$\mathfrak{C}_{nI} = \mathfrak{C}_{nII}, \quad \underline{\dot{\mathfrak{B}}}_{nI} = \underline{\dot{\mathfrak{B}}}_{nII}$$

ergeben.

Überdies folgt aus (I) und (II), endliche Werte von $\mathfrak{C}$ und $\underline{\dot{\mathfrak{B}}}$ vorausgesetzt, für jede Richtung h *in* der Unstetigkeitsfläche,

$$\mathfrak{H}_{hI} = \mathfrak{H}_{hII}, \quad \mathfrak{E}_{hI} = \mathfrak{E}_{hII}.$$

7. Bemerkungen zu den angenommenen Einheiten. (Vgl. auch den vorigen Art. p. 6 und 35). Die verschiedenen für die elektrischen und magnetischen Größen in Anwendung gekommenen Maßsysteme

10) *H. v. Helmholtz*, Die Erhaltung der Kraft, Berlin 1847.

11) Sir *W. Thomson* (Lord *Kelvin*), On the theory of electromagnetic induction, Brit. Assoc. Rep. 1848, Comm. to the Sections, p. 9; Applications of the principle of mechanical effect to the measurement of electromotive forces, and of galvanic resistances, in absolute units, Phil. Mag. (4) 2 (1851), p. 551 (Math. Phys. Papers, Cambridge 1882, 1, p. 91 und p. 490).

unterscheiden sich voneinander durch die Dimensionen der konstanten Koeffizienten k und h, welche in den Ausdrücken

$$\mathfrak{F} = k\frac{ee'}{r^2}, \tag{28}$$

$$\mathfrak{F} = h\frac{mm'}{r^2} \tag{29}$$

für die mechanische Kraft zwischen zwei im freien Äther liegenden elektrischen Mengen ee' bezw. magnetischen Mengen mm' auftreten, sowie durch die Dimensionen gewisser konstanter Faktoren in den Hauptgleichungen (I) und (II). Nachdem man durch die Wahl dieser Dimensionen die Art des Maßsystems bestimmt hat, sind noch die numerischen Werte für die Einheiten und also auch für jene Koeffizienten festzusetzen. Hierbei schließt man sich gegenwärtig allgemein den CGS-Einheiten für Länge, Masse und Zeit an.

In allen Systemen werden die Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ durch die auf eine Ladung 1 bezw. auf einen Pol 1 wirkende Kraft gemessen, während die elektrische Erregung $\mathfrak{D}$ durch eine pro Flächeneinheit hindurchgeströmte Elektrizitätsmenge, der Strom $\mathfrak{C}$ ($\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{V}'$) aber durch die pro Flächeneinheit und pro Zeiteinheit hindurchgeströmte Elektrizitätsmenge gemessen wird. Mit der Einheit für e sind demnach zu gleicher Zeit die Einheiten für $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{C}$ festgelegt, und die Einheit für m bedingt sofort die für $\mathfrak{H}$. Die Einheit für $\mathfrak{B}$ ist jedesmal besonders festzusetzen.

a) Man gelangt zu einem *elektrostatischen* Systeme für die elektrischen Größen, wenn man verlangt, daß k in (28) eine reine Zahl sein soll; speziell ist es üblich, die Einheit für e so zu wählen, daß k den Wert 1 erhält. Es können dann weiter die Einheiten für die magnetischen Größen noch in verschiedener Weise definiert werden. In dem elektrostatischen System, von dem bei *Maxwell*[12]) die Rede ist, geschieht das in solcher Weise, daß die Hauptgleichungen die Formen

$$\int \mathfrak{H}_s ds = 4\pi \int \mathfrak{C}_n d\sigma, \quad \int \mathfrak{E}_s ds = -\frac{d}{dt}\int \mathfrak{B}_n d\sigma$$

annehmen.

Bezeichnet man mit L eine Länge, mit M eine Masse und mit T eine Zeit, so sind in diesem Systeme die Dimensionen von e:

$$[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}],$$

und es wird im freien Ather nicht $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$, sondern $\mathfrak{B} = \frac{1}{c^2}\mathfrak{H}$. Der Koeffizient h in (29) erhält den Wert c^2.

b) In dem *elektromagnetischen* System ist der Koeffizient h in (29) eine reine Zahl; die Dimensionen von $\mathfrak{C}$ (e und $\mathfrak{E}$), sowie die

12) *Maxwell,* Treatise 2, Art. 625—628.

von $\mathfrak{B}$ werden dadurch festgelegt, daß man Übereinstimmung der Dimensionen für die beiden Integrale $\int \mathfrak{H}_s ds$ und $\int \mathfrak{C}_n d\sigma$ in (I), und ebenso für die beiden Größen $\int \mathfrak{E}_s ds$ und $\frac{d}{dt}\int \mathfrak{B}_n d\sigma$ in (II) verlangt. Setzt man, wie das allgemein üblich ist, $h = 1$, und nimmt man für die Hauptgleichungen die Gestalt

$$\int \mathfrak{H}_s ds = 4\pi \int \mathfrak{C}_n d\sigma, \quad \int \mathfrak{E}_s ds = -\frac{d}{dt}\int \mathfrak{B}_n d\sigma$$

an, so wird für den freien Äther $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$. Der Koeffizient k aber erhält den Wert c^2, und die Dimension von e wird $[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$.

Aus dem Gesagten geht hervor, daß das Verhältnis

$$\frac{\text{Elektromagnetische Elektrizitätseinheit}}{\text{Elektrostatische Elektrizitätseinheit}}$$

die Dimension einer Geschwindigkeit hat. Infolge der erwähnten näheren Festsetzungen fällt dasselbe mit der Lichtgeschwindigkeit c im Äther zusammen.

c) *Gauß*, *Helmholtz* und *Hertz* haben Einheiten von solchen Dimensionen eingeführt, daß die *beiden* Koeffizienten k und h in (28) und (29) reine Zahlen werden. Wählt man in einem derartigen *gemischt elektrostatisch-elektromagnetischen* Systeme die Einheiten so, daß $k = 1$, $h = 1$ ist, so wird die erste Hauptgleichung

$$\int \mathfrak{H}_s ds = \frac{4\pi}{c}\int \mathfrak{C}_n d\sigma.$$

Für die zweite aber muß man schreiben

$$\int \mathfrak{E}_s ds = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \mathfrak{B}_n d\sigma,$$

wenn man für den freien Äther die Gleichheit $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ festhalten will.

d) Wir haben uns in diesem Artikel dem Beispiele von *Gauß*, *Helmholtz* und *Hertz* angeschlossen, und zwar aus dem Grunde, weil in dieser Weise der Parallelismus zwischen den elektrischen und den magnetischen Erscheinungen auch in der Form der Gleichungen am besten zu Tage tritt. Indes veranlaßt uns ein Vorschlag von *Heaviside* zu einer Änderung der numerischen Werte der Einheiten. Dieselbe bezweckt, von allen, oder jedenfalls von den meisten Faktoren 4π, die bei gewöhnlicher Wahl der Einheiten die elektromagnetischen Gleichungen verunzieren, frei zu werden. Wir wählen nämlich, wie bereits gesagt, die Einheiten für e und m so, daß die Koeffizienten k und h in (28) und (29) den Wert $1/4\pi$ annehmen. Es tritt dann in der ersten Hauptgleichung notwendig der Faktor $1/c$ auf; derselbe erscheint ebenso in der zweiten Hauptgleichung, wenn man verlangt, daß im freien Äther $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ sein soll.

Das so entstehende gemischte System nennen wir füglich das „modifizierte“, im Gegensatz zu dem „ursprünglichen gemischten“ System. Natürlich hätten wir auch das rein elektromagnetische oder das rein elektrostatische System in ähnlicher Weise modifizieren können.

Es möge zu der Modifikation noch bemerkt werden, daß es durchaus der historischen Entwicklung entspricht, daß man ursprünglich vom Standpunkt der Fernwirkung das *Coulomb*'sche Gesetz als fundamental ansah und daher den mathematischen Ausdruck dieses Gesetzes möglichst einfach zu gestalten wünschte, indem man k oder h, oder beide gleich 1 setzte, daß wir dagegen jetzt die Verkettungsgleichungen zwischen den elektrischen und den magnetischen Größen, sowie die später anzuführenden Gleichungen für die Energie als Ausdrücke fundamentaler Gesetze ansehen, und daß wir diese daher von den 4π zu befreien wünschen. Wir nehmen es dabei gern in den Kauf, daß der Ausdruck des *Coulomb*'schen Gesetzes mit dem Faktor $1/4\pi$ beschwert wird. Freilich rächen sich die 4π dadurch, daß sie in mancher Gleichung der Elektronentheorie, eben weil diese sich den älteren Anschauungen nähert, wieder auftauchen.

Übrigens ist eine Begründung der Elektrizitätslehre möglich, bei welcher man gar nicht in die Versuchung kommt, diesen Faktor in die Formeln einzuführen. Man würde da z. B. von dem Plattenkondensator im freien Äther ausgehen und demjenigen Felde, welches pro Volumeneinheit den Energieinhalt $1/2$ besäße, die Werte $\mathfrak{E} = 1$ und $\mathfrak{D} = 1$ zusprechen.

e) Es ist namentlich von *E. Cohn*[13]) warm befürwortet worden, die willkürliche Dimensionierung elektrischer Größen überhaupt zu vermeiden. In seinem System, in dem, wie bei *Heaviside*, die 4π in den wichtigsten Gleichungen vermieden werden, treten drei unbestimmte Größen ε_0, μ_0 und V auf, zwischen welchen die Relation

$$\frac{V^2}{\varepsilon_0 \mu_0} = c^2 \tag{30}$$

besteht. Es ist in (28) und (29)

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, \quad h = \frac{1}{4\pi\mu_0},$$

und für den freien Ather wird

$$\mathfrak{D} = \varepsilon_0 \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{B} = \mu_0 \mathfrak{H}.$$

Die beiden Hauptgleichungen aber lauten wie folgt:

$$\int \mathfrak{H}_s ds = \frac{1}{V} \int \mathfrak{C}_n d\sigma, \quad \int \mathfrak{E}_s ds = -\frac{1}{V}\frac{d}{dt}\int \mathfrak{B}_n d\sigma.$$

---

13) *Cohn*, Das elektromagnetische Feld u. s. w., vgl. namentlich p. 279 u. f.

Dieses System hat den Vorteil, daß man von demselben leicht durch Spezialisierung der Werte von V, ε_0, μ_0 zu anderen Systemen übergehen kann. Für die endgültige Festsetzung der Einheiten würde man eventuelle spätere Fortschritte in dem Verständnis der Erscheinungen verwerten können. Wir haben uns indes nicht dazu entschließen können, in die ohnehin schon verwickelten Formeln unbestimmte Größen aufzunehmen, und wollen uns daher an unser modifiziertes gemischtes System halten. Man erhält dasselbe aus dem *Cohn*'schen System, wenn man $\varepsilon_0 = 1$, $\mu_0 = 1$, $V = c$ setzt, was der Bedingung (30) genügt.

f) Setzt man bei *Cohn* V gleich 1, demzufolge ε_0 und μ_0 der Bedingung

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

zu genügen haben, so gelangt man zu den von *Heaviside* vorgeschlagenen „rationellen Einheiten" und erreicht namentlich den Vorteil, daß die Hauptgleichungen die äußerst einfache Gestalt

$$\int \mathfrak{H}_s ds = \int \mathfrak{C}_n d\sigma, \quad \int \mathfrak{E}_s ds = -\frac{d}{dt}\int \mathfrak{B}_n d\sigma$$

bekommen.

In diesem *Heaviside*'schen System ist das von mir gewählte nicht mehr enthalten.

g) Man kann von den in diesem und dem folgenden Artikel vorkommenden Gleichungen, bei welchen die modifizierten gemischten Einheiten zugrunde gelegt sind, zu den Formeln in irgend einem anderen Maßsystem übergehen, indem man unsere Größen e, m, $\mathfrak{E}$, u. s. w. durch αe, βm, $\gamma \mathfrak{E}$, u. s. w. ersetzt, wo α, β, γ, u. s. w. gewisse konstante Faktoren sind.

Zur Erleichterung der Umrechnung stellen wir einige dieser Faktoren zusammen.

	$e, \mathfrak{D}, \mathfrak{J}, \mathfrak{C}$	$\mathfrak{E}$	m	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{H}$
Urspr. elektrostat. System (s. oben a)	$\sqrt{4\pi}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$	$c\sqrt{4\pi}$	$\frac{c}{\sqrt{4\pi}}$	$\frac{1}{c\sqrt{4\pi}}$
Urspr. elektromagn. System (s. oben b)	$c\sqrt{4\pi}$	$\frac{1}{c\sqrt{4\pi}}$	$\sqrt{4\pi}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$
Urspr. gemischtes System (s. oben c)	$\sqrt{4\pi}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$	$\sqrt{4\pi}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$
System von *Heaviside* und *Cohn* (s. oben e und f)	$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}$	$\sqrt{\varepsilon_0}$	$\frac{1}{\sqrt{\mu_0}}$	$\frac{1}{\sqrt{\mu_0}}$	$\sqrt{\mu_0}$

Es ist dann weiter zu berücksichtigen, daß bei *Cohn* die Relation (30) gilt, während bei *Heaviside* $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ ist. Die Zahlen in der Tabelle geben auch an, um wieviel Mal die *Einheiten* in den verschiedenen Systemen *größer* sind als die von uns gewählten.

h) Was die praktischen Einheiten betrifft, so beschränken wir uns darauf, für einige derselben die Werte, in den von uns angenommenen Einheiten ausgedrückt, anzuführen. Wir denken dabei an die Einheiten, wie sie ursprünglich im Anschluß an die elektromagnetischen CGS-Einheiten definiert worden sind, und von welchen sich die gesetzlichen Einheiten mehr oder weniger entfernen.

Es ist der Wert für das *Coulomb* (Elektrizitätsmenge) $10^{-1} \cdot \sqrt{4\pi} \cdot c$; ebenso für das *Ampère* (Stromstärke); für das *Volt* (Linienintegral der elektrischen oder elektromotorischen Kraft, Potentialdifferenz) $10^8/c\sqrt{4\pi}$; für das *Farad* (Kapazität, d. h. Verhältnis von Ladung und Potentialdifferenz) $10^{-9} \cdot 4\pi c^2$.

8. Beziehungen zwischen den Zustandsgrößen an derselben Stelle. a) Aus den Beobachtungen über den Einfluß ponderabler Dielektrika auf die elektrostatischen Erscheinungen hat man geschlossen, daß in vielen Fällen die elektrische Erregung $\mathfrak{D}$ eine lineare Funktion der elektrischen Kraft $\mathfrak{E}$ ist. Für isotrope Körper setzen wir

$$\text{(III)} \qquad \mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E},$$

wo ε die *Dielektrizitätskonstante* ist — für den Äther ist nach (25) $\varepsilon = 1$ —, und für anisotrope Körper (vgl. Nr. 3)

$$\text{(III')} \qquad \mathfrak{D} = (\varepsilon)\mathfrak{E}.$$

Manchmal ist $\mathfrak{D}$ keine lineare Funktion von $\mathfrak{E}$, oder ist $\mathfrak{D}$ sogar nicht durch den augenblicklichen Wert von $\mathfrak{E}$ bestimmt.

b) Für isotrope Leiter ist zu setzen

$$\text{(IV)} \qquad \mathfrak{J} = \sigma \mathfrak{E}$$

(σ *Leitfähigkeit*), und für anisotrope Leiter

$$\text{(IV')} \qquad \mathfrak{J} = (\sigma)\mathfrak{E}.$$

Für einen Körper gemischter Natur (Nr. 5, d)) lassen wir zu gleicher Zeit die Gleichungen (III) und (IV) gelten.

Geht man nach der in Nr. 7, g) gegebenen Vorschrift mit der Gleichung (IV) zu den gewöhnlichen elektromagnetischen Einheiten über, dann erhält man

$$\mathfrak{J} = \frac{\sigma}{4\pi c^2} \mathfrak{E}.$$

Es ist also $\sigma = 4\pi c^2 \sigma_{\text{magn.}}$, wenn $\sigma_{\text{magn.}}$ die in üblicher Weise elektromagnetisch gemessene Leitfähigkeit bedeutet.

In unserem Maßsystem ist die Einheit des Widerstandes der Widerstand eines Leiters von der Länge 1, dem Querschnitte 1 und der Leitfähigkeit $\sigma = 1$. In dieser Widerstandseinheit wird das *Ohm* durch den Wert

$$\frac{10^9}{4\pi c^2}$$

ausgedrückt.

c) In den einfachsten Fällen darf man die magnetische Erregung $\mathfrak{B}$ als eine lineare Funktion der magnetischen Kraft $\mathfrak{H}$ betrachten, also für isotrope Körper

$$\text{(V)} \qquad \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$$

(μ *magnetische Permeabilität*), und für anisotrope Körper

$$\text{(V')} \qquad \mathfrak{B} = (\mu) \mathfrak{H}$$

setzen. Indes gelten auch diese Relationen nicht allgemein. Oft ist $\mathfrak{B}$ keine lineare Funktion von $\mathfrak{H}$, oder wird sogar die magnetische Erregung nicht durch den augenblicklichen Wert der magnetischen Kraft bestimmt (magnetische Hysteresis).

Für den Äther ist $\mu = 1$.

Wird, umgekehrt als es oben geschah, $\mathfrak{E}$ als Funktion von $\mathfrak{D}$ oder $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{H}$ als Funktion von $\mathfrak{B}$ aufgefaßt, so benutzen wir (vgl. Nr. 3) für die Koeffizienten die Bezeichnungen ε', σ', μ'. Von allen hier eingeführten Koeffizienten soll angenommen werden, daß sie von der Bewegung der Materie an und für sich nicht beeinflußt werden, d. h. daß sie in jedem Augenblick dieselben Werte haben, als wenn die Teilchen der Materie in den dann erreichten Lagen verharrten.

9. Elektromotorische Kräfte. Bei nicht homogenen Körpern genügen im allgemeinen die Gleichungen (IV) nicht zur Darstellung der Erscheinungen, und gelingt diese nur, wenn man den Vektor $\mathfrak{E}$ durch $\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^{el}$ ersetzt, wo $\mathfrak{E}^{el}$ ein Vektor ist, der von dem physischen und chemischen Zustande der Materie an der betrachteten Stelle abhängt. Es ist dann also allgemein

$$\text{(IV'')} \qquad \mathfrak{J} = (\sigma)(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^{el}), \quad \mathfrak{E} + \mathfrak{E}^{el} = (\sigma')\mathfrak{J}$$

zu setzen. Den Vektor $\mathfrak{E}^{el}$ nennt man die *elektromotorische* oder *eingeprägte elektrische Kraft*.

In ähnlicher Weise kann man (III) abändern in

$$\text{(III'')} \qquad \mathfrak{D} = (\varepsilon)(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^{ev}), \quad \mathfrak{E} + \mathfrak{E}^{ev} = (\varepsilon')\mathfrak{D}.$$

Auch der Vektor $\mathfrak{E}^{ev}$ kann als elektromotorische oder *eingeprägte elektrische Kraft* bezeichnet werden; der Index v deutet dabei auf „Verschiebung“, wie in (IV'') der Index l auf „Leitung“ hin, während der

Buchstabe e beidemal daran erinnern soll, daß es sich um eine *eingeprägte* Kraft handelt. Auf einen Körper gemischter Natur könnte man zu gleicher Zeit (III'') und (IV'') anwenden.

Zur Abkürzung soll weiterhin

$$\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^{el} = \mathfrak{E}^{tl}, \quad \mathfrak{E} + \mathfrak{E}^{ev} = \mathfrak{E}^{tv}$$

gesetzt werden (*totale* elektrische Kraft); bisweilen lassen wir die Indices l und v fort.

Es liegt kein Grund vor, im freien Äther elektromotorische Kräfte vorauszusetzen.

III. Anwendung der Grundgleichungen.

10. Vergleichung der Theorie mit den Beobachtungen. Wenn wir jetzt, gänzlich abgesehen von den gegebenen Erläuterungen, die Gleichungen (I)—(V) als eine Beschreibung oder Erklärung der Erscheinungen an die Spitze der weiteren Betrachtungen stellen, so wird damit folgendes behauptet: Es lassen sich den in den Gleichungen auftretenden mathematischen Größen gewisse physikalische Größen zuordnen, die in eindeutiger Weise mittels Beobachtungen an elektromagnetischen Systemen bestimmt werden können und deren aus den Messungen abgeleitete Zahlenwerte den Gleichungen genügen. Was die Prüfung dieser Behauptung betrifft, so ist zu beachten, daß es sich nur darum handelt, ein System physikalischer Größen anzugeben, durch deren Werte die Gleichungen befriedigt werden. Es ist daher nichts dagegen einzuwenden, daß man bei der Definition dieser Größen und bei der Festsetzung der Meßmethoden sich von einigen der Gleichungen führen läßt; es erübrigt dann eben noch zu zeigen, daß auch den noch nicht benutzten Gleichungen genügt wird.

a) *Messung der elektrischen und der magnetischen Kraft.* Wir wissen bereits (Nr. 5, a und b), wie diese für einen Punkt des Äthers vorzunehmen ist. Zu einer für das Innere der ponderabelen Materie passenden Methode gelangt man folgenderweise.

Es sei s eine beliebige geschlossene Linie, s ein so kleiner Teil derselben, daß von dessen Krümmung und von der Verschiedenheit des Zustandes in den Punkten dieses Teils abgesehen werden kann, $\bar{\mathrm{s}}$ der übrige Teil von s, σ eine von s begrenzte Fläche. Dann ist nach (I)

$$\int_{\mathrm{s}} \mathfrak{H}_s ds + \int_{\bar{\mathrm{s}}} \mathfrak{H}_s ds = \frac{1}{c} \int \mathfrak{C}_n d\sigma. \tag{31}$$

Wir bilden jetzt eine zylindrische Höhlung, deren Achse die Strecke s

ist; im Inneren derselben besteht keine elektromotorische Kraft mehr, weil daselbst keine Materie vorhanden, und wir lassen die Natur der Materie außerhalb der Höhlung, sowie die Bewegung des Systems ungeändert. Man hat es dann mit einem neuen elektromagnetischen System ($\mathfrak{H}'$, $\mathfrak{C}'$ u. s. w.) zu tun, und zwar sind die Änderungen der Zustandsgrößen nur bis zu einer Entfernung, die von der Größenordnung der Querdimensionen des Zylinders ist, von derselben Ordnung wie die ursprünglichen Werte.

Für den neuen Fall gilt

$$\int\limits_{s} \mathfrak{H}_s' ds + \int\limits_{\underline{s}} \mathfrak{H}_s' ds = \frac{1}{c} \int \mathfrak{C}_n' d\sigma. \tag{32}$$

Läßt man jetzt die Querdimensionen des Zylinders fortwährend abnehmen, sodaß das Verhältnis derselben zu s sich der Null nähert, so nähern sich die beiden letzten Integrale in (32) den entsprechenden Gliedern in (31); es müssen also auch die ersten Integrale in den beiden Gleichungen denselben Grenzwert haben. Es läßt sich weiter zeigen, daß $\mathfrak{H}_s'$ auf der ganzen Strecke s, mit Ausnahme von unendlich kleinen Teilen an den Enden, die zu vernachlässigen sind, als konstant betrachtet werden darf. Daher ist, wenn P der mittlere Punkt von s ist,

$$\{\mathfrak{H}_s\}_P = \lim \{\mathfrak{H}_s'\}_P .$$

Also: Um die Komponente von $\mathfrak{H}$ nach einer vorgeschriebenen Richtung s zu bestimmen, mißt man $\mathfrak{H}_s$ in einer Höhlung von der besagten Gestalt, deren Achse die Richtung s hat. Sobald man die Messung nach drei Richtungen ausgeführt hat, kennt man Richtung und Größe von $\mathfrak{H}$.[14])

Zu einer ähnlichen Bestimmungsmethode für $\mathfrak{E}$ gelangt man, wenn man von der Gleichung (II) ausgeht.

b) *Messung des Stromes und der magnetischen Erregung.* Nachdem man in allen Punkten des Systems $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$ gemessen hat, leitet man daraus mit Hilfe der Gleichungen (I′) und (II′) $\mathfrak{C}$ und $\dot{\underline{\mathfrak{B}}}$, also auch, wenn die Messungen für alle Augenblicke seit t_0 (Nr. 5, d) Gl. (20)) ausgeführt worden sind, $\mathfrak{B}$ selbst ab. Die Prüfung der Theorie besteht dann, was $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ betrifft, darin, daß man zwischen diesen Vektoren einen Zusammenhang im Sinne von Nr. 8, c) nachweist.

Andererseits wird man nachzuweisen haben, daß der für $\mathfrak{C}$ ge-

14) Ich habe hier die von Lord *Kelvin* (Reprint of papers on electrostatics and magnetism, p. 362, Fußnote †) herrührende und auch von *Hertz* gewählte Festsetzung in der Weise abgeändert, daß die Kenntnis der Richtung der Magnetisierung nicht vorausgesetzt zu werden braucht.

fundene Vektor sich in solcher Weise in zwei Vektoren $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{B}'$ (oder $\dot{\mathfrak{D}}$) zerlegen läßt, daß bei geeigneten Annahmen betreffend Richtung und Größe der elektromotorischen Kräfte $\mathfrak{E}^{el}$ und $\mathfrak{E}^{ev}$ der Nr. **9** erörterte Zusammenhang sich herausstellt. Mit „geeigneten Annahmen" sind hier solche gemeint, die mit den allgemeinen Erfahrungen über elektromotorische Kräfte nicht in Kollision geraten.

In Wirklichkeit hat man bei der Vergleichung der Theorie mit den Beobachtungen vielfach andere Wege eingeschlagen. Obige Auseinandersetzung hat nur den Zweck, den Sinn der theoretischen Behauptungen klar hervortreten zu lassen.

Es sollen jetzt (Nr. **11**—**21**) die wichtigsten im obigen noch nicht erwähnten elektrischen und magnetischen Größen definiert und die für dieselben geltenden Gesetze, sowie einige weitere sich auf spezielle Probleme beziehende Folgerungen aus den Grundgleichungen abgeleitet werden.

11. Elektrische Ladung. Die elektrische Ladung e der von einer Oberfläche σ umschlossenen Materie definieren wir für die Zeit t als die Elektrizitätsmenge, welche zwischen den Zeiten t_0 und t *durch Leitung* in diesen Teil des Systems hineingeführt worden ist. Also

$$e = -\int_{t_0}^{t} dt \int \mathfrak{J}_n d\sigma. \tag{33}$$

Folgerungen. a) Da der Gesamtstrom $\mathfrak{C} = \mathfrak{J} + \mathfrak{B}'$ solenoidal verteilt ist, so ist auch

$$e = \int_{t_0}^{t} dt \int \mathfrak{B}_n' d\sigma = \int \mathfrak{D}_n d\sigma. \tag{VI}$$

b) Im Inneren eines Körpers kann eine Ladung nur dann entstehen, wenn derselbe gemischter Natur (Nr. **5**, d)) ist. In einem Körper, der *nur* Leiter ist, ist nämlich fortwährend $\int \mathfrak{J}_n d\sigma = 0$ für jede in demselben liegende geschlossene Fläche; ist aber der Körper ein Nichtleiter, so ist stets $\mathfrak{J} = 0$. Denkt man sich aber, daß ein Körper gemischter Natur, nachdem die Ladung in seinem Inneren entstanden ist, sein Leitungsvermögen verliert, so gelangt man zur Vorstellung einer elektrischen Ladung im Inneren eines Nichtleiters. Man kann sich auch vorstellen, daß diese, ohne unser Zutun, fortwährend bestanden hat. Dann ist, vorausgesetzt, daß man $\mathfrak{D}$ aus Beobachtungen ableiten könne, die Gleichung (VI) als Definition von e aufzufassen.

c) Aus (VI) ergibt sich für einen Raum, über den die Ladung mit der Dichte ϱ verteilt ist,

(VI′) $$\operatorname{div}\mathfrak{D} = \varrho\,,$$

und für eine Fläche, die eine Ladung von der Flächendichte ω trägt,

(VI″) $$\mathfrak{D}_{nII} - \mathfrak{D}_{nI} = \omega\,.$$

Bei der Bewegung nichtleitender Materie bleibt die Ladung jedes Raumteils und jedes Flächenteils unverändert.

Zu bemerken ist, daß die für die Ladung gegebene Definition versagen würde, sobald man sich nicht darüber einigen könnte, in welcher Weise der Strom $\mathfrak{C}$ in Leitungsstrom und Verschiebungsstrom zu zerlegen sei.

Die z. B. durch (VI) bestimmte Größe e, welche hier als „elektrische Ladung" bezeichnet wird, nennt *Hertz* die innerhalb der Fläche σ liegende *wahre Elektrizität*, im Gegensatz zu der Größe $\int \mathfrak{E}_n d\sigma$,[15]) die er die *freie Elektrizität* nennt. Da im Äther $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ zusammenfallen, so sind für jedes von Äther umgebene System die Gesamtmengen der wahren und der freien Elektrizität gleich.

12. Elektrostatik. In einem Systeme ruhender stromloser Körper können unveränderliche Ladungen und ein konstantes elektrisches Feld bestehen. Es ist sodann $\mathfrak{C} = 0$, $\mathfrak{H} = 0$, $\mathfrak{B} = 0$, folglich für jede geschlossene Linie

(VII) $$\int \mathfrak{E}_s ds = 0\,.$$

Aus dieser Bedingung für die elektrische Kraft folgt, daß dieselbe jetzt von einem *Potential* φ abhängt, sodaß

(VII′) $$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\varphi$$

ist. Im Innern eines Leiters ist, wegen $\mathfrak{J} = 0$, nach (IV) auch $\mathfrak{E} = 0$, mithin $\varphi =$ konst. Auch ist dort $\varrho = 0$. Für einen Körper, der *nur* Leiter ist, gilt das, wie bereits erwähnt (Nr. **11**, b)) allgemein. Handelt es sich aber um einen Körper gemischter Natur, so folgt, für den Fall des elektrischen Gleichgewichts, aus $\mathfrak{E} = 0$ und (III), daß $\mathfrak{D} = 0$, was wieder nach (VI′) auf $\varrho = 0$ führt. Eine Ladung besteht also nur an der Oberfläche des Leiters.

Aus (VI′), (III′) und (VII′) ergibt sich eine Gleichung für φ, die, wenn an allen Stellen des Dielektrikums der Wert von ϱ, und für jeden Konduktor der Wert von φ gegeben ist, in Verbindung mit $\varphi = 0$ in unendlicher Entfernung, zur Bestimmung des Potentials in allen Punkten des Feldes ausreicht.

15) *Hertz*, Ann. Phys. Chem. 40 (1890), p. 594—596 (Untersuchungen u. s. w., p. 225—227).

13. Elektrische Polarisation. Es befinde sich ein ponderabeles, ungeladenes Dielektrikum in einem elektrostatischen Felde. Entfernt man die ponderable Materie aus einem unendlich kleinen Raum, so wird sich im allgemeinen der Zustand außerhalb dieses Raumes verändern. Man kann es jedoch so einrichten, daß diese Änderung vermieden wird.

Zu diesem Zwecke definieren wir einen neuen Vektor $\mathfrak{P}$ mittels der Gleichung

$$\text{(VIII)} \qquad \mathfrak{P} = \mathfrak{D} - \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{E} + \mathfrak{P}$$

und geben der Höhlung die Gestalt eines geraden Zylinders, dessen Achse AB die Richtung von $\mathfrak{P}$ hat. Versieht man nun die Endflächen dieser Höhlung mit Ladungen, deren Dichte für die bei B liegende Fläche den Wert $|\mathfrak{P}|$, und für die gegenüberliegende Fläche bei A den Wert $-|\mathfrak{P}|$ hat, läßt man ferner in dem Außenraum die Vektoren $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$, und in der Höhlung den Vektor $\mathfrak{E}$ so wie sie waren, so wird allen Gleichungen — namentlich an der Wand der Höhlung der Gleichung (VI'') — genügt.

Es zeigt sich in dieser Weise, daß die aus der Höhlung entfernte ponderable Materie, was die Wirkung nach außen betrifft, den Ladungen $+|\mathfrak{P}|\sigma$ und $-|\mathfrak{P}|\sigma$ an den Endflächen σ, und also dem *elektrischen Momente* $|\mathfrak{P}|\sigma s$ (s Länge von AB) in der Richtung von $\mathfrak{P}$ äquivalent ist. Man sagt deshalb, die Elemente des Körpers seien *elektrisch polarisiert*, und nennt $\mathfrak{P}$ die elektrische *Polarisation*. (*Helmholtz* und im Anschlusse an ihn *Hertz* und *Cohn* brauchen allerdings das Wort Polarisation in anderem Sinne, nämlich im Sinne unserer Erregung $\mathfrak{D}$.) Die Größe $|\mathfrak{P}|$ des Vektors $\mathfrak{P}$ bestimmt das elektrische Moment pro Volumeneinheit.

Die Gleichung (VIII) und die für $\mathfrak{P}$ gewählte Benennung wendet man auch in anderen als elektrostatischen Fällen an. Zu bemerken ist noch, daß bei obiger Betrachtung konstante elektromotorische Kräfte $\mathfrak{E}^{ev}$, die dann in der Höhlung nicht wirken, nicht ausgeschlossen zu werden brauchen.

14. Konstante Ströme in Leitern. Sind in einem System ruhender Körper der Strom $\mathfrak{J}$ und die elektrische Erregung $\mathfrak{D}$ an jeder Stelle konstant, so sind auch die magnetische Kraft $\mathfrak{H}$ und die magnetische Erregung $\mathfrak{B}$ unveränderlich. Für jede geschlossene Linie gilt dann wieder (VII), sodaß wie oben ein Potential φ existiert. Bei gegebenen elektromotorischen Kräften $\mathfrak{E}^{el}$ bestimmen die Gleichungen (IV''), in Verbindung mit der solenoidalen Verteilung von $\mathfrak{J}$, das Potential und den Stromverlauf. Speziell sind das *Ohm*'sche Gesetz und

die *Kirchhoff*'schen Sätze[16]) naheliegende Folgerungen aus den Hauptgleichungen.

Soll in einem leitenden Körper kein Strom bestehen, obgleich in demselben elektromotorische Kräfte wirksam sind, so muß $\mathfrak{E} = -\mathfrak{E}^{el}$ sein, und also für jede Linie zwischen den Punkten A und B

$$\varphi_B - \varphi_A = \int_A^B \mathfrak{E}_s^{el} ds.$$

15. Magnetismus. Magnetisierung. Aus (II) folgt, auch bei bewegten Systemen, für jede substantielle geschlossene Fläche (Nr. **3**)

$$\text{(IX)} \qquad \int \mathfrak{B}_n d\sigma = \text{const.},$$

d. h. unabhängig von der Zeit. Es bestehen Lösungen der Gleichungen, in welchen diese Konstante einen von 0 verschiedenen Wert hat; dieser sei m. Man sagt dann, es umschließe die Fläche eine Menge m an *Magnetismus.* Diese Ausdrucksweise führt weiter dazu, von einer Raumdichte ϱ_m, bezw. einer Flächendichte ω_m des Magnetismus zu reden, sobald in einem Raum

$$\text{(IX')} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{B} = \varrho_m,$$

bezw. an einer Fläche

$$\text{(IX'')} \qquad \mathfrak{B}_{nII} - \mathfrak{B}_{nI} = \omega_m$$

ist.

Es befinde sich jetzt ein ruhender, selbst nicht von Strömen durchflossener Körper in der Nähe eines ebenfalls ruhenden Leiters mit konstantem Strom. Wir definieren für denselben einen neuen Vektor $\mathfrak{M}$ mittels der Gleichung

$$\text{(X)} \qquad \mathfrak{M} = \mathfrak{B} - \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{H} + \mathfrak{M},$$

und führen eine Betrachtung durch, die genau mit der in Nr. **13** benutzten übereinstimmt. Das Ergebnis ist, daß ein unendlich kleiner cylindrischer Teil des Körpers, dessen Achse die Richtung von $\mathfrak{M}$ hat, denselben Einfluß auf die Umgebung ausübt wie ein magnetisches Moment von jener Richtung. Man sagt deshalb, die Materie sei *magnetisch polarisiert* oder *magnetisiert,* und nennt den Vektor $\mathfrak{M}$ die *Magnetisierung.* Die Größe $|\mathfrak{M}|$ desselben bestimmt das magnetische Moment pro Volumeneinheit.

An die Gleichung (X) und die angeführten Benennungen hält man sich in allen Fällen.

---

16) *Kirchhoff,* Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird, Ann. Phys. Chem. 72 (1847), p. 497; Ges. Abh., p. 22.

Was oben mit m bezeichnet wurde, nennt *Hertz wahren Magnetismus*, zur Unterscheidung vom *freien Magnetismus*; unter dem Betrag des letzteren für einen begrenzten Raum versteht er den Wert von

$$\int \mathfrak{H}_n d\sigma,$$

für die Oberfläche dieses Raumes berechnet[17]).

Übrigens, obgleich es Lösungen der Gleichungen gibt, welche für einen bestimmten Teil des Raumes (wahren) Magnetismus anzeigen, und solche Lösungen (wie in dem Fall der oben betrachteten Höhlung, wenn deren Endflächen mit geeigneten Mengen von Magnetismus belegt sind) was den übrigen Teil des Raumes betrifft, mit der Wirklichkeit übereinstimmen können, so können wir doch tatsächlich alle Erscheinungen so auffassen, daß wir der Konstanten in (IX) den Wert Null zuschreiben. Wir wollen das tun und sagen also, es existiere kein wahrer Magnetismus und die magnetische Erregung sei immer solenoidal verteilt[18]).

16. Das magnetische Feld konstanter Ströme. Wenn die Gleichung (V) oder (V′) gilt, dann bestimmt diese in Verbindung mit

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0 \tag{34}$$

und (I′) das zu gegebenen Strömen $\mathfrak{C}$ gehörige magnetische Feld.

Wir erwähnen noch die Gleichung, die aus (I) hervorgeht, wenn der Strom auf eine unendlich dünne Schicht beschränkt ist. Es mögen die Grenzflächen derselben von einer Normalen in den Punkten C und D geschnitten werden, so zwar, daß die Richtung von C nach D mit der von n übereinstimmt; es sei weiter P ein beliebiger Punkt von CD, $CP = \xi$, $CD = \varepsilon$. Stellt man sich nun vor, daß bei fortwährender Abnahme von ε der durch

$$\mathfrak{C}^\sigma = \int_0^\varepsilon \mathfrak{C}\, d\xi$$

bestimmte Vektor einen endlichen Wert behält, so folgt aus der solenoidalen Verteilung von $\mathfrak{C}$, daß die Richtung dieses Vektors $\mathfrak{C}^\sigma$ in die Fläche σ fallen muß („Flächenstrom"). Aus (I) läßt sich ableiten, daß, wenn die Indices I und II sich auf die Punkte C und D beziehen und $\mathfrak{n}$ einen Vektor von der Länge 1 in der Richtung von n bedeutet,

$$\mathfrak{C}^\sigma = c[\mathfrak{n} \cdot \{\mathfrak{H}_{II} - \mathfrak{H}_I\}]$$

ist.

---

17) *Hertz*, Ann. Phys. Chem. 40 (1890), p. 599 und 600 (Untersuchungen u. s. w., p. 230 und 231).

18) Vgl. indes Nr. 19.

Man kann dieses Resultat benutzen, um zu zeigen, daß das in Nr. 15 erwähnte zylindrische Element eines magnetisierten Körpers sich, was die Wirkung nach außen betrifft, durch einen Strom in der Zylinderfläche ersetzen läßt. Dieser Strom muß den Cylinder in Ebenen senkrecht zu $\mathfrak{M}$ in einem der Richtung von $\mathfrak{M}$ entsprechenden Sinne umkreisen, und es muß $|\mathfrak{C}^\sigma| = c\,|\mathfrak{M}|$ sein. Entfernt man die ponderable Materie des Zylinders und läßt man zu gleicher Zeit diesen Strom zirkulieren, so bleibt nicht nur außerhalb sondern auch innerhalb der Höhlung das ursprüngliche $\mathfrak{B}$ bestehen.

17. Zerlegung des elektrischen Stroms. Auf Grund von (14) und (23) und unter Benutzung von (VI′) schreiben wir für den Vektor $\mathfrak{B}'$

$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} + \mathfrak{K} + \mathfrak{R},$$

wo

$$\mathfrak{B} = \dot{\mathfrak{D}}, \tag{35}$$

$$\mathfrak{K} = \varrho \mathfrak{w}, \tag{36}$$

$$\mathfrak{R} = \operatorname{rot}[\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{w}]. \tag{37}$$

Es läßt sich also der Gesamtstrom $\mathfrak{C}$ in vier Teile, den Leitungsstrom $\mathfrak{J}$ und die Ströme $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{R}$ zerlegen, die alle, der Hauptgleichung (I′) gemäß, an der Erzeugung eines magnetischen Feldes beteiligt sind, und von denen die drei ersten zusammengenommen und der letzte für sich allein der Bedingung der solenoidalen Verteilung genügen[19]).

Man kann $\mathfrak{B}$ den *Verschiebungsstrom im engeren Sinne des Wortes* nennen. $\mathfrak{K}$ ist der *Konvektionsstrom*, dessen magnetische Wirkung zuerst von *Rowland*[20]) beobachtet und von diesem Physiker, zusammen mit *Hutchinson*[21]), messend verfolgt wurde. Auch *Röntgen* und *Himstedt*[22]) haben ähnliche Versuche angestellt. Nachdem *Crémieu*[23])

---

19) *H. Poincaré*, Électricité et optique, 2e édit., p. 379—385.

20) *H. A. Rowland*, On the magnetic effect of electric convection, Am. J. of Sc. (3) 15 (1878), p. 30.

21) *H. A. Rowland* u. *C. T. Hutchinson*, On the electromagnetic effect of convection-currents, Phil. Mag. (5), 27 (1889), p. 445.

22) *W. C. Röntgen*, Berl. Ber. Akad. 1885, p. 198; *F. Himstedt*, Ann. Phys. Chem. 38 (1889), p. 560.

23) *V. Crémieu*, Recherches sur l'existence du champ magnétique produit par le mouvement d'un corps électrisé, Par. C. R. 130 (1900), p. 1544; Recherches sur l'effet inverse du champ magnétique que devrait produire le mouvement d'un corps électrisé, Par. C. R. 131 (1900), p. 575; Sur les expériences de *M. Rowland* relatives à l'effet magnétique de la convection électrique, Par. C. R. 131 (1900), p. 797; Nouvelles recherches sur la convection électrique, Par. C. R. 132

das Resultat von *Rowland* auf Grund neuer Versuche in Zweifel gezogen hatte, wurde dasselbe von *Pender*[24]) und *Adams*[25]) durch numerische Bestimmung des Effekts bestätigt[26]).

Der Strom $\mathfrak{R}$ macht sich bemerklich, wenn ein Dielektrikum, in dem eine elektrische Erregung besteht, bewegt wird. Die dabei auftretende magnetische Wirkung hat *Röntgen*[27]) beobachtet, indem er eine nichtleitende Scheibe zwischen den Platten eines geladenen Kondensators rotieren ließ. Es möge deshalb $\mathfrak{R}$ der *Röntgenstrom* heißen.

In jüngster Zeit hat *Eichenwald*[28]) die magnetischen Effekte sowohl des Konvektions- und des *Röntgen*stroms, wie auch des Verschiebungsstromes quantitativ untersucht. Besonders interessant sind die Versuche dieses Physikers, bei welchen ein Kondensator, zusammen mit dem festen Dielektrikum, um eine zu den Platten senkrechte Achse in Rotation versetzt wurde. Es zeigte sich, daß auch in diesem Falle ein magnetisches Feld erregt wird, obgleich nach der *Hertz*'schen Theorie die Fortführung der auf den Platten befindlichen Ladungen und die Bewegung des Dielektrikums entgegengesetzt gleiche Wirkungen hervorbringen müßten.

Um sich von letzterem zu überzeugen, bemerke man zunächst, daß der *Röntgen*strom $\mathfrak{R}$ zu einem Flächenstrom $\mathfrak{R}^\sigma$ wird, sobald der Vektor $[\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{w}]$, der $\mathfrak{U}$ heißen möge, an einer Fläche unstetig ist; es ist sodann

$$\mathfrak{R}^\sigma = [\mathfrak{n}\cdot\{\mathfrak{U}_{II} - \mathfrak{U}_I\}].$$

Diese Gleichung ergibt sich aus einer Betrachtung, die mit der in Nr. **16** angewandten genau übereinstimmt; man geht dabei von der Formel $\mathfrak{R} = \operatorname{rot}\mathfrak{U}$, ebenso wie in jener Nummer von der Gleichung $\mathfrak{C} = c \operatorname{rot}\mathfrak{H}$ aus. In derselben Nummer ist auch die Bedeutung von $\mathfrak{n}$ erklärt.

Es falle nun die Grenzfläche zwischen der einen Kondensator-

(1901), p. 327; Sur l'existence des courants ouverts, Par. C. R. 132 (1901), p. 1108; siehe auch Ann. chim. phys. (7) 24 (1901), p. 85, 145 u. 299.

24) *H. Pender,* On the magnetic effect of electrical convection, Phil. Mag. (6) 2 (1901), p. 179.

25) *E. P. Adams,* The electromagnetic effects of moving charged spheres, Phil. Mag. (6) 2 (1901), p. 285.

26) Siehe auch die gemeinschaftlichen Untersuchungen von *Pender* u. *Crémieu,* Par. C. R. 136 (1903), p. 548 u. 955.

27) *W. C. Röntgen,* Über die durch Bewegung eines im homogenen elektrischen Felde befindlichen Dielektrikums hervorgerufene elektrodynamische Kraft, Ann. Phys. Chem. 35 (1888), p. 264. Siehe auch Ann. Phys. Chem. 40 (1890), p. 93.

28) *A. Eichenwald,* Über die magnetischen Wirkungen bewegter Körper im elektrostatischen Felde, Ann. Phys. Chem. (4) 11 (1903), p. 1, 421.

platte und dem Dielektrikum mit der xy-Ebene zusammen, und es liege das Dielektrikum auf der positiven Seite dieser Ebene. Ist das Feld homogen, mit $\mathfrak{D}$ parallel zu OZ, und besteht die Bewegung in einer Rotation um OZ, wir wollen sagen in positiver Richtung, so ist im Dielektrikum der Vektor $\mathfrak{U}$ senkrecht zur z-Achse, nach derselben hin gerichtet, und es ist $|\mathfrak{U}| = \mathfrak{D}_z \cdot |\mathfrak{w}|$. Daraus folgt, daß an der Grenzfläche $\mathfrak{R}^\sigma$ dieselbe Größe hat und entgegengesetzt zu $\mathfrak{w}$ gerichtet ist. Andererseits hat der Konvektionsstrom, der ebenfalls ein Flächenstrom ist, die Richtung von $\mathfrak{w}$, und die Größe $\omega\,|\mathfrak{w}|$, wenn ω die Flächendichte der Ladung auf der Platte ist. Da nun $\omega = \mathfrak{D}_z$, so sind die beiden Ströme gleich und entgegengesetzt.

Zu bemerken ist hierbei, daß bei den gemachten Annahmen im Inneren des Dielektrikums $\mathfrak{R} = 0$, und daß ebenso an der seitlichen Begrenzungsfläche des Dielektrikums, wenn diese die Gestalt eines Cylinders um OZ hat, $\mathfrak{R}^\sigma = 0$.

18. Der magnetische Strom und die unipolare Induktion. Dualität zwischen den elektrischen und den magnetischen Erscheinungen. Wenn kein Leitungsstrom vorhanden ist, besteht nach den Gleichungen (I′) und (II′) dieselbe Beziehung zwischen der magnetischen Kraft und $\dot{\mathfrak{D}}$, wie zwischen der elektrischen Kraft und $-\dot{\mathfrak{B}}$, eine Übereinstimmung, die sich einfach ausdrücken läßt, wenn man $\dot{\mathfrak{B}}$ den *magnetischen Strom* nennt. Diese sich in der Form der Gleichungen kundgebende Dualität, die vollkommen sein würde, wenn es auch „magnetische Leitungsströme“ und im Zusammenhang damit wahren Magnetismus gäbe, hat besonders *Heaviside* hervorgehoben. Dieser Physiker hat sogar in seinen mathematischen Untersuchungen oft eine eingeprägte Kraft $\mathfrak{H}^e$ angenommen, sodaß er (V) durch

$$\mathfrak{B} = \mu(\mathfrak{H} + \mathfrak{H}^e) \tag{38}$$

ersetzt, und auch einen der Summe $\mathfrak{H} + \mathfrak{H}^e$ proportionalen magnetischen Leitungsstrom [29]). *Hertz* hat ebenfalls den Parallelismus zwischen den elektrischen und den magnetischen Erscheinungen hervorgehoben; indem er sich dadurch führen ließ, gelangte er in einer seiner älteren Abhandlungen [30]) in sehr bemerkenswerter Weise zu den Formeln der *Maxwell*’schen Theorie.

---

29) *O. Heaviside,* Electrical papers 1, p. 441, 449, 451—455. Siehe auch *A. Föppl,* Einführung in die *Maxwell*’sche Theorie, § 80.

30) *H. Hertz,* Über die Beziehungen zwischen den *Maxwell*’schen elektrodynamischen Grundgleichungen und den Grundgleichungen der gegnerischen Elektrodynamik, Ann. Phys. Chem. 23 (1884), p. 84. (Schriften vermischten Inhalts, p. 295.)

Der magnetische Strom $\dot{\underline{\mathfrak{B}}}$ zerfällt nach den Gleichungen (14) und (34) in die beiden Ströme $\dot{\mathfrak{B}}$ und

$$\mathrm{rot}\,[\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{w}].$$

Die zu diesem letzteren Strom gehörenden elektrischen Kräfte kommen in den Erscheinungen der unipolaren Induktion zum Vorschein. Man betrachte z. B. eine Metallmasse M, welche die Gestalt eines Rotationskörpers mit der Achse OZ hat und sich in einem um OZ symmetrischen magnetischen Felde befindet; die Richtungen von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ mögen an jeder Stelle in der Meridianebene liegen. Dieser Körper, den man sich permanent, temporär, oder auch gar nicht, magnetisiert denken kann, rotiere um OZ mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit g; außerhalb des Körpers sei alles in Ruhe, sodaß ein stationärer Zustand entsteht. Es ist dann $\dot{\mathfrak{B}} = 0$, also

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\,\mathrm{rot}\,[\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{w}].$$

Hieraus folgt, daß für jede geschlossene Linie das Linienintegral von $\mathfrak{E}$ mit dem des Vektors $-\frac{1}{c}[\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{w}]$ übereinstimmt. Tritt der Integrationsweg im Punkte A in den Körper M hinein und verläßt er denselben wieder im Punkte B, so ergibt sich für das Linienintegral der Wert

$$\frac{g}{2\pi c}\Big[\int\limits_B \mathfrak{B}_z\,d\sigma - \int\limits_A \mathfrak{B}_z\,d\sigma\Big],$$

wo die beiden Integrale sich auf die Flächen der durch B und A gehenden Parallelkreise beziehen.

In Verbindung mit den Widerständen bestimmt dieser Ausdruck die Stärke des Stromes, der in einem von B nach A führenden Schließungsdraht entsteht. Ist aber ein solcher nicht vorhanden, so beachten wir, daß für jede die Oberfläche nicht schneidende Linie das Integral $\int \mathfrak{E}_s\,ds$ verschwindet, und daß also die elektrische Kraft in dem äußeren Raum von einem Potential φ abhängt. Da weiter im stationären Zustande im Inneren des Körpers $\underline{\mathfrak{E}} = 0$ und also auch $\mathfrak{E} = 0$ sein wird, so läßt sich das Linienintegral für die oben betrachtete den Körper durchsetzende Linie durch $\varphi_B - \varphi_A$ ersetzen. Der für das Integral gefundene Wert liefert also jetzt die Potentialdifferenzen auf der Oberfläche. Von diesen kann man zur Bestimmung des äußeren elektrischen Feldes und der Ladung auf der Oberfläche übergehen.

Das elektrische Analogon zu dem magnetischen Strom $\mathrm{rot}\,[\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{w}]$ ist der *Röntgen*strom. Hätte *Röntgen* mit einer permanenten statt mit

einer temporären (influenzierten) elektrischen Polarisation gearbeitet, so wäre die von ihm beobachtete Erscheinung genau das Gegenstück zu der unipolaren Induktion gewesen.

Auch in einer eigentümlichen von *Rowland* entwickelten Theorie[31]), über die hier nicht weiter berichtet werden kann, tritt die Reziprozität zwischen den elektrischen und den magnetischen Erscheinungen in den Vordergrund.

19. Permanente Magnete. Im Fall dieser Körper ist man weit von der in der Gleichung (V) ausgedrückten Beziehung entfernt; wie diese zu modifizieren sei, läßt sich ohne genauere Kenntnis der physikalischen Eigenschaften nicht sagen. In vielen Fällen wird man mit einer gewissen Annäherung (V) durch $\mathfrak{M} = \text{const.}$, d. h. $\mathfrak{B} - \mathfrak{H} = \text{const.}$, oder durch $\mathfrak{B} = \text{const.}$ ersetzen dürfen, wobei die Konstanz wohl am besten so zu verstehen ist, daß man $\underline{\dot{\mathfrak{M}}} = 0$ oder $\underline{\dot{\mathfrak{B}}} = 0$ setzt. *Heaviside* bedient sich, um das Verhalten von Stahlmagneten zu beschreiben, eines großen konstanten $\mathfrak{H}^e$ in der Gleichung (38).

Der Auffassung von *Hertz* würde es entsprechen, wenn man für permanente Magnete die solenoidale Verteilung von $\mathfrak{B}$ fallen ließe und sich vorstellte, daß hier für jede substantielle geschlossene Fläche $\int \mathfrak{B}_n d\sigma$ einen im allgemeinen von 0 verschiedenen unveränderlichen Wert hat, m. a. W. wenn man im Inneren dieser Körper eine gewisse Verteilung von an der Materie haftendem „wahren Magnetismus“ (Nr. **15**) annähme; es wäre dann noch eine Relation zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ hinzuzufügen. Indes ist diese Auffassung von der hier gewählten, nach welcher wahrer Magnetismus nicht bestehen soll, im Grunde kaum verschieden. Gälte nämlich von $\int \mathfrak{B}_n d\sigma$ das soeben Gesagte, so könnte man einen neuen Vektor $\mathfrak{B}^p$ einführen, derart, daß $\underline{\dot{\mathfrak{B}}}^p = 0$ und daß für jede geschlossene Fläche $\int \mathfrak{B}_n^p d\sigma$ mit $\int \mathfrak{B}_n d\sigma$ übereinstimmt. Setzt man dann weiter $\mathfrak{B} - \mathfrak{B}^p = \mathfrak{B}'$, so wird $\operatorname{div} \mathfrak{B}' = 0$; es läßt sich in der Hauptgleichung (II′) $\underline{\dot{\mathfrak{B}}}$ durch $\underline{\dot{\mathfrak{B}}}'$ ersetzen und es verwandelt sich die Relation zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ in eine solche zwischen $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{H}$. Die Gleichungen haben am Ende wieder die von uns gewählte Form, nur daß überall bei $\mathfrak{B}$ ein Strich steht.

---

31) *H. A. Rowland,* On the general equations of electromagnetic action, with application to a new theory of magnetic attractions, and to the theory of the magnetic rotation of the plane of polarization of light, Am. J. of math. 3 (1880), p. 89.

20. Versuche von Blondlot. Von der Besprechung spezieller Erscheinungen, für deren Theorie die *Hertz*'schen Gleichungen die Grundlage liefern können, muß hier abgesehen werden. Es möge jedoch noch eine theoretische Folgerung erwähnt werden, die *Blondlot* experimentell geprüft hat.

Zwei parallele, durch einen Metalldraht D verbundene Metallplatten P und Q befinden sich in einem konstanten magnetischen Felde, dessen Richtung den Platten parallel ist. Ein homogenes und isotropes Dielektrikum, das den Raum zwischen den Platten ganz füllt, bewegt sich parallel zu denselben und senkrecht zu $\mathfrak{H}$ mit der überall gleichen Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$. Zur Zeit t befinde sich ein Teilchen des Dielektrikums in einem beliebigen Punkt A der Platte P, AB sei das von hier aus auf Q gefällte Lot; indem diese Linie sich mit dem Dielektrikum verschiebt, erreicht sie zur Zeit $t + dt$ die neue Lage $A'B'$. Man ergänze AB zu einem geschlossenen Weg durch eine im Metall von B durch D nach A zurücklaufende Linie und wende auf diesen Weg, der, als substantielle Linie aufgefaßt, im nächsten Augenblicke die Lage $A'B'BDAA'$ hat, die Gleichung (II) an, wobei es rechts offenbar auf das Integral $\int \mathfrak{B}_n d\sigma$ für das Rechteck $A'B'BA$ ankommt. Wählt man als positive Integrationsrichtung $ABDA$, so ergibt sich, wenn $\mu = 1$, $AB = l$ ist,

$$\int \mathfrak{E}_s ds = \pm \frac{1}{c} l \, |\mathfrak{H}| \, |\mathfrak{w}| ,$$

wobei das obere oder das untere Vorzeichen gilt, je nachdem die Richtung von A nach B mit der Richtung des Vektorproduktes $[\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{H}]$ übereinstimmt oder demselben entgegengesetzt ist.

Im stationären Zustande fließt im Leitungsdrahte kein Strom, sodaß in diesem $\mathfrak{E} = 0$. Zwischen den Platten, senkrecht zu denselben in der Richtung von A nach B, besteht dann also eine elektrische Kraft

$$\pm \frac{1}{c} |\mathfrak{H}| \, |\mathfrak{w}| .$$

Dieser entspricht eine elektrische Erregung

$$\pm \frac{\varepsilon}{c} |\mathfrak{H}| \, |\mathfrak{w}| .$$

Die Platten P und Q haben daher Ladungen von den Flächendichten

$$\pm \frac{\varepsilon}{c} |\mathfrak{H}| \, |\mathfrak{w}| \quad \text{und} \quad \mp \frac{\varepsilon}{c} |\mathfrak{H}| \, |\mathfrak{w}| ,$$

die im Momente, wo die Bewegung anfing oder das Magnetfeld erregt wurde, durch einen Strom im Verbindungsdraht entstanden sein

müssen. *Blondlot*[32]) hat, indem er als das Dielektrikum Luft wählte, und diese mit großer Geschwindigkeit zwischen den Platten hindurchblies, vergeblich versucht, diesen elektrischen Strom zu beobachten. Es spricht dies gegen die Annahme, daß das ganze Dielektrikum zwischen den Platten sich mit der Geschwindigkeit der Luft bewegt habe und somit überhaupt gegen die bisher gegebene Theorie, soweit sie bewegte Medien betrifft.

21. Fortpflanzung des Lichtes. Aberration. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit transversaler elektrischer Schwingungen und also für die Geschwindigkeit des Lichtes in ruhenden isotropen Nichtleitern liefert die Theorie den Wert

$$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{39}$$

Dieser ist unabhängig von der Periode, und es kann daher die Theorie in der Gestalt, wie sie hier dargestellt wurde, von der Dispersion des Lichtes nicht Rechenschaft geben. Soll sie auch diese, sowie andere optische Erscheinungen in ponderabelen Körpern umfassen, so ist es nötig, die Beziehung zwischen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ — für die Metalle auch die Beziehung zwischen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{J}$ — in passender Weise abzuändern, wie von vielen Forschern bereits getan worden ist.

Es gibt indeß *eine* optische Erscheinung, für welche in dem geschilderten Erklärungssystem kein Platz gefunden werden kann. Es ist dies die von *Fizeau*[33]) festgestellte Tatsache, daß eine strömende Flüssigkeit Lichtwellen, die sich in der Richtung des Stroms fortpflanzen, nicht mit der ganzen Stromgeschwindigkeit mitführt, mit anderen Worten, daß die relative Geschwindigkeit des Lichtes in Bezug auf die *strömende* Materie von der Geschwindigkeit im ruhenden Mittel verschieden ist. Daß hierin für die *Hertz*'sche Theorie eine unüberwindliche Schwierigkeit liegt, springt sofort in die Augen. Hat *Alles*, was sich an der Fortpflanzung des Lichtes beteiligt (Nr. 2) — es sei dies bloß ponderabele Materie oder ponderabele Materie und Äther — eine gemeinschaftliche Translation, dann können die im Inneren des Körpers stattfindenden Vorgänge in keiner Weise davon beeinflußt werden.

Was die astronomische Aberration betrifft, so läßt sich diese,

32) *R. Blondlot,* Sur l'absence de déplacement électrique lors du mouvement d'une masse d'air dans un champ magnétique, Par. C. R. 133 (1901), p. 778.

33) *H. Fizeau,* Sur les hypothèses relatives à l'éther lumineux, et sur une expérience qui paraît démontrer que le mouvement des corps change la vitesse avec laquelle la lumière se propage dans leur intérieur, Par. C. R. 33 (1851), p. 349; *A. A. Michelson* u. *E. W. Morley,* Am. J. of Sc. (3) 31 (1886), p. 377.

allerdings unter einer gewissen Voraussetzung, aus der Theorie ableiten. *Stokes*[34]) hat eine Erklärung dieser Erscheinung versucht, indem er annahm, daß die Erde bei ihrer jährlichen Bewegung den umgebenden Äther in Bewegung setze, sodaß an allen Punkten der Erdoberfläche die Geschwindigkeit des Äthers mit der Geschwindigkeit der Erde übereinstimmt, und daß bei dieser Bewegung des Äthers ein Geschwindigkeitspotential χ existiere. Diese Annahmen widersprechen sich, wenn man den Äther als inkompressibel voraussetzt[35]). *Planck*[36]) hat aber gezeigt, daß sich durch die Hypothese einer beträchtlichen Kondensation des Äthers um die Erde herum, wie sie durch eine von der Erde ausgehende Anziehung bewirkt werden könnte, die Geschwindigkeit des Gleitens an der Erdoberfläche bei einer wirbelfreien Ätherbewegung in beliebigem Grade verkleinern läßt. Die Grundgleichungen führen dann sofort zu der beobachteten Aberration, wenn man die Bewegung als stationär betrachtet, Glieder von der Ordnung $\frac{\mathfrak{w}^2}{c^2}$ vernachlässigt, und annimmt, daß sogar eine Vergrößerung der Ätherdichte auf mehr als das Fünfzigtausendfache ohne Einfluß auf die elektromagnetischen Erscheinungen ist.

Am einfachsten gestaltet sich die Theorie[37]), wenn man zu neuen Variabelen übergeht. Die Form der Gleichungen (I'), (II') und (14) legt es nahe, für den bewegten Äther die neuen Vektoren

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{w}] \tag{40}$$

und

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} - \frac{1}{c}[\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{w}] \tag{41}$$

einzuführen. Zu gleicher Zeit nehmen wir ein an der Translation der Erde teilnehmendes Koordinatensystem an und verstehen unter $\mathfrak{w}$ die relative Geschwindigkeit in Bezug auf dieses System. Ersetzt man nun — in der Voraussetzung, daß $\mathfrak{w} = \operatorname{grad} \chi$ und χ unabhängig von t sei — die Zeit t durch die neue Variabele

---

34) *G. G. Stokes,* On the aberration of light, Phil. Mag. (3) 27 (1845), p. 9 (Mathematical and physical papers, Cambridge 1880, 1, p. 134); *Lorentz,* De aberratietheorie van *Stokes,* Zittingsverslag Amsterdam Akad. v. Wet. 1 (1892), p. 97.

35) *Lorentz,* Over den invloed dien de beweging der aarde op de lichtverschijnselen uitoefent, Verslagen en Mededeelingen Amsterdam Akad. v. Wet. (3) 2 (1886), p. 297 (Arch. néerl. 21 (1887), p. 103).

36) Mitgeteilt in *Lorentz*, De aberratietheorie van *Stokes* in de onderstelling van een aether die niet overal dezelfde dichtheid heeft, Zittingsverslag Amsterdam Akad. v. Wet. 7 (1899), p. 523 (Proceedings Amsterdam Akad. 1898—1899, p. 443).

37) *Lorentz,* (s. vorige Anm.) Zittingsverlag, p. 528 (Proceedings, p. 447)

(42) $$t' = t + \frac{1}{c^2}\chi,$$

dann wird die Gestalt der Differentialgleichungen, denen $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$ als Funktionen von x, y, z und t' zu genügen haben, unabhängig von der Bewegung. Aus diesem Umstande ergibt sich leicht eine Erklärung der Aberration[38]).

IV. Allgemeine Folgerungen und Theoreme.

22. Energie. Poynting'scher Satz. Wir führen einen neuen Vektor ein, dessen Bedeutung sich bald ergeben wird, nämlich

(XI) $$\mathfrak{S} = c[\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{H}].$$

Aus (I') und (II') folgt alsdann unter Berücksichtigung von (III'') und (IV''):

(XII) $$(\mathfrak{E}^{el} \cdot \mathfrak{J}) + (\mathfrak{E}^{ev} \cdot \dot{\underline{\mathfrak{D}}}) = ((\sigma')\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{J}) + ((\varepsilon')\mathfrak{D} \cdot \dot{\underline{\mathfrak{D}}}) + (\mathfrak{H} \cdot \dot{\underline{\mathfrak{B}}}) + \operatorname{div}\mathfrak{S}.$$

Man multipliziere diese Gleichung mit dS, und wende sie zunächst auf ein *ruhendes* System an. Enthält ein Teil eines solchen Systems freien Äther, so wird für ein Raumelement dieses Teiles

$$((\varepsilon')\mathfrak{D} \cdot \dot{\mathfrak{D}})\,dS = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mathfrak{D}^2)\,dS;$$

es ist dies als die Zunahme pro Zeiteinheit einer im Äther vorhandenen Energiemenge zu betrachten, da sich aus der elementaren Behandlung elektrostatischer Fälle der Wert der Energie in einem elektrischen Felde zu $\frac{1}{2}\mathfrak{D}^2$ pro Volumeneinheit des freien Athers ergibt. Man darf hieraus schließen, daß im allgemeinen (XII) die auf die Zeiteinheit bezogene *Energiegleichung* ist, und es wird klar, wie die einzelnen Glieder zu deuten sind.

a) Die links stehenden Glieder stellen die (mit der *Peltier*'schen Wärme, der Änderung der chemischen Energie u. s. w. zusammenhängende) Arbeit der elektromotorischen Kräfte vor.

b) Soll $((\varepsilon')\mathfrak{D} \cdot \dot{\underline{\mathfrak{D}}})$ oder, da das betrachtete System ruht, $((\varepsilon')\mathfrak{D} \cdot \dot{\mathfrak{D}})$ die Zunahme einer von $\mathfrak{D}$ abhängigen Energiemenge bedeuten können, so muß sein[39])

(43) $$\varepsilon'_{12} = \varepsilon'_{21}, \quad \text{u. s. w.}; \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}, \quad \text{u. s. w.}$$

Die *elektrische Energie* pro Volumeneinheit beträgt sodann

(XIII) $$W_e = \tfrac{1}{2}((\varepsilon')\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{D}) = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}^{tv} \cdot \mathfrak{D}),$$

oder

(XIII') $$W_e = \tfrac{1}{2}(\varepsilon'_{11}\mathfrak{D}_x^2 + \text{u. s. w.} + 2\varepsilon'_{12}\mathfrak{D}_x\mathfrak{D}_y + \text{u. s. w.}).$$

---

38) Vgl. den folgenden Art., Nr. 58.

39) *Maxwell,* Treatise 1, art. 101 f.

c) In derselben Weise zeigt die Betrachtung des Gliedes $(\mathfrak{H}\cdot\dot{\underline{\mathfrak{B}}})$, daß, sofern die Relation (V′) gilt[40]),

(44) $$\mu'_{12}=\mu'_{21},\quad \text{u. s. w.};\quad \mu_{12}=\mu_{21},\quad \text{u. s. w.}$$

Die *magnetische Energie* ist pro Volumeneinheit

(XIV) $$W_m=\tfrac{1}{2}((\mu')\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{B})=\tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{B}),$$

oder

(XIV′) $$W_m=\tfrac{1}{2}(\mu'_{11}\mathfrak{B}_x^2+\text{u. s. w.}+2\mu'_{12}\mathfrak{B}_x\mathfrak{B}_y+\text{u. s. w.}).$$

Falls $\mathfrak{B}$ nicht durch den augenblicklichen Wert von $\mathfrak{H}$ bestimmt ist, läßt sich aus (XII) schließen, daß in einem ponderabelen Körper, der einen magnetischen Kreisprozeß durchläuft, sodaß $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ zu den Anfangswerten zurückkehren, eine Energiemenge, die für die Volumeneinheit

$$\int(\mathfrak{H}\cdot\dot{\mathfrak{B}})\,dt=\int(\mathfrak{H}\cdot d\mathfrak{B})=\int(\mathfrak{H}\cdot d\mathfrak{M})$$

beträgt, in irgend einer Form zum Vorschein kommt. Man hat dieses benutzt zur Berechnung der die magnetische Hysteresis begleitenden Wärmeentwicklung[41]).

d) Die von einem Leitungsstrom entwickelte Wärme (*Joule'sche Wärme*) ist für die Volumen- und die Zeiteinheit in Arbeitseinheiten

(XV) $$Q=((\sigma')\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{J})=\sigma'_{11}\mathfrak{J}_x^2\ \text{u. s. w.}+[\sigma'_{12}+\sigma'_{21}]\mathfrak{J}_x\mathfrak{J}_y+\text{u. s. w.}$$

e) Die Gleichung (XII) hat jetzt folgende Bedeutung. Die Änderung der in dem Elemente dS enthaltenen Energie läßt sich aus der Arbeit der elektromotorischen Kräfte berechnen, wenn man die Vorstellung hinzufügt, daß eine Energiemenge $\operatorname{div}\mathfrak{S}\cdot dS$ das Element durch seine Oberfläche hin verläßt. Diese Energieströmung ist also, wie *Poynting* zuerst hervorgehoben hat[42]), durch den Vektor $\mathfrak{S}$ bestimmt; die in der Zeiteinheit durch ein Element $d\sigma$ strömende Energie ist $\mathfrak{S}_n d\sigma$.

Den Vektor $\mathfrak{S}$ nennen wir daher den *Energiefluß* oder den *Strahlvektor*[43]).

---

40) *W. Thomson* (Lord *Kelvin*), Reprint of papers on electrost. a. magn., p. 480.

41) *E. Warburg*, Ann. Phys. Chem. 13 (1881), p. 141.

42) *J. H. Poynting*, On the transfer of energy in the electromagnetic field, London Trans. 175 (1884), p. 343. Siehe auch *Heaviside*, Electrical papers 1, p. 437—441, 449, 450; *W. Wien*, Über den Begriff der Lokalisierung der Energie, Ann. Phys. Chem. 45 (1892), p. 685; *Kr. Birkeland*, Über die Strahlung elektromagnetischer Energie im Raume, Ann. Phys. Chem. 52 (1894), p. 357; *G. Mie*, Entwurf einer allgemeinen Theorie der Energieübertragung, Wien. Sitz.-Ber., math. naturw. Kl. (IIa) 107 (1898), p. 1113.

43) Wir wählen letzteren Namen, weil bei der Fortpflanzung des Lichtes in einem beliebigen durchsichtigen Körper der Energiefluß in der Richtung des *Lichtstrahls* stattfindet.

23. Ponderomotorische Kräfte. Die auf geladene Körper, Stromleiter, Magnete u. s. w. wirkenden ponderomotorischen Kräfte wurden von *Faraday*[44]) und *Maxwell*[45]) als die Folge innerer Spannungen im Felde aufgefaßt. An seine Gleichungen für bewegte Körper knüpft nun *Hertz*[46]) eine Ableitung der Spannungen auf Grund des Energiegesetzes an. Wir wollen diese hier mit einiger Abänderung wiedergeben und es soll dabei angenommen werden, daß auch in bewegten Körpern die elektrische Energie, die magnetische Energie und die Wärmeentwicklung mittels der angeführten Formeln berechnet werden können, daß auch jetzt noch $\mathfrak{S}$ den Energiefluß, und zwar den Fluß relativ zur Materie angebe, und daß die Arbeit der elektromotorischen Kräfte durch die linke Seite von (XII) bestimmt wird. Der zu den Spannungen führende Gedankengang ist dann folgender. Man berechnet für ein substantielles Raumelement dS und pro Zeiteinheit einerseits die Arbeit p der elektromotorischen Kräfte, andererseits die Summe q der *Joule*'schen Wärme, der hinausströmenden Energie und der Zuwächse an elektrischer und magnetischer Energie. Für einen ruhenden Körper wäre $p = q$. Jetzt trifft das nicht mehr zu, und der Unterschied $q - p$ muß eben mit den ponderomotorischen Kräften zusammenhängen.

Bezeichnet man üblicherweise mit X_x, X_y u. s. w. die Spannungskomponenten, nimmt man an, es wirke auf dS eine äußere ponderomotorische Kraft $\mathfrak{F}^e dS$ und ein äußeres Kräftepaar $\mathfrak{N}^e dS$, und berücksichtigt man, daß $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{w}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{w}_y}{\partial z}\right)$, u. s. w. die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit des Elementes sind, so erhält man für die Gesamtarbeit, welche pro Zeiteinheit von den äußeren ponderomotorischen Wirkungen, sowie von den auf die Oberfläche des Elementes wirkenden Spannungen geleistet wird,

$$\left\{\mathfrak{F}^e_x \mathfrak{w}_x + \text{u. s. w.} + \frac{1}{2}\mathfrak{N}^e_x\left(\frac{\partial \mathfrak{w}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{w}_y}{\partial z}\right) + \text{u. s. w.}\right\} dS$$

$$+ \left\{\frac{\partial}{\partial x}(X_x \mathfrak{w}_x + Y_x \mathfrak{w}_y + Z_x \mathfrak{w}_z) + \text{u. s. w.}\right\} dS.$$

Dieser Wert läßt sich nun zerlegen in die drei folgenden Ausdrücke, welche einzeln den drei Teilbewegungen des Elementes dS, Parallelverschiebung, Drehung und Formänderung entsprechen:

---

44) *Faraday,* Exp. researches, 1, art. 1297, 1298; 3, art. 3266, 3267, 3268.
45) *Maxwell,* Treatise, part 1, chap. 5 (vol 1); part 4, chap. 11 (vol 2).
46) *Hertz,* Ann. Phys. Chem 41 (1890), p. 389 (Untersuchungen u. s. w., p. 275).

(45) $$\left\{\mathfrak{F}_x^e + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right\} \mathfrak{w}_x dS + \text{ u. s. w.},$$

(46) $$\frac{1}{2}\left\{\mathfrak{N}_x^e + Z_y - Y_z\right\}\left(\frac{\partial \mathfrak{w}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{w}_y}{\partial z}\right) dS + \text{ u. s. w.},$$

und

(47) $$\{X_x \dot{x}_x + \text{ u. s. w. } + \tfrac{1}{2}(X_y + Y_x)\dot{x}_y + \text{ u. s. w.}\} dS.$$

Was die Bedeutung von $\dot{x}_x$, $\dot{x}_y$ u. s. w. betrifft, vergleiche man Nr. 4h).

Da $\left(\mathfrak{F}_x^e + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) dS$ u. s. w. die Komponenten der resultierenden Kraft sind und $(\mathfrak{N}_x^e + Z_y - Y_z) dS$ u. s. w. diejenigen des resultierenden Kräftepaares (das übrigens aus bekannten Gründen verschwinden muß), so entspricht der Summe von (45) und (46) der Zuwachs der kinetischen Energie der Materie; es muß daher (47) der Differenz $q - p$ gleich sein. Diese letztere läßt sich nun aus der Gleichung (XII) ableiten. Multipliziert man diese mit dS, so kommt links die Arbeit der elektromotorischen Kräfte, rechts im ersten Gliede die Wärmentwicklung und im vierten Gliede die Energiemenge, welche das Element durch die Oberfläche hin verläßt, während man im zweiten Gliede $(\varepsilon')\mathfrak{D}$ durch $\mathfrak{E}^{tv}$ ersetzen kann. Da sich weiter mit Hülfe von (16) für die Zunahme der Energie

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}^{tv} \cdot \mathfrak{D}) dS + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{B}) dS$$

der Wert

$$\tfrac{1}{2}\{(\underline{\dot{\mathfrak{E}}}^{tv} \cdot \mathfrak{D}) + (\mathfrak{E}^{tv} \cdot \underline{\dot{\mathfrak{D}}})\} dS + \tfrac{1}{2}\{(\underline{\dot{\mathfrak{H}}} \cdot \mathfrak{B}) + (\mathfrak{H} \cdot \underline{\dot{\mathfrak{B}}})\} dS$$

ergibt, so erhält man für die gesuchte Differenz

(48) $$q - p = \tfrac{1}{2}\{(\underline{\dot{\mathfrak{E}}}^{tv} \cdot \mathfrak{D}) - (\mathfrak{E}^{tv} \cdot \underline{\dot{\mathfrak{D}}})\} dS + \tfrac{1}{2}\{(\underline{\dot{\mathfrak{H}}} \cdot \mathfrak{B}) - (\mathfrak{H} \cdot \underline{\dot{\mathfrak{B}}})\} dS.$$

Hier setze man nach (18) und (19)

$$(\underline{\dot{\mathfrak{E}}}^{tv} \cdot \mathfrak{D}) - (\mathfrak{E}^{tv} \cdot \underline{\dot{\mathfrak{D}}}) = (\dot{\mathfrak{E}}^{tv}_{(r)} \cdot \mathfrak{D}) - (\mathfrak{E}^{tv} \cdot \dot{\mathfrak{D}}_{(r)}) + (\dot{x}_x - \dot{y}_y - \dot{z}_z)\mathfrak{E}_x^{tv}\mathfrak{D}_x + \text{u. s. w.}$$
$$+ \dot{x}_y(\mathfrak{E}_x^{tv}\mathfrak{D}_y + \mathfrak{E}_y^{tv}\mathfrak{D}_x) + \text{ u. s. w.}$$

Die beiden ersten Glieder rechts zusammengenommen lassen sich in einfacher Weise deuten. Wir wollen dabei die zweite der Gleichungen (III''), deren linke Seite $\mathfrak{E}^{tv}$ ist, anwenden und also $\mathfrak{E}^{tv}$ als Funktion von $\mathfrak{D}$ auffassen, wobei indes zu beachten ist, daß die im Laufe der Zeit stattfindende Deformation des Elementes dS eine Änderung der Koeffizienten ε' herbeiführt. Von dem zur Zeit t bestehenden Zustande gehen wir jetzt in *drei* Schritten zu dem zur Zeit $t + dt$ erreichten Zustande über. *Erstens* lassen wir das Element sich *nur* verschieben und um die Winkel $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{w}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{w}_y}{\partial z}\right) dt$, u. s. w. drehen und stellen uns vor, daß die Vektoren $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}^{tv}$ die Drehung mitmachen; wir denken uns, daß die Koordinatenachsen das eben-

falls tun, so daß nach wie vor die Relation (III'') mit ungeänderten ε' besteht. *Zweitens* lassen wir den Vektor $\mathfrak{D}$ werden wie er zur Zeit $t + dt$ wirklich ist; $\mathfrak{E}^{tv}$ möge, gebunden an (III'') mit ungeänderten ε', dieser Änderung folgen. *Drittens* soll, indem jetzt die Deformation stattfindet, auch $\mathfrak{E}^{tv}$ die tatsächlich zur Zeit $t + dt$ bestehende Richtung und Größe annehmen.

Die Änderung von $\mathfrak{D}$ beim zweiten Schritt ist eben $\dot{\mathfrak{D}}_{(r)} dt$, und für die Änderungen von $\mathfrak{E}^{tv}$ beim zweiten und dritten Schritt läßt sich schreiben

$$\{\dot{\mathfrak{E}}^{tv}_{(r)}\}_{\varepsilon'} dt \quad \text{und} \quad \{\dot{\mathfrak{E}}^{tv}\}_{\mathfrak{D}} dt,$$

wobei die angehängten Indices anzeigen sollen, daß man einmal die ε' und dann $\mathfrak{D}$ konstant hält. Schließlich ist

$$\dot{\mathfrak{E}}^{tv}_{(r)} = \{\dot{\mathfrak{E}}^{tv}_{(r)}\}_{\varepsilon'} + \{\dot{\mathfrak{E}}^{tv}\}_{\mathfrak{D}}.$$

Da nun wegen der Beziehungen (43)

$$(\{\dot{\mathfrak{E}}^{tv}_{(r)}\}_{\varepsilon'} \cdot \mathfrak{D}) - (\mathfrak{E}^{tv} \cdot \dot{\mathfrak{D}}_{(r)}) = 0,$$

so reduzieren sich die beiden Glieder, um die es sich handelt, auf $(\{\dot{\mathfrak{E}}^{tv}\}_{\mathfrak{D}} \cdot \mathfrak{D})$. Es ist dies das Doppelte der Zunahme, welche W_e pro Zeiteinheit erleiden würde, wenn dS nicht rotierte und $\mathfrak{D}$ unverändert bliebe, die Koeffizienten ε' aber die Änderungen erführen, welche durch die Deformationsgeschwindigkeiten $\dot{x}_x$ u. s. w., $\dot{x}_y$ u. s. w. verursacht werden. Wir bezeichnen *diese* Zunahme von W_e mit

$$\left(\frac{\partial W_e}{\partial x_x}\right)_{\mathfrak{D}} \dot{x}_x + \text{u. s. w.} + \left(\frac{\partial W_e}{\partial x_y}\right)_{\mathfrak{D}} \dot{x}_y + \text{u. s. w.}$$

Was die Koeffizienten in diesem Ausdruck betrifft, so ist zu bemerken, daß man z. B. den mit $\dot{x}_y$ multiplizierten erhalten würde, wenn man die durch eine unendlich kleine *rotationslose* Schiebung x_y, bei konstantem $\mathfrak{D}$, bewirkte Änderung von W_e durch die Größe der Schiebung dividierte.

Transformiert man das letzte Glied von (48) in ähnlicher Weise, indem man auch die Größen $\left(\frac{\partial W_m}{\partial x_x}\right)_{\mathfrak{B}}$ u. s. w., $\left(\frac{\partial W_m}{\partial x_y}\right)_{\mathfrak{B}}$ u. s. w. (für ein konstantes $\mathfrak{B}$ berechnet) einführt, so zeigt sich schließlich, daß (47) mit (48) übereinstimmt, wenn man annimmt:

$$\text{(XVI)} \quad X_x = \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{E}^{tv}_x \mathfrak{D}_x - \mathfrak{E}^{tv}_y \mathfrak{D}_y - \mathfrak{E}^{tv}_z \mathfrak{D}_z\} + \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_x - \mathfrak{H}_y \mathfrak{B}_y - \mathfrak{H}_z \mathfrak{B}_z\} + \left(\frac{\partial W_e}{\partial x_x}\right)_{\mathfrak{D}} + \left(\frac{\partial W_m}{\partial x_x}\right)_{\mathfrak{B}}, \text{ u. s. w.,}$$

$$\text{(XVII)} \quad \tfrac{1}{2}(X_y + Y_x) = \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{E}^{tv}_x \mathfrak{D}_y + \mathfrak{E}^{tv}_y \mathfrak{D}_x\} + \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_y + \mathfrak{H}_y \mathfrak{B}_x\} + \left(\frac{\partial W_e}{\partial x_y}\right)_{\mathfrak{D}} + \left(\frac{\partial W_m}{\partial x_y}\right)_{\mathfrak{B}}, \text{ u. s. w.}$$

Will man ungleiche Werte von X_y und Y_x u. s. w. zulassen, dann lassen die letzteren Formeln die tangentiellen Spannungen zum Teil unbestimmt. Indessen würden bei Ungleichheit von X_y und Y_x u. s. w. diese Spannungen ein auf dS wirkendes Kräftepaar hervorbringen, das durch ein äußeres Kräftepaar aufgehoben werden müßte. Wenn nun ein äußeres Kräftepaar nicht besteht, so wird man $X_y = Y_x$ u.s.w. setzen müssen. Die Gleichungen (XVII) liefern dann die Werte dieser Spannungskomponenten; sie stimmen, ebenso wie die Werte (XVI), mit dem Resultate von *Hertz* überein. Die andere Auffassung ist hier nur deshalb angeführt worden, weil *Maxwell*[47]) für die magnetischen Spannungskomponenten die Werte

$$X_y = \mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_y, \quad Y_x = \mathfrak{H}_y \mathfrak{B}_x \quad \text{u. s. w.}$$

angibt, und *Heaviside*[48]) zu den hiermit übereinstimmenden Formeln

$$X_y = \{\mathfrak{E}_x^{tv} \mathfrak{D}_y + \mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_y\}, \quad Y_x = \{\mathfrak{E}_y^{tv} \mathfrak{D}_x + \mathfrak{H}_y \mathfrak{B}_x\} \quad \text{u. s. w.}$$

gelangt. Allerdings sind diese, da *Heaviside* von den Gliedern $\left(\frac{\partial W_e}{\partial x_x}\right)_{\mathfrak{D}}$ u. s. w. absieht, mit (XVII) verträglich.

Wohl mit Unrecht hält *Heaviside* die von *Hertz* angegebenen Werte für unzulässig.

24. Beispiele für die Bestimmung der ponderomotorischen Kräfte. Daß die Formeln (XVI) und (XVII) zur Erklärung der tatsächlich beobachteten ponderomotorischen Wirkungen ausreichen, und wie sie z. B. der Theorie der Deformationen ponderabeler Körper im elektrischen und magnetischen Felde zu Grunde gelegt werden können, muß hier unerörtert bleiben (vgl. hierüber Art. V 16). Es mögen indes einige Beispiele angeführt werden. In denselben wird es sich jedesmal um die gleichzeitige Existenz zweier Zustände handeln, und um die infolge *dieses* Umstandes bestehende ponderomotorische Wirkung; eine eventuelle Wirkung im Fall, daß nur der eine oder der andere Zustand vorhanden wäre, wird von der Betrachtung ausgeschlossen. Unterscheidet man die beiden Zustände durch die Indices 1 und 2, so ist zu setzen $\mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_{1x} + \mathfrak{H}_{2x}$ u. s. w. Dieser Zerlegung der Zustandsgrößen entspricht eine Zerlegung der quadratischen Ausdrücke, welche wir für die Spannungskomponenten gefunden haben; wir brauchen nur diejenigen Glieder in denselben zu berücksichtigen, in welchen zwei Größen, die sich je auf einen der Zustände beziehen, miteinander multipliziert sind.

47) *Maxwell,* Treatise 2, art. 641.

48) *Heaviside,* Lond. Trans. 183 A. (1892), p. 423 (Electrical papers 2, p. 549); Electromagnetic theory 1, p. 84.

a) Wir betrachten wieder die Metallmasse M, von der in Nr. 18 die Rede war; dieselbe möge jetzt ruhen und von einem Strom i durchflossen werden, dessen Eintritts- und Austrittsstellen gleichmäßig über die Parallelkreise der Punkte A und B verteilt sind. Die Strömung ist dann symmetrisch in Bezug auf die Achse und findet überall in der Meridianebene statt.

Der erste Zustand sei derjenige, welcher bestehen würde, wenn der Strom nicht da wäre, der zweite der von letzterem selbst hervorgerufene. Da $\mathfrak{H}_1$ in der Meridianebene liegt und $\mathfrak{H}_2$ längs des Parallelkreises gerichtet ist, so erleidet der Körper seitens des umgebenden Mediums, wenn für letzteres $\mu = 1$ ist, eine tangentielle Spannung $\mathfrak{H}_{1n}\mathfrak{H}_2$. Ist nun ds ein Element des Parallels, ds' ein Element des Meridians, r die Entfernung von der z-Achse, so ergibt sich für das resultierende Drehungsmoment um diese

$$\int \mathfrak{H}_{1n} r\, ds' \int \mathfrak{H}_{2s}\, ds.$$

Das Integral $\int \mathfrak{H}_{2s} ds$ ist nur für die zwischen A und B liegenden Parallelkreise von 0 verschieden; für diese hat es den Wert $\frac{i}{c}$, wenn die Strömung im Körper nach der Seite der positiven z stattfindet. Das Drehungsmoment wird demzufolge

$$\frac{i}{2\pi c} \int \mathfrak{H}_{1n}\, d\sigma,$$

wo sich das Integral über den Teil der Oberfläche zwischen den Kreisen A und B erstreckt. Das Resultat gilt auch dann, wenn der Ein- und Austritt des Stromes auf einzelne Punkte A und B, in derselben Meridianebene, konzentriert ist.

b) Ein gerader, der y-Achse paralleler Leitungsdraht werde in der Richtung der positiven y von einem Strome i durchflossen. Das umgebende Medium sei der freie Äther und in demselben bestehe ein homogenes Magnetfeld $\mathfrak{H}_1$ in der Richtung der z-Achse. Auf die Oberfläche des Drahtes wirkt in Richtung der x-Achse die Spannung

$$\tfrac{1}{2}\{(\mathfrak{H}_x^2 - \mathfrak{H}_y^2 - \mathfrak{H}_z^2) \cos(n, x) + 2\mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_z \cos(n, z)\}.$$

Demzufolge existiert eine resultierende Kraft in dieser Richtung. Wenn s der Umlauf eines senkrechten Querschnittes und $\mathfrak{H}_2$ die von dem Strome i selbst herrührende magnetische Kraft ist, dann ergibt sich für die Kraft pro Längeneinheit

$$\mathfrak{F}_x = \mathfrak{H}_{1z} \int \{-\mathfrak{H}_{2z} \cos(n, x) + \mathfrak{H}_{2x} \cos(n, z)\}\, ds = \mathfrak{H}_{1z} \int \mathfrak{H}_{2s}\, ds = \frac{1}{c}\, i\, \mathfrak{H}_{1z},$$

ein sehr bekanntes Resultat.

c) Die vorstehende Formel ist auch dann anwendbar, wenn i

ein Verschiebungsstrom ist. Beständе in dem Zylinder eine überall gleich große elektrische Erregung $\mathfrak{D}_y$ in der Richtung von OY, und änderte sich diese mit der Zeit, so wäre, wenn Σ die Fläche des senkrechten Querschnitts bedeutet,

$$\mathfrak{F}_x = \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{D}}_y \mathfrak{H}_{1z} \Sigma. \tag{49}$$

d) Wegen des Parallelismus zwischen den elektrischen und den magnetischen Größen, der sich auch in den Gleichungen (XVI) und (XVII) ausspricht, gilt ein der Gleichung (49) analoger Satz für die Kraft, welche ein von einem magnetischen Strom durchflossener Zylinder von einem äußeren elektrischen Felde erfährt. Es bestehe in dem Zylinder ein mit der Zeit veränderliches $\mathfrak{B}_y$, und es sei $\mathfrak{E}_{1z}$ die äußere Feldstärke. Dann ist, wenn im umgebenden Medium $\varepsilon = 1$,

$$\mathfrak{F}_x = -\frac{1}{c} \dot{\mathfrak{B}}_y \mathfrak{E}_{1z} \Sigma. \tag{50}$$

Diese Kraft, deren Existenz sich übrigens kaum experimentell würde nachweisen lassen, nennt *Poincaré* die *Hertz*'sche Kraft[49]). In der Tat hat *Hertz*[50]) schon 1884 die Behauptung ausgesprochen, es müsse eine solche Wirkung geben. Er ging dabei von dem Prinzip der Gleichheit der Aktion und Reaktion aus; nach demselben muß der bekannten von einem Körper mit veränderlichem $\mathfrak{B}$ ausgeübten elektrischen Kraft eine Wirkung eines geladenen Systems auf einen solchen Körper gegenüberstehen.

e) Die infolge der Spannungen auf ein Volumelement wirkende Kraft sei $\mathfrak{F} dS$. Man findet für den freien Äther, wenn man sich in diesem eine elektrische Ladung vorstellt und jetzt um der Allgemeinheit willen $\operatorname{div} \mathfrak{H}$ nicht $= 0$, sondern $= \varrho_m$ setzt,

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{F}_x &= \varrho \mathfrak{E}_x + \varrho_m \mathfrak{H}_x \\ &+ \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{1}{dS} \frac{d}{dt} (\mathfrak{S}_x dS) + \mathfrak{S}_x \frac{\partial \mathfrak{w}_x}{\partial x} + \mathfrak{S}_y \frac{\partial \mathfrak{w}_y}{\partial x} + \mathfrak{S}_z \frac{\partial \mathfrak{w}_z}{\partial x} \right\}, \end{aligned}\right. \tag{51}$$

u. s. w.

Um zu dieser Gleichung zu gelangen, führe man in die Ausdrücke $\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}$ u. s. w. die für den Äther geltenden Werte

$$X_x = \tfrac{1}{2} (\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2) + \tfrac{1}{2} (\mathfrak{H}_x^2 - \mathfrak{H}_y^2 - \mathfrak{H}_z^2), \text{ u. s. w.},$$

$$X_y = \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y + \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_y, \text{ u. s. w.}$$

ein. Es ergibt sich dann mit Rücksicht auf (VI′)

$$\mathfrak{F} = \varrho \mathfrak{E} + \varrho_m \mathfrak{H} + [\operatorname{rot} \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{E}] + [\operatorname{rot} \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{H}],$$

---

49) *Poincaré*, Electricité et optique, 2e édit., p. 410—420.

50) *Hertz*, l. c. 30), p. 87 (Schriften vermischten Inhalts, p. 297).

oder, wenn man (II') und (I') benutzt,

$$\mathfrak{F} = \varrho \mathfrak{E} + \varrho_m \mathfrak{H} - \frac{1}{c} [\dot{\underline{\mathfrak{H}}} \cdot \mathfrak{E}] + \frac{1}{c} [\dot{\underline{\mathfrak{E}}} \cdot \mathfrak{H}].$$

Hier führe man für $\dot{\underline{\mathfrak{H}}}$ und $\dot{\underline{\mathfrak{E}}}$ die Werte ein, welche sich aus den mit (14) gleichbedeutenden Formeln

$$\dot{\underline{\mathfrak{A}}}_x = \frac{d\mathfrak{A}_x}{dt} + \operatorname{div} \mathfrak{w} \cdot \mathfrak{A}_x - \mathfrak{A}_x \frac{\partial \mathfrak{w}_x}{\partial x} - \mathfrak{A}_y \frac{\partial \mathfrak{w}_x}{\partial y} - \mathfrak{A}_z \frac{\partial \mathfrak{w}_x}{\partial z}$$

u. s. w.

ergeben, und beachte die Gleichung (XI), sowie den Umstand, daß $\frac{d}{dt}(dS) = \operatorname{div} \mathfrak{w} \cdot dS$.

25. Bemerkung zur Definition der elektrischen und der magnetischen Kraft. Soll die auseinandergesetzte Theorie keine inneren Widersprüche enthalten, so muß sie folgender Bedingung genügen. Bringt man in einen Punkt des freien Äthers, wo die elektrische Kraft $\mathfrak{E}$ und die magnetische Kraft $\mathfrak{H}$ besteht, eine unendlich kleine Ladung e bezw. einen Magnetpol von der unendlich kleinen Stärke m an, so muß die darauf wirkende Kraft $e\mathfrak{E}$ bezw. $m\mathfrak{H}$ sein. Man kann das wirklich aus den Gleichungen ableiten, wenn man sich e oder m als am Ather haftend vorstellt[51]). Auch jetzt hat man es wieder (vgl. Nr. 24) mit zwei superponierten Feldern, dem bereits bestehenden 1 und dem etwa durch die im Punkte P konzentrierte Ladung e hervorgebrachten Felde 2 zu tun. Legt man um P eine Kugel mit unendlich kleinem Radius r, so darf man annehmen, daß in jedem Punkte Q derselben $\mathfrak{E}_2$ die Richtung PQ und die Größe $\frac{e}{4\pi r^2}$ hat, und daß daselbst $\mathfrak{H}_2 = 0$; in der unmittelbaren Umgebung von P wird ja das Feld 2 dasselbe sein, als wenn das ganze System sich mit der in P bestehenden Geschwindigkeit bewegte, also auch dasselbe als wenn alles ruhte, nur daß das Feld sich jetzt mit P fortbewegt. Die Kraft auf P ergibt sich als die Resultierende der elektrischen Spannungen auf der Kugelfläche.

26. Bewegungen des Äthers. Für den freien Ather, in welchem $\varrho = 0$, $\varrho_m = 0$, verschwindet die Kraft $\mathfrak{F}$ nicht, sogar nicht, wenn $\mathfrak{w} = 0$. Es bleibt dann noch

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{c^2} \dot{\mathfrak{S}} \tag{52}$$

oder

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{c} [\dot{\mathfrak{E}} \cdot \mathfrak{H}] + \frac{1}{c} [\mathfrak{E} \cdot \dot{\mathfrak{H}}]. \tag{53}$$

51) Vgl. die Bemerkungen von *Boltzmann*, Vorlesungen u. s. w. 2, p. 13—15.

In dem zweiten Teil dieses letzteren Ausdrucks erkennt man die *Hertz*'sche Kraft (Nr. 24 d)) wieder, während der erste Teil der Kraft (49) entspricht.

Während also in stationären Feldern die Spannungen den Äther selbst in Ruhe lassen, trifft dieses in veränderlichen Feldern nicht mehr zu. Die Bewegungen des Äthers, die hierdurch entstehen könnten, — von denen sich freilich in den Beobachtungen nie etwas gezeigt hat — sind von verschiedenen Physikern diskutiert worden[52]).

27. Reziprozitäts- und Minimalsätze. Von diesen mögen hier nur einige, die für *ruhende* Systeme gelten, erwähnt werden.

a) *Elektrostatik.* Sind in einem mit gegebenen Nichtleitern gefüllten Raum $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ zwei nach der Theorie mögliche Verteilungen von $\mathfrak{D}$, so ist, mit Rücksicht auf (43)

$$\int((\varepsilon')\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_2)dS = \int((\varepsilon')\mathfrak{D}_2 \cdot \mathfrak{D}_1)dS, \tag{54}$$

wobei sich, sobald einer der Vektoren $(\varepsilon')\mathfrak{D}$ von einem Potential φ abhängt, das entsprechende Integral durch partielle Integration umformen läßt. Man kann diese Gleichung benutzen, um bei einem System von Konduktoren C, C', C'', u. s. w., die von beliebigen Nichtleitern umgeben sind, zwei Fälle, die wir durch die Indices 1 und 2 unterscheiden, zueinander in Beziehung zu setzen. Vorausgesetzt wird dabei, daß in beiden Fällen Gleichgewicht besteht.

α) Im einen Falle befinde sich eine elektrische Ladung in einem Punkte P des Dielektrikums, im anderen Falle eine Ladung von derselben Größe in einem Punkte Q, während für einige der Konduktoren in beiden Fällen $\varphi = 0$, für die anderen in beiden Fällen die Ladung 0 ist. Es ist sodann[53])

$$\varphi_{1(Q)} = \varphi_{2(P)}.$$

β) Das Dielektrikum sei ungeladen; es seien die Ladungen von C und C' in einem Falle e und 0, im anderen 0 und e, und es gelte für die übrigen Konduktoren das soeben Gesagte. Dann besteht die Relation[54])

$$\varphi_{1(C')} = \varphi_{2(C)}.$$

---

52) *v. Helmholtz*, Folgerungen aus *Maxwell's* Theorie über die Bewegungen des reinen Äthers, Ann. Phys. Chem. 53 (1894), p. 135; *W. Wien*, Über die Fragen, welche die translatorische Bewegung des Lichtäthers betreffen (Referat für die 70. Naturforscherversammlung, 1898, Beilage zu Ann. Phys. Chem. 65); *G. Mie*, Über mögliche Ätherbewegungen, Ann. Phys. Chem. 68 (1899), p. 129.

53) *Green*, An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism (1828), Papers p. 42—46.

54) Vgl. z. B. *Maxwell*, Treatise 1, art. 87.

γ) Im ersten Fall mögen die Konduktoren Ladungen haben, deren Flächendichte ω heiße; die nichtleitenden Körper seien ohne Ladung. Im zweiten Fall besteht an einer Stelle P des Dielektrikums die Ladung 1, während für jeden Konduktor die Ladung 0 ist, oder auch alle Konduktoren, oder einige von ihnen, durch beliebige ungeladene, nichtleitende Körper ersetzt sind. Unter diesen Voraussetzungen gilt

$$\varphi_{1(P)} = \int \varphi_2 \omega \, d\sigma,$$

wo das Integral sich auf die Oberflächen sämtlicher Leiter bezieht.

δ) Wenn in jedem Punkte des Dielektrikums der Wert von ϱ und für jeden Leiter die Ladung e gegeben ist, dann ist die nach (XIII) berechnete Energie kleiner für den wirklichen Zustand als für jede andere Verteilung von $\mathfrak{D}$, die den Bedingungen $\operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho$ in jedem Punkte des Feldes, und $\int \mathfrak{D}_n d\sigma = e$ für die Oberfläche jedes Leiters genügt[55]).

b) *Stationäre Ströme.* Es sei ein System leitender Körper gegeben, in welchen elektromotorische Kräfte wirksam sind. Bestehen die Gleichungen $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, u. s. w., so gilt für zwei Strömungszustände $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ die Beziehung

$$\int ((\sigma')\mathfrak{J}_1 \cdot \mathfrak{J}_2) dS = \int ((\sigma')\mathfrak{J}_2 \cdot \mathfrak{J}_1) dS.$$

α) P und Q seien beliebige Punkte, h eine Richtung in P und k eine Richtung in Q. In einem Falle wirke eine elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}_1^{el}$ in einem den Punkt P enthaltenden unendlich kleinen Raume S_1, sodaß der Vektor $\int\limits_{S_1} \mathfrak{E}_1^{el} dS$ die Richtung h und die Größe a hat. In einem zweiten Falle bestehe eine elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}_2^{el}$ in einem den Punkt Q in sich schließenden unendlich kleinen Raume S_2; dabei hat der Vektor $\int\limits_{S_2} \mathfrak{E}_2^{el} dS$ die Richtung k und wieder die Größe a. Dann ergibt sich[56])

$$\mathfrak{J}_{1k(Q)} = \mathfrak{J}_{2h(P)}.$$

β) Bestehen in dem System gegebene elektromotorische Kräfte, so ist die mit (XV) berechnete *Joule*'sche Wärme kleiner für den wirklichen Strom $\mathfrak{J}$ als für jeden anderen Strom, der an den Stellen, wo eine elektromotorische Kraft wirkt, mit dem wirklichen Strom übereinstimmt und übrigens der solenoidalen Verteilung genügt[57]).

---

55) *Maxwell,* Treatise 1, art. 100c.

56) Vgl. *Kirchhoff,* Ann. Phys. Chem. 72 (1847), p. 508.

57) Etwas spezieller bei *Maxwell,* Treatise 1, art. 283, 284.

c) *Das magnetische Feld gegebener Ströme.* Der Wert $\frac{1}{2}\int((\mu)\,\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{H})\,dS$ der magnetischen Energie ist für das wirkliche Feld kleiner als für jede andere Verteilung von $\mathfrak{H}$, die der Hauptgleichung (I) genügt.

d) *Variabele Zustände.* Allgemein gilt folgender Satz[58]), der dem *Poynting*'schen Theorem sowie dem *Green*'schen Satze verwandt ist. Ist σ irgend eine geschlossene Fläche in einem gegebenen System von Körpern, und bestehen in diesen zwei die Gleichungen (I) und (II) befriedigende Zustände 1 und 2, so ist, wenn man

$$\mathfrak{S} = c[\mathfrak{E}_1\cdot\mathfrak{H}_2],\quad \mathfrak{S}' = c[\mathfrak{E}_2\cdot\mathfrak{H}_1]$$

setzt,

$$\int\{\mathfrak{S}_n - \mathfrak{S}_n'\}\,d\sigma = \int\{(\mathfrak{E}_2\cdot\dot{\mathfrak{D}}_1) - (\mathfrak{E}_1\cdot\dot{\mathfrak{D}}_2)\}\,dS$$
$$+\int\{(\mathfrak{H}_1\cdot\dot{\mathfrak{B}}_2) - (\mathfrak{H}_2\cdot\dot{\mathfrak{B}}_1)\}\,dS.$$

28. Vektorpotential der magnetischen Erregung. Ist irgend ein Vektor $\mathfrak{P}$ *solenoidal* verteilt, so läßt sich immer ein zweiter Vektor $\mathfrak{Q}$ einführen, der mit demselben nach der Gleichung

$$\int\mathfrak{Q}_s\,ds = \int\mathfrak{P}_n\,d\sigma$$

zusammenhängt. Hierfür läßt sich auch schreiben

$$\mathfrak{P} = \operatorname{rot}\mathfrak{Q},$$

welche Formel zeigt, wie $\mathfrak{P}$ mittels der Differentialquotienten von $\mathfrak{Q}$ dargestellt werden kann. Man nennt $\mathfrak{Q}$ das *Vektorpotential* von $\mathfrak{P}$.

Da nun die magnetische Erregung immer solenoidal verteilt ist, so besteht für diese immer, auch in bewegten Systemen, ein Vektorpotential. Bezeichnet man dieses mit $\mathfrak{A}$, so hat man

(XVIII)
$$\int\mathfrak{A}_s\,ds = \int\mathfrak{B}_n\,d\sigma$$

und

(XVIII′)
$$\mathfrak{B} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}.$$

Für *ruhende* Systeme ergibt sich nun aus (II′) folgende einfache und oft benutzte Darstellung der elektrischen Kraft:

(XIX)
$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{A}} - \operatorname{grad}\varphi,$$

wo φ eine skalare Größe (skalares Potential) ist.

Zu der Formel (XVIII) möge noch bemerkt werden, daß zwar die magnetische Erregung $\mathfrak{B}$ in jedem Punkte eines elektromagnetischen Systems bestimmte Richtung und Größe hat, daß aber der

58) *Lorentz,* Het theorema van *Poynting* over de energie in het electromagnetisch veld, enz. Zittingsverslag Amsterdam Akad. 4 (1895), p. 176.

Gleichung durch verschiedene Vektoren $\mathfrak{A}$ genügt werden kann. Diesen Vektoren entsprechen dann auch verschiedene Funktionen φ. Sonst könnte ja die Gleichung (XIX) die in jedem Punkte völlig bestimmte elektrische Kraft nicht darstellen. Um die Unbestimmtheit von $\mathfrak{A}$ und φ zu heben, kann man der Gleichung (XVIII) irgend eine weitere Bedingung hinzufügen. Hat man es z. B. mit einem System stationärer Ströme in ruhenden nicht magnetisierten Körpern zu tun, so setzt man füglich

$$\text{div}\,\mathfrak{A} = 0. \tag{55}$$

Aus der Gleichung

$$\text{rot rot}\,\mathfrak{A} = \frac{1}{c}\mathfrak{C}, \tag{56}$$

die aus (I′) und (XVIII′), in Verbindung mit $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ hervorgeht, ergibt sich dann zur Bestimmung von $\mathfrak{A}$

$$\Delta \mathfrak{A}_x = -\frac{1}{c}\mathfrak{C}_x \quad \text{u. s. w.}$$

Es ist indes oft überflüssig, eine Bedingung wie (55) anzunehmen; man kann $\mathfrak{A}$ teilweise unbestimmt lassen.

Das Vektorpotential spielt in manchen Theorien eine bedeutende Rolle; in den ursprünglichen Gleichungen von *Maxwell* begegnet man ihm oft. Für einen nichtleitenden Kristall z. B., dessen Hauptachsen mit den Koordinatenachsen zusammenfallen und dessen elektrische und magnetische Eigenschaften durch $\mathfrak{D}_x = \varepsilon_1 \mathfrak{E}_x$ u. s. w., $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ definiert sind, lauten seine Formeln [59]):

$$\Delta \mathfrak{A}_x - \frac{\partial}{\partial x}(\text{div}\,\mathfrak{A}) = \frac{\varepsilon_1}{c}\left\{\frac{1}{c}\ddot{\mathfrak{A}}_x + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}\right\} \quad \text{u. s. w.}$$

Diese Beziehungen gehen sofort aus (56) und (XIX) hervor.

29. Änderung der magnetischen Energie bei unendlich kleiner Änderung des elektrischen Stromes. Ohne etwas an der Lage der Materie und an den Werten der Koeffizienten μ zu ändern, variieren wir den Zustand unendlich wenig. Es ergibt sich zunächst aus (XIV) und (44)

$$\delta\int W_m\, dS = \int (\delta\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{B})\, dS,$$

also, wenn man ein Vektorpotential $\mathfrak{A}$ der magnetischen Erregung einführt, und die aus (I′) folgende Beziehung $\text{rot}\,\delta\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\delta\mathfrak{C}$ beachtet,

$$\delta\int W_m\, dS = \int (\delta\mathfrak{H}\cdot \text{rot}\,\mathfrak{A})\, dS = \int (\mathfrak{A}\cdot \text{rot}\,\delta\mathfrak{H})\, dS = \frac{1}{c}\int (\mathfrak{A}\cdot\delta\mathfrak{C})\, dS. \tag{57}$$

---

59) *Maxwell,* Treatise 2, art. 794.

Man beachte hierbei, daß wegen der solenoidalen Verteilung von $\delta\mathfrak{E}$ das letzte Integral von der Unbestimmtheit von $\mathfrak{A}$ unberührt bleibt.

30. Elektrische und magnetische Erregungslinien. In jedem Vektorfelde — in einem variabelen Felde zunächst für einen bestimmten Augenblick — lassen sich Linien ziehen, die an allen Stellen die Richtung des Vektors $\mathfrak{Q}$ angeben (*Richtungslinien*); dieselben lassen sich weiter zu unendlich dünnen *Richtungsröhren* zusammenfassen. Wir ziehen die Linien in solchem Maße gedrängt, daß jede Röhre an jeder Stelle

$$n = N\,|\mathfrak{Q}|\,d\sigma \tag{58}$$

Richtungslinien enthält, wo $d\sigma$ der senkrechte Querschnitt der Röhre und N eine ein für allemal festgesetzte sehr große Zahl ist. Es ist üblich, diesen Faktor in vielen Aussagen fortzulassen; dies gewährt den Vorteil, daß man einfach

$$\int \mathfrak{Q}_n \, d\sigma$$

als die Anzahl der die Fläche σ nach der positiven Seite hin durchsetzenden Richtungslinien bezeichnen kann.

Die gemachte Festsetzung erfordert, daß man an verschiedenen Stellen neue Richtungslinien anfangen oder bereits gezogene endigen läßt, und zwar bestimmt der Ausdruck

$$N \operatorname{div} \mathfrak{Q} \cdot dS,$$

wenn er positiv ist, die Anzahl der Richtungslinien, welche in dS ihren Anfangspunkt, und wenn er negativ ist, die Zahl der Linien, welche daselbst ihren Endpunkt haben. Ist $\mathfrak{Q}$ solenoidal verteilt, so gibt es weder Anfangs- noch Endpunkte.

In der Elektrizitätslehre ist von *Stromlinien*, *elektrischen Erregungslinien* („Verschiebungslinien") und *magnetischen Erregungslinien* („magnetische Induktionslinien") die Rede; diese Linien beziehen sich auf die Vektoren $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$.

Mit Hilfe derselben lassen sich jetzt die Hauptgleichungen (I) und (II) in einfacher Weise in Worten ausdrücken, indem man z. B. sagt, das Linienintegral der elektrischen Kraft für eine geschlossene substantielle Linie ergebe sich, wenn man die pro Zeiteinheit stattfindende Abnahme der Zahl der von dieser Linie umfaßten magnetischen Erregungslinien mit c dividiert. Es werden somit die Erregungslinien oder „Kraftlinien", wie sie oft genannt werden (weil in isotropen Körpern die Richtungen von $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$ mit denen von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ zusammenfallen), ein wertvolles Mittel für die Forschung. *Faraday* hat sich derselben mit Vorliebe bedient.

Bei variabelen Zuständen kann man sich zunächst denken, daß man für jede neue Zeit die Figur der Erregungslinien wieder neu entwirft. Man kann sich indes die Frage stellen, ob und in welcher Weise es möglich sei, die für die Zeit $t + dt$ geltende Figur aus der für die Zeit t erhaltenen durch eine kontinuierliche Bewegung hervorgehen zu lassen. Diesen Punkt hat *W. Wien* untersucht[60]).

Die Idee einer Bewegung der Erregungslinien, und zwar einer Mitführung derselben durch die Materie, liegt in gewissem Sinne den *Hertz*'schen Gleichungen für bewegte Körper zu Grunde. Hafteten z. B. die magnetischen Erregungungslinien einfach an der Materie, so wäre offenbar $\underline{\dot{\mathfrak{B}}} = 0$. Man kann daher die Gleichung (II′) dahin deuten, daß die Gesamtänderung der magnetischen Erregungsfigur sich aus zwei Teilen zusammensetzt, deren einer in einer Mitführung durch die Materie besteht, während der andere mit der elektrischen Kraft zusammenhängt. Es handelt sich jetzt darum, diesen letzteren Teil als die Folge einer Bewegung der Linien, relativ zur Materie aufzufassen. Auf eine ähnliche Frage wird man bei der Betrachtung der elektrischen Erregungslinien geführt. Wir fangen mit diesem letzteren Problem an, wobei wir uns auf nicht-geladene Nichtleiter beschränken, sodaß $\operatorname{div} \mathfrak{D} = 0$ ist.

Man sieht leicht, daß eine Bewegung der elektrischen Erregungslinien, bei der sich die Punkte derselben mit den Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ verschieben ($\mathfrak{w}$ ist die Geschwindigkeit der Materie), der Aufgabe genügt, sobald für *jedes* Element $d\sigma$, das die Bewegung $\mathfrak{v}$ mitmacht, der Wert von $\mathfrak{D}_n d\sigma$ zur Zeit $t + dt$ derselbe ist wie zur Zeit t. Setzt man $\mathfrak{v} = \mathfrak{w} + \mathfrak{v}_e$, sodaß $\mathfrak{v}_e$ die relative Geschwindigkeit der *elektrischen* Erregungslinien in Bezug auf die Materie ist, so soll also, mit Rücksicht auf (14),

$$\dot{\mathfrak{D}} + \operatorname{rot}[\mathfrak{D} \cdot \{\mathfrak{w} + \mathfrak{v}_e\}] = 0$$

sein. Wegen (I′), wo

$$\mathfrak{J} = 0, \quad \underline{\dot{\mathfrak{D}}} = \dot{\mathfrak{D}} + \operatorname{rot}[\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{w}]$$

zu nehmen ist, soll daher

$$\operatorname{rot}[\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{v}_e] = - c \operatorname{rot} \mathfrak{H},$$

$$[\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{v}_e] = - c\mathfrak{H} + \operatorname{grad} \psi \tag{59}$$

werden, wo ψ eine skalare Funktion ist.

In derselben Weise ergibt sich für die relative Geschwindig-

---

60) *W. Wien*, Über die Bewegung der Kraftlinien im elektromagnetischen Felde, Ann. Phys. Chem. 47 (1892), p. 327.

keit $\mathfrak{v}_m$ der *magnetischen* Erregungslinien in Bezug auf die Materie die Bedingung

$$[\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{v}_m] = c\mathfrak{E} + \operatorname{grad} \chi . \tag{60}$$

Diese Gleichungen lassen, wie es in der Natur des Problems liegt, die Geschwindigkeit in der Richtung der Linien unbestimmt. Sieht man von dieser Unbestimmtheit ab und versteht von jetzt ab (in dieser Nummer) der Kürze wegen unter $\mathfrak{v}_e$ oder $\mathfrak{v}_m$ speziell die Geschwindigkeit senkrecht zu den Linien, so ergibt sich aus (60) — wir betrachten nur diese Gleichung weiter —, wenn man zu jedem Gliede das Vektorprodukt mit $\mathfrak{B}$ nimmt,

$$\mathfrak{B}^2 \mathfrak{v}_m = c[\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{B}] + [\operatorname{grad} \chi \cdot \mathfrak{B}] . \tag{61}$$

Es ist weiter zu bemerken, daß nach der Gleichung (60) der Vektor $c\mathfrak{E} + \operatorname{grad} \chi$ senkrecht zu $\mathfrak{B}$ steht. Es ist also, wenn man die magnetische Erregungslinie mit s bezeichnet,

$$\frac{\partial \chi}{\partial s} = - c\mathfrak{E}_s , \tag{62}$$

wodurch die Änderung der skalaren Funktion χ *längs* der Linie bestimmt wird. Nimmt man für jede Linie χ in Übereinstimmung mit dieser Bedingung an, und zwar in solcher Weise, daß auch in Richtungen senkrecht zu den Erregungslinien χ sich stetig ändert, so führt (61) zu zulässigen Werten der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_m$.

Eine Komplikation tritt ein, wenn man es mit einer *geschlossenen* Linie zu tun hat. Aus (62) folgt nämlich, wenn man längs einer solchen integriert,

$$\int \frac{\partial \chi}{\partial s} ds = - c \int \mathfrak{E}_s ds .$$

Das Integral rechts ist im allgemeinen nicht 0, und es ist daher χ eine unendlich vieldeutige Funktion mit der Periode $- c \int \mathfrak{E}_s ds$. Da nun diese von einer Erregungslinie zur anderen variiert, so erstreckt sich die Vieldeutigkeit auch auf die Komponenten von $\operatorname{grad} \chi$ senkrecht zu den Linien und nach (61) auf $\mathfrak{v}_m$. Es löst sich in diesem Falle die im Anfang geschlossene Erregungslinie in eine spiralförmige Linie auf. Ich erlaube mir hierbei die Bemerkung, daß die Aussage, die Richtungslinien solenoidal verteilter Vektoren seien geschlossene oder bis in unendliche Entfernung fortlaufende Linien, im allgemeinen nicht richtig ist. Schon in dem Felde eines konstanten linearen, nicht in einer Ebene liegenden Stromes sind die magnetischen Erregungslinien nicht geschlossen, ohne sich dennoch ins Unendliche zu entfernen[61]).

61) Das Gleiche gilt auch von den Richtungslinien anderer Vektoren, z. B.

Poynting[62]) hat die Bewegung der Erregungslinien in einigen speziellen Fällen untersucht. Später hat *J. J. Thomson*[63]) eine auf der Betrachtung der elektrischen Erregungslinien beruhende Theorie entwickelt, die in mancher Hinsicht von dem oben Gesagten verschieden ist. Indem er nämlich das Feld in viele einfachere Felder zerlegt, gelangt er dazu, sich an derselben Stelle sich durchkreuzende und sich durcheinander hin bewegende Erregungslinien vorzustellen, deren jede eine gewisse Selbständigkeit hat.

31. Bewegung der Erregungslinien in einfachen Fällen. a) Wenn sich in einem homogenen Nichtleiter ein geradlinig polarisiertes Lichtbüschel mit ebenen Wellen fortpflanzt, so steht $\mathfrak{H}$ senkrecht zu $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ senkrecht zu $\mathfrak{B}$; deshalb gibt es Werte von $\mathfrak{v}_e$ und $\mathfrak{v}_m$, für welche $\psi = \chi = 0$ (s. Gl. (62)). Es ist jetzt $(\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D}) = (\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{B})$ und den Gleichungen (59) und (60) wird durch die gemeinschaftliche Geschwindigkeit

$$\mathfrak{v}_e = \mathfrak{v}_m = c\frac{[\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{H}]}{(\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D})} = c\frac{[\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{H}]}{(\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{B})}$$

genügt. Man kann sich vorstellen, daß sich mit eben dieser Geschwindigkeit (Geschwindigkeit des *Strahls*) auch die im Raume vorhandene Energie verschiebt; es würde ja daraus gerade der Energiestrom $\mathfrak{S}$ resultieren.

Zu bemerken ist, daß in anisotropen Körpern die soeben angegebene Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_e$ oder $\mathfrak{v}_m$ *nicht* senkrecht zu $\mathfrak{D}$ oder $\mathfrak{B}$ steht.

b) Hat ein Körper eine konstante Translationsgeschwindigkeit und ist der Zustand des Feldes stationär in Bezug auf den Körper, so kann man die Anderungen des Feldes so auffassen, daß die Erregungslinien (deren Gestalt freilich eine andere sein wird als beim ruhenden Körper) mitgeführt werden. Ähnliches gilt von einem Körper mit konstanter Rotation. Wenn in letzterem Falle die Gestalt des Körpers und der Zustand desselben, sowie der des Feldes, symmetrisch um die Achse herum sind, dann kann man auch ebensogut die Linien in

von den Stromlinien in einer inkompressibelen Flüssigkeit. Daß übrigens Linien einen Lauf wie den hier besprochenen haben können, wird klar, wenn man sich z. B. auf der Oberfläche eines kreisförmigen Ringes eine Spirale in solcher Weise gezogen denkt, daß eine Windung durch eine zu π inkommensurable Rotation um die Achse des Ringes in die andere übergeht.

62) *Poynting,* On the connexion between the electric current and the electric and magnetic inductions in the surrounding field, London Trans. 176 (1885), p. 277.

63) *J. J. Thomson,* On the illustration of the properties of the electric field by means of tubes of electrostatic induction, Phil. Mag. (5) 31 (1891) p. 149; Recent researches, chapt. I.

Ruhe lassen. Die beiden Auffassungen sind gleichberechtigt, solange man von der Bewegung der Linien nur verlangt, daß sie die in einem Augenblicke bestehende Figur in die im nächsten Augenblick bestehende überführe.

32. Verschiedene Auffassungen der Hauptgleichungen. In manchen Fällen liegt es nahe, ein magnetisches Feld als durch elektrische Ströme *hervorgebracht* zu betrachten und andererseits in der Änderung eines magnetisches Feldes die *Ursache* der dieselbe begleitenden Induktionsströme zu erblicken. Jedoch ist diese Auffassung eine willkürliche. Gleichberechtigt und in besserer Übereinstimmung mit der Gestalt der Hauptgleichungen ist eine andere, die darin besteht, daß man die zeitlichen Anderungen von $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$ als durch $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$ bedingt ansieht. Überdies kann man, in Anbetracht der Beziehungen (III), (IV) und (V), nachdrücklicher als es im vorhergehenden geschehen ist, hervorheben, daß der Zustand in jedem Punkte bereits durch *zwei* Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ bestimmt ist, und die drei übrigen $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{B}$ zu mathematischen Hilfsgrößen herabsetzen. Zu bemerken ist noch, daß bei der zweiten der soeben genannten Auffassungen nicht nur das Glied $\operatorname{rot}\mathfrak{H}$, sondern auch das Glied $\frac{1}{c}\mathfrak{J}$ in (I′) als Ausdruck einer Änderungsursache für $\mathfrak{D}$ anzusehen ist, und zwar zeigt es sich, wenn man $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{D}$ durch $\mathfrak{E}$ darstellt, daß man es hier mit einer Wirkung zu tun hat, vermöge welcher in einem Körper gemischter Natur eine elektrische Kraft, wenn sie nicht „von einem magnetischen Felde unterhalten wird“, mit einer von ihrem augenblicklichen Werte abhängigen Geschwindigkeit abnehmen muß.

Da die Gleichungen die zeitlichen Änderungen von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ als Funktionen dieser Vektoren selbst zu bestimmen gestatten, so wird man schließen, daß das Feld für jede Zeit eindeutig bestimmt und berechenbar ist, wenn man sich die Werte von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ für irgend eine Anfangszeit vorgibt. Die mathematisch strenge Durchführung dieses Schlusses würde allerdings noch manche Weiterungen verursachen.

V. Zusammenhang der Theorie mit den Prinzipien der Mechanik. Mechanische Analogien und Bilder.

33. Anwendung der Prinzipien der Mechanik. Von fundamentaler Bedeutung ist die Frage, ob es möglich sei, die elektromagnetischen Erscheinungen „mechanisch“ zu erklären, d. h. ob man jedem elektromagnetischen System ein nach den Gesetzen der Mechanik

sich bewegendes Massensystem in der Weise zuordnen könne, daß jeder Zustandsgröße im elektromagnetischen System fortwährend eine bestimmte Größe im mechanischen System entspricht. Um diese Frage zur Entscheidung zu bringen, ist es nicht nötig, den Versuch mit bestimmten, ins einzelne gehenden Voraussetzungen über den Mechanismus zu machen; es genügt, zu untersuchen, ob sich die Erscheinungen mit Hilfe der allgemeinen Bewegungsgleichungen der Mechanik beschreiben lassen. Gelingt dieses, so wird man gewiß mechanische Erklärungen, und sogar mehr als eine[64]) konstruieren können, obgleich immerhin die Möglichkeit bestehen bleibt, daß dieselben, ihrer Kompliziertheit wegen, nur geringe Befriedigung gewähren.

In den Untersuchungen, über welche hier zunächst berichtet werden soll, wird die elektrische Energie als potentielle und die magnetische Energie als kinetische aufgefaßt. Damit ist gesagt, daß in einem elektrischen Felde materielle Teilchen aus ihren Gleichgewichtslagen verschoben seien und daß man es bei einem Strome und einem magnetischen Felde mit einer Bewegungserscheinung zu tun habe. Freilich sind hierbei unsichtbare Massen und verborgene Bewegungen gemeint.

Bei der genannten Auffassung der elektrischen Energie ordnet sich der Nr. 27, a), δ) erwähnte Satz dem Satze der Mechanik unter, nach welchem für jede Gleichgewichtslage die potentielle Energie des Systems ein Minimum sein muß.

34. Dynamische Theorie von Maxwell. *Maxwell*[65]) hat gezeigt, wie bei linearen Stromleitern die Gesetze der Induktion und der elektrodynamischen Wirkungen in die Form der *Lagrange*'schen Bewegungsgleichungen zusammengefaßt werden können. Als allgemeine Koordinaten führt er gewisse, die Lage der Leiter bestimmende Parameter p_m ein und außerdem für jeden Leiter eine Größe p_e, deren Änderungsgeschwindigkeit die Stromstärke repräsentiert. Aus experimentellen Ergebnissen wird geschlossen, daß die kinetische Energie Produkte eines $\dot{p}_m$ mit einem $\dot{p}_e$ nicht enthält. Auch die Koordinaten p_e kommen in dem Ausdruck der kinetischen Energie nicht vor; diese sind also *cyklische* Koordinaten. Auf die Analogie zwischen den elektromagnetischen Systemen und speziell den von *Helmholtz* untersuchten *cyklischen* Systemen der Mechanik haben später viele Autoren hingewiesen[66]).

---

64) *Poincaré*, Électricité et optique, Introduction.

65) *Maxwell*, Treatise, part 4 (vol 2), chap. VI, VII.

66) *Boltzmann*, Vorlesungen; *H. Ebert*, Zur Theorie der magnetischen und elektrischen Erscheinungen, Ann. Phys. Chem. 51 (1894), p. 268; Über die Be-

35. Allgemeine Betrachtungen. In Verfolgung der Ideen von *Maxwell* habe ich[67]) versucht, die Hauptgleichung (II) für beliebige bewegte Körper abzuleiten. Ich habe dabei das *d'Alembert*'sche Prinzip in der Form

$$\delta A = \frac{d}{dt}(\delta' T) - \delta T \tag{63}$$

zu Grunde gelegt. Hier bezieht sich das Zeichen δ auf unendlich kleine Variationen der bei der wirklichen Bewegung aufeinanderfolgenden Lagen. Diese virtuellen Verrückungen sollen mit den im System bestehenden Zusammenhängen verträglich sein (*mögliche* Verrückungen) und sich kontinuierlich in der Zeit ändern. Unter der *variierten* Bewegung möge eine Bewegung verstanden werden, bei der die variierten Lagen zu denselben Zeiten erreicht werden, wie die entsprechenden ursprünglichen Lagen bei der wirklichen Bewegung. Mit δT wird der Unterschied zwischen der kinetischen Energie der variierten und der wirklichen Bewegung bezeichnet, mit δA die Arbeit der Kräfte bei der virtuellen Verrückung und mit $\delta' T$ die Zunahme, welche die kinetische Energie erleiden würde, wenn, bei ungeänderter Lage, die rechtwinkligen Geschwindigkeitskomponenten der materiellen Punkte diejenigen Änderungen erführen, welche infolge der virtuellen Verrückung die entsprechenden rechtwinkligen Koordinaten erleiden.

Für die Gültigkeit der Gleichung (63) ist es nicht nötig, daß die variierte Bewegung eine mögliche, d. h. eine die Zusammenhänge nicht verletzende sei. Im allgemeinen ist sie das nur bei den Systemen, die *Hertz*[68]) *holonom* nennt.

In der Anwendung auf elektromagnetische Vorgänge stößt man auf eine Schwierigkeit, die daher rührt, daß man einerseits, um zu den Feldgleichungen zu gelangen, die für holonome Systeme geltenden Sätze anwenden muß, und daß es andererseits fraglich bleibt, ob man mit wirklich holonomen Systemen ein Bild der elektromagnetischen Erscheinungen konstruieren könne. Der Punkt, wo diese Schwierigkeit liegt, möge zunächst bezeichnet werden.

Das einzige uns zu Gebote stehende Mittel, eine Lagenänderung der unsichtbaren Teilchen im elektromagnetischen Felde zu bewirken, besteht, neben einer eventuellen Verrückung der ponderabelen Materie, darin, daß man dieselbe in einer der in Nr. 5, d) unterschiedenen Weisen, oder in beiden zugleich, von Elektrizität durchströmt werden

---

wegungsformen, welche den elektromagnetischen Erscheinungen zu Grunde gelegt werden können, Ann. Phys. Chem. 52 (1894), p. 417.

67) *Lorentz,* La théorie électromagnétique, §§ 55—61.

68) *Hertz,* Die Prinzipien der Mechanik, p. 91.

läßt. Es liegt daher nahe anzunehmen, daß eine von einer bestimmten Lage ausgehende unendlich kleine Verrückung vollständig bestimmt ist, sobald man die Verrückung der Materie kennt, und für jedes substantielle Flächenelement die Elektrizitätsmenge, von der es durchflossen wird, gegeben ist. Die Geschwindigkeiten aller Massenpunkte und die kinetische Energie T des Systems müssen daher von den Geschwindigkeiten der Materie und den Komponenten der Ströme $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{B}'$ (Nr. 5) abhängen. Es soll vorausgesetzt werden, daß der magnetische Teil von T — nur auf diesen hat man Rücksicht zu nehmen — bei jeder möglichen Bewegung den Wert $\int W_m \, dS$ hat, wo für W_m der Ausdruck (XIV) einzusetzen ist, nachdem man $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ mit Hilfe der Gleichungen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \mathfrak{C}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0, \quad \mathfrak{B} = (\mu) \mathfrak{H}$$

aus dem Strome $\mathfrak{C}$ abgeleitet hat. Daß, bei gegebenem Strömungszustande, T gerade den so berechneten Wert hat, ist in der Verteilung der Massen und in den Zusammenhängen des Systems begründet.

Es seien nun $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ die bei der wirklichen Bewegung zu den Zeiten t und $t + dt$ erreichten Lagen, $(\mathfrak{L}_1)$ und $(\mathfrak{L}_2)$ die entsprechenden Lagen in der variierten Bewegung. Die Lagenänderungen $\mathfrak{L}_1 \longrightarrow \mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_1 \longrightarrow (\mathfrak{L}_1)$, $\mathfrak{L}_2 \longrightarrow (\mathfrak{L}_2)$ sind dann sämtlich durch gewisse Verrückungen der Materie und durch bestimmte Elektrizitätsmengen, von welchen die substantiellen Flächenelemente $d\sigma$ in der ersten und der zweiten Weise durchflossen worden sind, charakterisiert. Sollte nun die Bewegung $(\mathfrak{L}_1) \longrightarrow (\mathfrak{L}_2)$ eine mögliche sein, so müßte es gelingen, von $(\mathfrak{L}_1)$ aus alle Teilchen des Feldes in ihre zu $(\mathfrak{L}_2)$ gehörige Lage dadurch überzuführen, daß man die Teilchen der Materie auf unendlich kurzen geraden Wegen in diese Lage bringt und zu gleicher Zeit bestimmte Elektrizitätsmengen durch die Elemente $d\sigma$ hindurchtreibt. Bei näherer Überlegung erweist sich die Hypothese, daß dies immer möglich sei, als kaum haltbar und hierin besteht eben die Schwierigkeit, von der soeben die Rede war.

Um dieselbe zu umgehen, soll nun zunächst eine Klasse von mechanischen Systemen definiert werden, die, ohne holonom zu sein, dennoch Bewegungsgleichungen von derselben Gestalt wie die für holonome Systeme geltenden zulassen. Es soll dann weiter die Hypothese eingeführt werden, daß die elektromagnetischen Systeme zu dieser Klasse gehören.

Jede unendlich kleine Lagenänderung eines materiellen Systems, welcher Art es auch sei, läßt sich dadurch beschreiben, daß man die Werte gewisser unendlich kleiner Größen angibt, die, wenn es sich um

eine virtuelle Verrückung handelt, α, α', α'', $\cdots$, und für ein Element der wirklichen Bewegung $a\,dt$, $a'dt$, $a''dt$, $\cdots$ heißen mögen, und die wir als „Verrückungskomponenten" bezeichnen können. Mögen nun zwischen diesen, wegen der Zusammenhänge des Systems, noch homogene lineare Bedingungsgleichungen bestehen oder nicht, jedenfalls sind die Änderungen der rechtwinkligen Koordinaten der einzelnen Punkte homogene lineare Funktionen von α, α', α'', $\cdots$ und die Geschwindigkeitskomponenten dieser Punkte eben dieselben Funktionen von a, a', a'', $\cdots$. Die kinetische Energie ist demzufolge eine homogene quadratische Funktion von a, a', a'', $\cdots$ und wenn man in dieser, ohne an den Koeffizienten etwas zu ändern, a, a', a'', $\cdots$ um α, α', α'', $\cdots$ zunehmen läßt, erhält man die mit $\delta' T$ bezeichnete Variation.

Bei der Anwendung der Gleichung (63) hat man sich die Verrückungskomponenten α, α', α'', $\cdots$ als stetige Funktionen der Zeit vorzustellen, die zu den Zeiten t und $t + dt$ etwa die Werte α_1, α_1', α_1'', $\cdots$ und α_2, α_2', α_2'', $\cdots$ haben.

Ein System möge nun *quasi-holonom* heißen, wenn die Zusammenhänge eine von der Lage $(\mathfrak{L}_1)$ ausgehende und in der Zeit dt stattfindende Bewegung zulassen, die durch die Werte $a\,dt + \alpha_2 - \alpha_1$, $\cdots$ der Verrückungskomponenten bestimmt ist, und wenn außerdem diese Bewegung, obgleich bei ihr die Lage $(\mathfrak{L}_2)$ vielleicht gar nicht genau erreicht wird, dennoch, was die kinetische Energie betrifft, mit der variierten Bewegung übereinstimmt. Für derartige Systeme gelten nun dieselben Gesetze, wie für ein wirklich holonomes System, und man kann auch für sie diese Gesetze in den gewöhnlichen Formen ausdrücken, wenn man gewisse Variabelen p einführt, als deren virtuelle bez. wirkliche Anderungen die Größen α, α', $\cdots$, $a\,dt$, $a'dt$, $\cdots$ betrachtet werden können. Für eine bei der Gleichung (63) in Betracht kommende wirkliche Lage $\mathfrak{L}$ definieren wir die p als die von einer beliebigen Anfangslage bis zu dieser Lage ausgedehnten Integrale $\int a\,dt$, $\int a'dt$, $\cdots$, während der entsprechenden variierten Lage $(\mathfrak{L})$ die Werte $p + \alpha$, $p' + \alpha'$, $\cdots$ zugeordnet werden mögen. Insofern nun jede Lage, von der die Rede ist, wenn man (63) auf eine bestimmte Bewegungserscheinung anwendet, durch bestimmte Werte p, p', $\cdots$ charakterisiert ist, kommt diesen der Name Koordinaten zu; damit soll aber nicht gesagt sein, daß bei Betrachtung *aller* Bewegungen, deren ein System fähig ist, die Größen p zur Bestimmung der Lagen dienen können.

Daß sich nun für ein quasi-holonomes System aus (63) Gleichungen ableiten lassen, die in der Form mit den Bewegungsgleichungen von

Lagrange oder mit dem Prinzip der kleinsten Wirkung übereinstimmen, braucht hier nicht ausführlich erörtert zu werden. Es kam nur darauf an, die Hypothese, welche jetzt über die Natur der elektromagnetischen Systeme gemacht werden soll, dahin zu formulieren, daß dieselben quasi-holonom seien und daß für die Größen α, α', $\cdots$, $a\,dt$, $a'dt$, $\cdots$ die Elektrizitätsmengen genommen werden dürfen, von welchen die substantiellen Flächenelemente durchströmt werden, und zwar sind hier immer die beiden Weisen, in welchen das geschehen kann, zu unterscheiden, sodaß, bei einem Körper gemischter Natur, für ein bestimmtes Element jedesmal *zwei* elektrische Verrückungskomponenten in Betracht kommen. Koordinaten sind also neben den Parametern, welche die Lage der Materie bestimmen, die Elektrizitätsmengen, welche von einem gewissen Anfangszustande an die Flächenelemente durchsetzt haben.

Wollen wir, wie das bei Anwendung der Gleichung (63) nötig ist, die kinetische Energie der variierten Bewegung berechnen, so denken wir uns, daß jedes substantielle Flächenelement im Laufe der Zeit dt von einer Elektrizitätsmenge $a\,dt + \alpha_2 - \alpha_1$ durchflossen wird. Unter $a\,dt$, α_1 und α_2 verstehen wir dabei die Mengen, welche das Element bei der wirklichen Bewegung in der Zeit dt, und bei den für die Zeiten t und $t + dt$ vorausgesetzten virtuellen Verrückungen durchsetzen.

Es möge schließlich noch hervorgehoben werden, daß wir die solenoidale Verteilung des Stromes als eine fundamentale Bedingung betrachten, welcher auch jede virtuelle Elektrizitätsbewegung zu genügen hat, und daß jede Elektrizitätsmenge, von der ein Element $d\sigma$ in der zweiten Weise durchflossen wird, als reelle oder virtuelle Änderung von $\mathfrak{D}_n d\sigma$ aufgefaßt werden kann.

36. Ableitung der zweiten Hauptgleichung. Um zu dieser zu gelangen, nehme ich noch an, daß der Widerstand der Leiter von gewissen Kräften herrühre, deren Arbeit sich in derselben Weise wie die einer elektromotorischen Kraft

$$\mathfrak{W} = -(\sigma')\,\mathfrak{J}$$

berechnen läßt.

Die Lage der Materie bleibe unvariiert, die Variation bestehe also bloß därin, daß die substantiellen Flächenelemente entweder in der ersten oder in der zweiten Weise von Elektrizitätsmengen $\mathfrak{c}_n d\sigma$ durchflossen werden, wo $\mathfrak{c}$ irgend ein unendlich kleiner solenoidal verteilter Vektor ist. Es sei dabei $\underset{\smile}{\mathfrak{c}} = 0$, d. h. es sei für jedes substantielle Flächenelement die elektrische Verrückungskomponente $\mathfrak{c}_n d\sigma$ unabhängig von der Zeit.

Für die Arbeit δA ist entweder

$$\delta A = \int (\mathfrak{E}^{el} \cdot \mathfrak{c})\, dS + \int (\mathfrak{W} \cdot \mathfrak{c})\, dS$$

oder

$$\delta A = \int (\mathfrak{E}^{ev} \cdot \mathfrak{c})\, dS - \delta \int W_e\, dS$$

zu setzen, und zwar ist die im letzten Gliede stehende Änderung der potentiellen Energie für $\delta \mathfrak{D} = \mathfrak{c}$ zu berechnen.

Da jetzt nach unseren Annahmen für jedes substantielle $d\sigma$ (vgl. den Schluß von Nr. **35**) $\alpha_2 = \alpha_1$, so wird $a dt + \alpha_2 - \alpha_1 = a dt$. Die für die variierte Bewegung in Betracht kommenden Stromkomponenten sind also dieselben wie die wirklichen Komponenten und es ergibt sich

$$\delta T = 0.$$

Weiter ist nach (57), wenn man mittelst (XVIII) ein Vektorpotential einführt,

$$\delta' T = \frac{1}{c} \int (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{c})\, dS.$$

Setzt man die angegebenen Werte von δA, δT und $\delta' T$ in (63) ein und berücksichtigt man, daß die Formel für jede solenoidale Verteilung von $\mathfrak{c}$ gelten muß, so gelangt man zu Gleichungen, die der mit (III'') und (IV'') verbundenen Hauptgleichung (II) äquivalent sind.

Bei der Ableitung hat man die Gleichungen (16) und (17) heranzuziehen. Nach der ersten ist, wegen $\underline{\dot{\mathfrak{c}}} = 0$,

$$\frac{d}{dt}(\delta' T) = \frac{1}{c} \int (\underline{\dot{\mathfrak{A}}} \cdot \mathfrak{c})\, dS.$$

37. Berechnung der ponderomotorischen Kräfte [69]. Bei einer zweiten Variation möge die Materie die unendlich kleinen Verrückungen $\mathfrak{q}$ erleiden, ein beliebiges substantielles Flächenelement aber weder in der ersten, noch in der zweiten Weise von Elektrizität durchflossen werden. Es ist dann $\underline{\delta \mathfrak{D}} = 0$, $\underline{\delta \mathfrak{E}} = 0$, $\delta' T = 0$. Die erste dieser Gleichungen geht daraus hervor, daß $\mathfrak{D}_n d\sigma$ sich nicht ändert, wenn das Element nicht in der zweiten Weise von Elektrizität durchflossen wird; die zweite rührt daher (vgl. den Schluß von Nr. **35**), daß für jedes Element $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ und also $a dt + \alpha_2 - \alpha_1 = a dt$ ist, und die dritte folgt gleichfalls (Nr. **35**) aus der Annahme, daß die elektrischen Verrückungskomponenten $\alpha = 0$ sind. Die elektromotorischen Kräfte und die Widerstände leisten bei der jetzt vorausgesetzten Variation keine Arbeit, und es ergibt sich daher, wenn man

69) Diese Berechnung kommt in meinen früheren Abhandlungen nicht vor.

mit U die potentielle (elektrische) Energie und mit $\mathfrak{F}^e$ die äußere ponderomotorische Kraft für die Volumeneinheit bezeichnet,

$$(64)\qquad \int (\mathfrak{F}^e \cdot \mathfrak{q})\, dS = \delta U_{(\underline{\delta \mathfrak{D}} = 0)} - \delta T_{(\underline{\delta \mathfrak{E}} = 0)}.$$

Hilfssatz. Berechnet man für bestimmte Verrückungen der Materie (mit den entsprechenden Änderungen der Koeffizienten μ) δT einmal in der Voraussetzung $\underline{\delta \mathfrak{E}} = 0$ und dann in der Voraussetzung $\underline{\delta \mathfrak{B}} = 0$, so ist

$$(65)\qquad \delta T_{(\underline{\delta \mathfrak{E}} = 0)} = - \delta T_{(\underline{\delta \mathfrak{B}} = 0)}.$$

Beweis. Man hat für jede Variation

$$\delta T = \delta T_{(\underline{\delta \mathfrak{B}} = 0)} + \int (\mathfrak{H} \cdot \underline{\delta \mathfrak{B}})\, dS.$$

Andererseits nach (XIV) und (7)

$$\delta T = \tfrac{1}{2} \int (\mathfrak{H} \cdot \underline{\delta \mathfrak{B}})\, dS + \tfrac{1}{2} \int (\mathfrak{B} \cdot \underline{\underline{\delta \mathfrak{H}}})\, dS.$$

Ist nun $\underline{\delta \mathfrak{E}} = 0$, so folgt aus (I′) und (9) $\operatorname{rot} \underline{\underline{\delta \mathfrak{H}}} = 0$ und

$$\int (\mathfrak{B} \cdot \underline{\underline{\delta \mathfrak{H}}})\, dS = \int (\operatorname{rot} \mathfrak{A} \cdot \underline{\underline{\delta \mathfrak{H}}})\, dS = \int (\mathfrak{A} \cdot \operatorname{rot} \underline{\underline{\delta \mathfrak{H}}})\, dS = 0.$$

Aus diesen Beziehungen folgt (65).

Die Werte von $\delta U_{(\underline{\delta \mathfrak{D}} = 0)}$ und $\delta T_{(\underline{\delta \mathfrak{B}} = 0)}$, auf die es jetzt bei der Berechnung von (64) ankommt, lassen sich in der folgenden, für beide Größen gleichen Weise ermitteln. Aus $\underline{\delta \mathfrak{D}} = 0$ ergibt sich nach (10) ein bestimmter Wert von $\delta_r \mathfrak{D}$ und es setzt sich dann weiter $\delta U_{(\underline{\delta \mathfrak{D}} = 0)}$ aus drei Teilen zusammen. Für den ersten findet man mit Rücksicht auf (XIII), (III″) und (43)

$$\int (\mathfrak{E}^{to} \cdot \delta_r \mathfrak{D})\, dS,$$

und für den zweiten

$$\int W_e \delta\, dS = \int W_e (x_x + y_y + z_z)\, dS.$$

Der dritte Teil ist

$$\int \delta_{\mathfrak{D}} W_e \cdot dS,$$

wo $\delta_{\mathfrak{D}} W_e$ die Anderung bedeutet, welche stattfinden würde, wenn das Element dS, bei konstant gehaltenem $\mathfrak{D}$ und ohne zu rotieren, die Deformationen $x_x, \cdots, x_y, \cdots$ erlitte. Drückt man diese letzteren Größen in den Differentialquotienten von $\mathfrak{q}_x, \mathfrak{q}_y, \mathfrak{q}_z$ nach den Koordinaten aus, schafft man dann diese Differentialquotienten mittels partieller Integration auf der rechten Seite von (64) fort und behandelt man $\delta T_{(\underline{\delta \mathfrak{B}} = 0)}$ in derselben Weise wie $\delta U_{(\underline{\delta \mathfrak{D}} = 0)}$, so erhält man schließlich

durch Gleichsetzung der beiderseitigen Koeffizienten von $\mathfrak{q}_x$, $\mathfrak{q}_y$, $\mathfrak{q}_z$ die Werte von $\mathfrak{F}_x^e$, $\mathfrak{F}_y^e$, $\mathfrak{F}_z^e$. Diese kann man auf die Form

$$\mathfrak{F}_x^e = -\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right), \cdots$$

bringen, wenn man darin für die Spannungskomponenten $X_x, \cdots$, $X_y, \cdots$ die in Nr. **23** gefundenen, durch die Gleichheiten $X_y = Y_x$ u. s. w. näher bestimmten Werte setzt.

Das Resultat stimmt also vollständig mit dem von *Hertz* erhaltenen überein. In der Tat bedeutet in unserer Ableitung $\mathfrak{F}$ die äußere Kraft, welche auf die Materie wirken muß, damit diese sich (unter dem Einflusse eventueller anderer Kräfte) so bewege, wie sie es tun würde, wenn keine elektromagnetischen Vorgänge stattfänden. M. a. W., $\mathfrak{F}$ ist die Kraft, welche den durch diese Vorgänge hervorgerufenen Spannungen das Gleichgewicht hält; $\mathfrak{F}$ muß daher mit diesen Spannungen in der in unserer letzten Gleichung ausgedrückten Weise zusammenhängen.

38. Helmholtz' Anwendung des Prinzips der kleinsten Wirkung. *Helmholtz*[70]) hat die Feldgleichungen, sowie die Formeln für die ponderomotorischen Kräfte aus der Annahme abgeleitet, daß bei unendlich kleiner Variation des wirklichen Vorganges die Variation eines gewissen Zeitintegrals verschwinden soll. Die Funktion Φ, um deren Zeitintegral es sich handelt, hat in der hier gewählten Schreibweise und erweitert auf anisotrope Körper die Gestalt

$$\Phi = \int \left\{ W_e + W_m - \frac{1}{c}(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C}) - (\mathfrak{E}^{ev} \cdot \mathfrak{D}) - (\mathfrak{F}^e \cdot \mathfrak{r}) \right\} dS;$$

sie enthält als zu variierende Größen die elektrische Erregung $\mathfrak{D}$, das magnetische Vektorpotential $\mathfrak{A}$ und den von einem festen Ursprung nach einem Punkte der Materie gezogenen Radiusvektor $\mathfrak{r}$. Die äußere ponderomotorische Kraft $\mathfrak{F}^e dS$ bleibt für jedes substantielle Raumelement dS unvariiert; was die elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}^{ev}$ betrifft, so soll $\underline{\underline{\delta \mathfrak{E}^{ev}}} = 0$ sein, d. h. das Linienintegral der elektromotorischen Kraft für eine substantielle Linienstrecke des Systems soll unvariiert bleiben. Für den den Formeln (24) und (23) gemäß in $\mathfrak{C}$ steckenden Leitungsstrom wird festgesetzt, daß $\overline{\delta \mathfrak{J}} = 0$ sei, d. h. der eine substantielle Fläche durchfließende Leitungsstrom soll bei der Variation ebenfalls ungeändert bleiben. Elektromotorische Kräfte der mit $\mathfrak{E}^{el}$ bezeichneten Art kommen bei *Helmholtz* nicht vor.

---

70) *v. Helmholtz,* Das Prinzip der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik, Ann. Phys. Chem. 47 (1892), p. 1 (mit kleinen Abänderungen wiedergegeben).

Es ist weiter unter W_e die Funktion (XIII′) und unter W_m die Funktion (XIV′) zu verstehen. Letztere wird freilich dadurch etwas kompliziert, daß *Helmholtz* auch eine permanente Magnetisierung oder vielmehr einen gewissen permanenten Teil der magnetischen Erregung voraussetzt. Bezeichnet man diesen mit $\mathfrak{B}^p$ und den variabeln Teil mit $\mathfrak{B}$, so soll das in der Formel auftretende Vektorpotential $\mathfrak{A}$ dem Vektor $\mathfrak{B} + \mathfrak{B}^p$ entsprechen; also

$$\mathfrak{B} = \operatorname{rot}\mathfrak{A} - \mathfrak{B}^p. \tag{66}$$

Für diesen Wert von $\mathfrak{B}$ ist W_m nach (XIV′) zu berechnen. Es wird übrigens die Permanenz von $\mathfrak{B}^p$ von *Helmholtz* in dem Sinne verstanden, daß bei der Bewegung $\underline{\dot{\mathfrak{B}}^p} = 0$ und bei den virtuellen Verrückungen $\underline{\delta\mathfrak{B}^p} = 0$ ist.

Es soll nun

$$\delta J = \delta\int_{t_1}^{t_2}\Phi\, dt = 0$$

sein, wenn die Variation so gewählt wird, daß für $t = t_1$ und $t = t_2$ $\underline{\delta\mathfrak{D}} = 0$ ist.

Zur Abkürzung setze man

$$\frac{\partial W_e}{\partial \mathfrak{D}_x} = \mathfrak{E}^{tv}_x, \dots; \qquad \frac{\partial W_m}{\partial \mathfrak{B}_x} = \mathfrak{H}_x, \dots,$$

und bei den mathematischen Transformationen beachte man folgendes: Es können die beiden Operationen, deren Ergebnisse wir für einen beliebigen Vektor $\mathfrak{Q}$ mit $\underline{\dot{\mathfrak{Q}}}$ und $\underline{\delta\mathfrak{Q}}$ bezeichnet haben, nach einander auf einen Vektor angewandt werden. Das Resultat ist in diesem Falle unabhängig von der Reihenfolge der Operationen, wie sofort aus der für jedes substantielle $d\sigma$ geltenden Gleichung

$$\frac{d}{dt}\,\delta\{\mathfrak{Q}_n d\sigma\} = \delta\,\frac{d}{dt}\{\mathfrak{Q}_n d\sigma\}$$

hervorgeht. Setzt man also

$$\underline{\dot{\mathfrak{D}}} = \mathfrak{B}' \quad \text{und} \quad \underline{\delta\mathfrak{D}} = \mathfrak{d},$$

so ist

$$\underline{\delta\mathfrak{B}'} = \underline{\dot{\mathfrak{d}}}.$$

a) Variation von $\mathfrak{A}$ bei konstantem $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{D}$. Hierdurch wird nur das zweite und dritte Glied in dem Ausdrucke von Φ berührt. Es ist

$$\delta\int W_m dS = \int(\mathfrak{H}\cdot\delta\mathfrak{B})\,dS = \int(\mathfrak{H}\cdot\operatorname{rot}\delta\mathfrak{A})\,dS = \int(\delta\mathfrak{A}\cdot\operatorname{rot}\mathfrak{H})\,dS$$

und

$$\delta(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{C}) = (\mathfrak{C}\cdot\delta\mathfrak{A});$$

folglich, da in δJ die Summe der Koeffizienten jedes $\delta\mathfrak{A}$ verschwinden muß,

$$\text{rot}\,\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\,\mathfrak{C}. \tag{67}$$

b) Variation von $\mathfrak{D}$ bei konstantem $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{A}$. Diese erstreckt sich auf das erste, dritte und vierte Glied des Ausdrucks von Φ. Es ist hierbei

$$\delta W_e = (\mathfrak{E}^{tv}\cdot\delta\mathfrak{D}),\quad \delta(\mathfrak{E}^{ev}\cdot\mathfrak{D}) = (\mathfrak{E}^{ev}\cdot\delta\mathfrak{D}),\quad \delta\mathfrak{C} = \delta\underline{\dot{\mathfrak{D}}}.$$

Daraus folgt, wenn man (16) benutzt,

$$\left.\begin{aligned}\delta\{(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{C})\,dS\} &= (\mathfrak{A}\cdot\delta\underline{\dot{\mathfrak{D}}})\,dS\\ &= \frac{d}{dt}\{(\mathfrak{A}\cdot\delta\mathfrak{D})\,dS\} - (\underline{\underline{\dot{\mathfrak{A}}}}\cdot\delta\mathfrak{D})\,dS.\end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Aus (68) läßt sich ableiten

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} dt\int(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{C})\,dS = -\int_{t_1}^{t_2} dt\int(\underline{\underline{\dot{\mathfrak{A}}}}\cdot\delta\mathfrak{D})\,dS;$$

setzt man die Summe der mit $\delta\mathfrak{D}$ zu skalaren Produkten vereinigten Vektoren gleich Null, so erhält man,

$$\mathfrak{E}^{tv} - \mathfrak{E}^{ev} + \frac{1}{c}\,\underline{\underline{\dot{\mathfrak{A}}}} = 0,$$

oder, wenn man

$$\mathfrak{E}^{tv} - \mathfrak{E}^{ev} = \mathfrak{E}$$

setzt,

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\,\underline{\underline{\dot{\mathfrak{A}}}}. \tag{69}$$

Hieraus ergibt sich schließlich nach (66) und (17)

$$\text{rot}\,\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\,(\underline{\dot{\mathfrak{B}}} + \underline{\dot{\mathfrak{B}}^p}).$$

c) Variation von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{A}$, wobei $\underline{\delta\mathfrak{D}} = 0$ sein möge, demzufolge $\underline{\delta\mathfrak{B}} = 0$ und auch $\underline{\delta\mathfrak{C}} = 0$ ist. Diese Variation beeinflußt alle Terme in dem Ausdruck von Φ mit Ausnahme des vorletzten, für welchen wegen $\underline{\underline{\delta\mathfrak{E}^{ev}}} = 0$ und $\underline{\delta\mathfrak{D}} = 0$ zufolge von (7)

$$\delta\{(\mathfrak{E}^{ev}\cdot\mathfrak{D})\,dS\} = 0$$

ist. Man findet mit Rücksicht auf (7), (67) und (9)

$$\begin{aligned}\int\delta\{(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{C})\,dS\} &= \int(\underline{\underline{\delta\mathfrak{A}}}\cdot\mathfrak{C})\,dS = c\int(\underline{\underline{\delta\mathfrak{A}}}\cdot\text{rot}\,\mathfrak{H})\,dS\\ &= c\int(\mathfrak{H}\cdot\text{rot}\,\underline{\underline{\delta\mathfrak{A}}})\,dS = c\int(\mathfrak{H}\cdot\underline{\delta\mathfrak{B}})\,dS.\end{aligned}$$

Da nun

$$\delta\{W_m dS\} - (\mathfrak{H}\cdot\underline{\delta\mathfrak{B}})\,dS = \delta\{W_m dS\}_{(\underline{\delta\mathfrak{B}}=0)}$$

ist, so gelangt man zu einer Gleichung, die mit (64) übereinstimmt. Die Ableitung der Spannungen fällt daher weiter mit der am Schluß der vorhergehenden Nummer mitgeteilten zusammen.

39. Bemerkungen zu der Anwendung des Prinzips der kleinsten Wirkung. Soll der von *Helmholtz* aufgestellte Variationssatz sich dem Prinzip der kleinsten Wirkung unterordnen, so hat man in demselben die Komponenten von $\mathfrak{D}$ als Koordinaten aufzufassen; daß dieses mit *Helmholtz'* Meinung übereinstimmt, geht auch daraus hervor, daß er für $t = t_1$ und $t = t_2$, $\delta\mathfrak{D} = 0$ annimmt. Dieser Auffassung von $\mathfrak{D}$ würde es entsprechen, $\dot{\mathfrak{D}}$ und also auch $\mathfrak{J}$ als Geschwindigkeiten zu betrachten, d. h. die in Nr. **35** genannten Elektrizitätsmengen als Koordinaten einzuführen. Man hätte dann auch die in der ersten Weise (Nr. **5**) durchgeströmten Elektrizitätsmengen zu variieren und hierbei eine Widerstandskraft (vgl. Nr. **36**) einzuführen. Indem *Helmholtz* $\delta\mathfrak{J} = 0$ setzt, verzichtet er auf die Ableitung der Bewegungsgleichungen für einen Leiter, in welchem keine elektrische Erregung $\mathfrak{D}$ bestehen könnte.

Interpretiert man die Stromkomponenten als Geschwindigkeiten, so werden die $\mathfrak{E}^e$ zu äußeren Kräften und nach (57) die Komponenten des Vektorpotentials $\mathfrak{A}$ zu Bewegungsmomenten (Impulskomponenten)[71]. Da nun *Helmholtz* auch $\mathfrak{A}$ zu den zu variierenden Größen rechnet, so entspricht der von ihm angewandte Variationssatz folgender eigentümlichen Fassung des Prinzips der kleinsten Wirkung[72].

Es seien p die Koordinaten eines materiellen Systems, $\dot{p}$ die Geschwindigkeiten, P die äußeren Kräfte, q die Impulskomponenten, U die potentielle Energie und T die kinetische Energie, als Funktion der p und der q betrachtet. Dann ist bei beliebiger Variation der p und der q, unter der Bedingung, daß $\delta p = 0$ sei für $t = t_1$ und $t = t_2$ und daß die P konstant gehalten werden,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ U + T - \sum(\dot{p}\, q) - \sum(P p) \right\} dt = 0.$$

In der Tat folgen hieraus die Bewegungsgleichungen

$$\dot{p} = \frac{\partial T}{\partial q}$$

---

71) *Maxwell,* Treatise 2, art. 590. Haben der Strom $\mathfrak{C}$ und das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ die angegebene Bedeutung, so erkennt man in dem Hilfssatze der Nr. **37** ein bekanntes Theorem der Mechanik wieder.

72) Vgl. *v. Helmholtz*, Über die physikalische Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung, J. f. Math. 100 (1887), p. 137 u. 213.

und

$$\dot{q} = -\frac{\partial U}{\partial p} - \frac{\partial T}{\partial p} + P.$$

Der ersten entspricht bei *Helmholtz* die Formel (67), der zweiten die Formel (69), sowie das für die ponderomotorischen Kräfte erhaltene Resultat.

Übrigens läßt sich das Prinzip der kleinsten Wirkung auch in der gewöhnlichen Form

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U)\, dt = 0$$

anwenden. Das hat z. B. *J. Larmor* getan [73]), wobei er freilich für ein Dielektrikum nicht die Komponenten von $\mathfrak{D}$, sondern diejenigen des „elektrischen Vektorpotentials" $\mathfrak{G}$, von dem $\mathfrak{D}$ nach der Gleichung

$$\mathfrak{D} = \operatorname{rot} \mathfrak{G}$$

abhängt, als Koordinaten ansieht.

Es möge schließlich hervorgehoben werden, daß es sogar dann, wenn man auf eine mechanische Erklärung ganz und gar verzichten wollte, von Bedeutung bleiben würde, die Gesetze der Elektrodynamik in einer Form darzustellen, die mit den Gleichungen der Mechanik übereinstimmt. Diese Form eignet sich vorzüglich zur Lösung spezieller Probleme, und manche wichtige Folgerung, wie z. B. die reziproken Beziehungen zwischen Induktionsströmen und elektrodynamischer Wirkung, gewinnt ein erhöhtes Interesse, wenn sie als Korollarium zu einem Satze der allgemeinen Mechanik erscheint [74]).

Wegen der Analogie, welche zwischen den elektromagnetischen Erscheinungen und den Bewegungen gewisser mechanischer Systeme besteht, ist es möglich, wie viele Physiker es getan haben, die Eigenschaften elektromagnetischer Systeme an mechanischen Modellen zu erläutern [75]).

40. Die Elektrizität als inkompressibele Flüssigkeit. Maxwells Vorstellungen über den Mechanismus. Wenn man die in Nr. **35** genannten Elektrizitätsmengen als Koordinaten ansieht, liegt es nahe, an die Strömung einer Substanz, einer „Flüssigkeit" zu denken, die man dann „Elektrizität" nennen könnte. Man hätte sich vorzustellen, daß diese Substanz alle Körper und auch den Äther durchdringt, daß ihre Teilchen in nichtleitenden Körpern an bestimmte

73) *Larmor,* Aether and matter, § 50.

74) Vgl. *v. Helmholtz,* l. c. (Anm. [72]))

75) Siehe z. B. *G. F. Fitz Gerald,* Dublin Roy. Soc. Proc. 1885, p. 407; *O. Lodge,* Modern views of electricity, London 1889; *Boltzmann,* Vorlesungen 1.

Gleichgewichtslagen gebunden sind, nach welchen elastische Kräfte sie immer wieder zurückzutreiben bestrebt sind, daß in den Leitern ein Reibungswiderstand zu überwinden ist, und schließlich, daß jede Strömung jener Substanz vermöge der im System bestehenden Zusammenhänge gewisse Bewegungen hervorruft, in welchen das Wesen eines magnetischen Feldes besteht und deren kinetische Energie die magnetische Energie repräsentiert. Die Bedingung div $\mathfrak{C} = 0$ läßt sich in diesem Gedankengange als „Inkompressibilität der Elektrizität" umschreiben, wenigstens so lange man es mit ruhenden Körpern zu tun hat; bei bewegten Systemen wäre diese Ausdrucksweise schon nicht mehr zutreffend.

In dem Bilde, welches *Maxwell*[76]) von dem Mechanismus der Erscheinungen entworfen hat, enthält das Feld ein System unzähliger kleiner drehbarer Körperchen und zwischen diesen ein zweites System von Teilchen, die etwa nach Art von Friktionsrädern mit den ersten Teilchen gekoppelt sind. In einem magnetischen Felde bestehen Rotationen des ersten Systems. Das zweite vermittelt die Übertragung dieser Bewegung von einem Ort zum andern und übernimmt außerdem die Rolle der oben besprochenen inkompressibeln Flüssigkeit, indem eine Translation der Friktionsräder von einer Rotation der sich nicht verschiebenden Teilchen des ersten Systems begleitet ist. Allerdings stößt man bei weiterer Verfolgung dieser Ideen, wie überhaupt bei der Ausbildung einer mechanischen Theorie auf recht große Schwierigkeiten.

41. Verschiedener Charakter der elektrischen und der magnetischen Zustandsgrößen. Man kann sich zu jedem geometrischen oder materiellen System Σ das Spiegelbild Σ' in Bezug auf eine feste Ebene denken, wobei im Falle eines materiellen Systems durch nähere Angaben festzusetzen ist, in welcher Weise Σ und Σ' einander entsprechen sollen; das geometrische Bild eines Vektors $\mathfrak{Q}$ möge mit $(\mathfrak{Q})$ angedeutet werden. Es lassen sich nun alle Vektoren in Σ in zwei Klassen teilen, je nachdem die Bedeutung, welche der Vektor $\mathfrak{Q}$ in Σ hat, in dem Spiegelbilde dem Vektor $(\mathfrak{Q})$ oder dem Vektor $-(\mathfrak{Q})$ zukommt. Aus der Form der Hauptgleichungen erhellt, daß die Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{E}^e$ einerseits und die Vektoren $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ andererseits immer zu verschiedenen Klassen gehören. Dieser Unterschied, der von verschiedenen Seiten betont worden ist[77]), zeigt sich

76) *Maxwell,* On physical lines of force, Phil. Mag. (4) 21 (1861), p. 161, 281, 338.

77) Siehe z. B. *E. Wiechert,* Über die Grundlagen der Elektrodynamik, Ann. Phys. Chem. 59 (1896), p. 283, und den Artikel der Encykl. IV 14 von *M. Abraham.*

auch darin, daß in allen mechanischen Erklärungen entweder die Vektoren der ersten Gruppe translatorischen und die der zweiten Gruppe rotatorischen Charakter haben, oder umgekehrt.

42. Anschluß an die Theorie elastischer Medien. a) In einem den Raum kontinuierlich erfüllenden Medium, das nicht isotrop und auch nicht homogen zu sein braucht, mögen Bewegungen stattfinden, bei welchen sich die Teilchen unendlich wenig von ihren Gleichgewichtslagen entfernen. Ist $\mathfrak{q}$ die Verschiebung aus der Gleichgewichtslage, so ist die Drehung eines Volumenelements

$$\mathfrak{u} = \tfrac{1}{2} \operatorname{rot} \mathfrak{q} \tag{70}$$

und die Winkelgeschwindigkeit desselben

$$\dot{\mathfrak{u}} = \tfrac{1}{2} \operatorname{rot} \dot{\mathfrak{q}}. \tag{71}$$

Es soll angenommen werden, daß die Drehung $\mathfrak{u}$ aus irgend welcher Ursache ein zurücktreibendes Kräftepaar zur Folge hat, dessen Moment der Größe des Volumenelements proportional ist und das sich für die Volumeneinheit durch

$$\mathfrak{N} = -(k)\mathfrak{u} \tag{72}$$

darstellen läßt, wo $k_{12} = k_{21}, \cdots$. Den Komponenten der inneren Spannungen schreiben wir die hiermit verträglichen Werte

$$X_x = 0, \cdots, \quad X_y = +\tfrac{1}{2}\mathfrak{N}_z, \cdots, \quad Y_x = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{N}_z, \cdots$$

zu. Letztere sind so gewählt, daß, wie notwendig ist, die aus den tangentiellen Spannungen herrührenden Drehungsmomente dem Momente $\mathfrak{N}$ das Gleichgewicht halten. Die potentielle Energie pro Volumeneinheit beträgt

$$W_p = \tfrac{1}{2}(k_{11}\mathfrak{u}_x^2 + \cdots + 2k_{12}\mathfrak{u}_x\mathfrak{u}_y + \cdots).$$

Was die kinetische Energie pro Volumeneinheit betrifft, so soll dafür nicht einfach der Wert

$$W_k = \tfrac{1}{2} l (\dot{\mathfrak{q}}_x^2 + \dot{\mathfrak{q}}_y^2 + \dot{\mathfrak{q}}_z^2) \tag{73}$$

(l Dichte) angenommen werden, sondern vielmehr der Ausdruck

$$W_k = \tfrac{1}{2}(l_{11}\dot{\mathfrak{q}}_x^2 + \cdots + 2l_{12}\dot{\mathfrak{q}}_x\dot{\mathfrak{q}}_y + \cdots), \tag{74}$$
$$(l_{12} = l_{21}, \cdots),$$

zu welchem man mittels gewisser freilich nicht sehr einfacher Annahmen über die Konstitution des Mediums gelangen könnte. Diesem letzten Ausdrucke entspricht die Formel

$$\mathfrak{g} = (l)\dot{\mathfrak{q}} \tag{75}$$

für die pro Volumeneinheit bestehende Bewegungsgröße, und die Bewegungsgleichung

(76) $$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{N} = \dot{\mathfrak{g}},$$

deren linke Seite sich aus den Werten der Spannungskomponenten ergibt.

Ein Medium mit diesen Eigenschaften hat zuerst *Mac Cullagh*[78]) ersonnen, um dadurch die optischen Eigenschaften der Kristalle zu erklären. Später hat auch *Kelvin*[79]) ein solches betrachtet; er nennt es einen „quasi-rigiden" Äther. Beide Forscher haben übrigens statt (74) die Gleichung (73) benutzt. *Kelvin*[80]) hat auch gezeigt, wie die in der Gleichung (72) ausgesprochene Eigenschaft eine Folge verborgener rotierender Bewegungen sein könne und wie sich ein gyroskopisches Modell für den quasi-rigiden Äther konstruieren lasse.

b) Die Gestalt der vorstehenden Gleichungen führt auf eine mechanische Deutung der elektrodynamischen Gleichungen für ruhende nichtleitende Körper, und zwar läßt sich diese auf zweierlei Weise erreichen.

Man kann zunächst annehmen, daß die Drehung $\mathfrak{u}$ des Mediums sich bei unseren Beobachtungen in derjenigen Zustandsänderung offenbart, die man als elektrische Erregung bezeichnet, und daß die Geschwindigkeit $\dot{\mathfrak{q}}$ von uns als magnetische Kraft wahrgenommen wird, während den Vektoren $-\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{g}$ die elektrische Kraft und die magnetische Erregung entsprechen. Setzt man

(77) $$\mathfrak{u} = n\mathfrak{D},$$

mit einem von x, y, z unabhängigen n, so kann man die Verhältniszahlen zwischen $-\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{E}$, $\dot{\mathfrak{q}}$ und $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{B}$ leicht so bestimmen, daß die Gleichungen (71), (76), (72) und (75) in (I'), (II'), (III') und (V') übergehen und daß zu gleicher Zeit

$$W_p = W_e, \quad W_k = W_m$$

wird. Es muß dann für alle Indices $i, k = 1, 2, 3$

$$k_{ik} = \frac{\varepsilon'_{ik}}{n^2}, \quad l_{ik} = \frac{\mu_{ik}}{4n^2c^2}$$

sein.

Man kann aber auch $-\dot{\mathfrak{q}}$ als elektrische Kraft, $-\mathfrak{g}$ als elektrische Erregung, $\mathfrak{u}$ als magnetische Erregung und $-\mathfrak{N}$ als magnetische Kraft interpretieren. Z. B. setze man

(78) $$\mathfrak{u} = \nu\mathfrak{B},$$

78) *J. Mac Cullagh*, An essay towards a dynamical theory of crystalline reflexion and refraction (1839), Irish. Acad. Trans. 21 (1848), p. 17. Coll. works, p. 145.

79) *W. Thomson*, Mathematical and physical papers, London 1890, 3, Art. 99, p. 442.

80) On a gyrostatic adynamic constitution for ether, a. a. O. Art. 100, p. 466.

wo wieder v an allen Stellen denselben Wert haben muß, und richte es so ein, daß

$$k_{ik} = \frac{\mu'_{ik}}{v^2}, \quad l_{ik} = \frac{\varepsilon_{ik}}{4 v^2 c^2}.$$

Jetzt entsprechen den Formeln (I'), (II', (III') und (IV') die Gleichungen (76), (71), (75) und (72), und es ist

$$W_p = W_m, \quad W_k = W_e.$$

Auf die Notwendigkeit eines konstanten n oder v ist speziell dann Gewicht zu legen, wenn man auch die Erscheinungen, welche nach den elektromagnetischen Gleichungen in nicht homogenen Körpern — und also auch an Grenzflächen — stattfinden können, wie die Reflexion des Lichtes, aus der Theorie des quasi-rigiden Äthers ableiten will.

c) Die erste Auffassung führt dazu, für alle Körper, für welche $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ gesetzt werden darf, gleiche Dichte l des Athers anzunehmen (Annahme von *F. E. Neumann* und *Mac Cullagh*) und den Unterschied der Dielektrizitätskonstanten und der Brechungsexponenten in den verschiedenen Werten der in (72) auftretenden Elastizitätskonstanten k zu erblicken. Auf diesem Wege kehrt man, was die anisotropen Nichtleiter betrifft, zu der Theorie von *Mac Cullagh* zurück.

Die andere Auffassung dagegen erfordert für alle die genannten Körper denselben Wert des einen Elastizitätskoeffizienten k und schreibt den Unterschied der Dielektrizitätskonstanten und des Brechungsexponenten einer verschiedenen Dichte l des Äthers zu (Annahme von *Fresnel*).

d) *Kelvin*[81]) hat (zweite Auffassung) gezeigt, wie man die magnetische Erregung als in einer Rotation der Volumenelemente bestehend betrachten kann.

e) Spätere Forscher haben vielfach an diese Ideen angeknüpft oder dieselben neu entwickelt und dabei auch die Leitungsströme und die elektromotorischen Kräfte in das Bild aufzunehmen versucht. Zu bemerken ist dabei, daß, sobald die als Geschwindigkeit gedeutete Größe längere Zeit in derselben Richtung bestehen bleibt, die Verschiebungen $\mathfrak{q}$ nicht unendlich klein bleiben können und die Theorie in entsprechender Weise zu modifizieren ist. Hier kann nicht über alle einschlägigen Arbeiten berichtet werden. Es mögen daher bloß die Bilder erwähnt werden, die *Sommerfeld*[82]), *Reiff*[83]), *Larmor*[84]) und

81) *W. Thomson,* Mathematical and physical papers 3, art. 99, p. 450.

82) *A. Sommerfeld*, Mechanische Darstellung der elektromagnetischen Erscheinungen in ruhenden Körpern, Ann. Phys. Chem. 46 (1892), p. 139.

83) *R. Reiff,* Elastizität und Elektrizität, Freiburg i. Br. und Leipzig 1893.

84) *Larmor,* A dynamical theory of the electric and luminiferous medium,

Boltzmann[85]) von den Vorgängen im elektromagnetischen Felde entworfen haben, sowie die Betrachtungen von *Voigt*[86]), die mit dem oben entwickelten viele Berührungspunkte haben. Die drei zuerst genannten Autoren schlagen mit größeren oder kleineren Abweichungen den ersten der zwei oben angegebenen Wege ein; *Boltzmann* dagegen hat den zweiten gewählt[87]).

Es bleiben immerhin große Schwierigkeiten bestehen, die sich schon in dem einfachen Falle einer geladenen Kugel zeigen. Nach der zweiten Auffassung würde in der Umgebung einer solchen eine fortdauernde radial gerichtete Strömung bestehen. Die Annahme (77) dagegen ist zu verwerfen, wenn man daran festhalten will, daß $\mathfrak{D}$ an allen Stellen einer mit dem Leiter konzentrischen Kugelfläche von dem Mittelpunkte fort oder auf denselben zu gerichtet ist. Es kann dann nicht für diese Kugelfläche $\int \mathfrak{D}_n d\sigma = 0$ sein, wie aus (77) und (70) folgen[88]) würde.

f) Man hat auch versucht, den Gleichungen für ein elastisches Medium die Gestalt der elektromagnetischen Gleichungen zu geben, ohne zu der eigentümlichen Art der Elastizität, die *Mac Cullagh* annahm, seine Zuflucht zu nehmen. Für einen gewöhnlichen homogenen und isotropen Körper mit der Dichte ϱ und den *Kirchhoff*'schen Elastizitätskoeffizienten K und ϑ lauten die Bewegungsgleichungen

$$(79)\qquad \varrho \frac{\partial^2 \mathfrak{q}_x}{\partial t^2} = K\left[\Delta \mathfrak{q}_x + (1 + 2\vartheta)\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div}\mathfrak{q})\right], \text{ u. s. w.}$$

Auf der rechten Seite derselben treten nun wieder die Komponenten der Rotation eines gewissen Vektors auf, wenn man mit *Cauchy*[89]) setzt

$$(80)\qquad \vartheta = -1.$$

Es läßt sich dann nämlich für die Bewegungsgleichungen schreiben

$$(81)\qquad \varrho \ddot{\mathfrak{q}} = -K \operatorname{rot} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{q},$$

London Trans. A 185 (1894), p. 719; 186 (1895), p. 695; 190 (1897), p. 205; Aether and matter, Appendix E, p. 323.

85) *Boltzmann,* Über ein Medium, dessen mechanische Eigenschaften auf die von *Maxwell* für den Elektromagnetismus aufgestellten Gleichungen führen, Ann. Phys. Chem. 48 (1893), p. 78.

86) *W. Voigt*, Über Medien ohne innere Kräfte und über eine durch sie gelieferte mechanische Deutung der *Maxwell-Hertz*'schen Gleichungen, Ann. Phys. Chem. 52 (1894), p. 665.

87) Vgl. indes die allgemeiner gehaltene Darstellung dieses Physikers in „Vorlesungen u. s. w.", 2, p. 1—7.

88) Vgl. *Boltzmann,* Ann. Phys. Chem. 48 (1893), p. 96; *Reiff,* Elastizität und Elektrizität, p. IX; *Larmor,* Aether and matter, Appendix E.

89) *A. Cauchy,* Par. C. R. 9 (1839), p. 637 (vgl. insbesondere den Schluß dieser Note, p. 649), p. 676, 726, 727, 764; Oeuvres (1) 5, p. 23.

deren Analogie mit den Grundgleichungen der Elektrodynamik in die Augen fällt. Indes ist diese Analogie auf homogene Körper beschränkt.

Die Annahme des Wertes (80) für ϑ wurde von *Green*[90]) zurückgewiesen, weil die entsprechende Konstitution des Äthers labil wäre. Später hat *Kelvin*[91]) dieselbe wieder aufgenommen und zur Vorstellung eines sogenannten „quasi-labilen Äthers" ausgebildet.

Es möge hier noch kurz die mechanische Darstellung, die *Graetz*[92]) von den elektromagnetischen Erscheinungen zu geben versucht hat, erwähnt werden. Dieser Physiker läßt für den freien Äther die Form (79) der Bewegungsgleichungen bestehen, gelangt aber für den in ponderablen Körpern enthaltenen Äther zu der Form (81), indem er annimmt, daß die ponderabele Materie auf den Äther eine Kraft ausübt, die pro Volumeneinheit des Äthers

$$-2K(1+\vartheta)\,\text{grad}\,(\text{div}\,\mathfrak{q})$$

beträgt und deren Komponenten man zu den rechten Seiten der Gleichungen (79) zu addieren hat.

43. Thermodynamische Behandlung. Die im vorhergehenden besprochenen mechanischen Erklärungen lassen die Beziehungen der elektrischen und magnetischen Erscheinungen zur Wärme und alles, was mit Molekularbewegungen zusammenhängt, unberücksichtigt; mit denselben kann daher, wenigstens was die greifbaren Körper betrifft, nie das letzte Wort gesagt sein. Weiter wird man vordringen können, wenn man sich, wie das in einigen Kapiteln der Elektrizitätslehre schon geschehen ist (thermoelektrische Ströme, *Peltier*- und *Thomson*-Effekt, elektrochemische Erscheinungen), der Begriffe und Methoden der Thermodynamik bedient. Man kann z. B. der thermodynamischen Theorie der Elastizität eine ähnliche Behandlung der elektrischen und magnetischen Erregung und der elektromagnetischen Spannungen in den ponderabelen Körpern an die Seite stellen.

Den thermodynamischen Standpunkt hat insbesondere *P. Duhem*[93])

---

90) *G. Green,* On the laws of reflexion and refraction of light, Cambr. Trans. 6 (1838), p. 403; Math. Papers, London 1871, p. 243.

91) *W. Thomson,* On the reflexion and refraction of light, Phil. Mag. (5) 26 (1888), p. 414 u. 500; *Boltzmann,* Ann. Phys. Chem. 48 (1893), p. 84 u. 85.

92) *L. Graetz,* Über eine mechanische Darstellung der elektrischen und magnetischen Erscheinungen in ruhenden Körpern, Ann. Phys. (4) 5 (1901), p. 375.

93) *Duhem,* Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme, 2 vol., Paris 1891—1892; Théorie nouvelle de l'aimantation par influence, fondée sur la Thermodynamique, Paris 1888; Sur les pressions dans les milieux diélectriques ou magnétiques, Amer. J. of Math. 12 (1895), p. 117.

vertreten. Die Arbeiten dieses Forschers entfernen sich jedoch zu weit von dem Hauptgegenstande dieses Artikels, als daß über dieselben hier berichtet werden könnte.

VI. Vergleichung von Fern- und Feldwirkungstheorien.

44. Fernwirkungstheorie von Helmholtz. Obgleich bei dem jetzigen Stande unserer Kenntnisse von einer Theorie, welche die Erscheinungen in nichtleitenden Körpern, speziell im Äther, ignorieren würde, nicht mehr die Rede sein kann, so sind doch Fernwirkungstheorien in einem anderen Sinne des Wortes keineswegs ausgeschlossen. Man kann sich vorstellen, daß der an irgend einer Stelle des Raumes, sei es im Äther oder in der ponderablen Materie, bestehende Zustand einen unmittelbaren Einfluß an entfernten Stellen ausübt. Die Gesetze einer solchen Wirkung könnten sich in Differentialgleichungen ausdrücken lassen; nur müßten diese die Eigenschaft haben, die z. B der bekannten *Poisson*'schen Gleichung zukommt, daß der Wert φ, den die von einer solchen Gleichung bestimmte Größe in einem Punkte P annimmt, sich durch ein Integral

$$\int \alpha f \, dS$$

darstellen läßt, in dem α der *gleichzeitige* Wert irgend einer Zustandsgröße im Element dS bedeutet und f *nur* von der gegenseitigen Lage von dS und P abhängt.

Zu den Gleichungen, welche in dieser Weise einen Teil der elektrischen Vorgänge als „Fernwirkungen" mathematisch beschreiben, werden sich immer noch andere von derselben Art wie die Beziehungen (III), (IV), (V) und (VI) gesellen.

Es möge hier genügen, die Gleichungen, zu welchen *Helmholtz* in seiner Fernwirkungstheorie gelangt ist[94]), zusammenzustellen und zwar in einer Schreibweise, die sich der bis jetzt angewandten möglichst anschließt. Für ruhende isotrope Körper lauten dieselben[95])

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t} = - \operatorname{div} \mathfrak{J}', \tag{82}$$

$$\mathfrak{C}' = \mathfrak{J}' + \dot{\mathfrak{P}}', \tag{83}$$

94) *v. Helmholtz,* Über die Bewegungsgleichungen der Elektrizität für ruhende leitende Körper, J. f. Math. 72 (1870), p. 57; Die elektrodynamischen Kräfte in bewegten Leitern, ibid. 78 (1874), p. 273.

95) Die Striche sollen dazu dienen, die verschiedenen Größen von den analogen in den früheren Nummern vorkommenden zu unterscheiden. Es entsprechen also ε' und σ' den früheren Koeffizienten ε und σ, nicht den früheren ε' und σ'.

$$(84)\qquad \mathfrak{P}' = \varepsilon'\mathfrak{E}',\quad \mathfrak{J}' = \sigma'\mathfrak{E}',\quad \mathfrak{M}' = \theta\mathfrak{H}',$$

$$(85)\qquad \begin{cases} \Delta\varphi = \operatorname{div}\mathfrak{P}' - \varrho', \\ \Delta\mathfrak{A}_x' = (1-k)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t} - \mathfrak{C}_x', \text{ u. s. w.} \\ \Delta\chi = \operatorname{div}\mathfrak{M}', \\ \Delta\mathfrak{G}_x' = \dot{\mathfrak{M}}_x', \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

$$(86)\qquad \begin{cases} \mathfrak{H}' = -\operatorname{grad}\chi + A\operatorname{rot}\mathfrak{A}', \\ \mathfrak{E}' = -\operatorname{grad}\varphi - A^2\dot{\mathfrak{A}}' + A\operatorname{rot}\mathfrak{G}'. \end{cases}$$

Die Gleichungen (82) und (84) sagen aus, wie der Leitungsstrom $\mathfrak{J}'$ eine Änderung der Dichte ϱ' der elektrischen Ladung bewirkt und welcher Zusammenhang zwischen der elektrischen Kraft $\mathfrak{E}'$ und der magnetischen Kraft $\mathfrak{H}'$ einerseits, dem Strome $\mathfrak{J}'$, der elektrischen Polarisation $\mathfrak{P}'$ und der Magnetisierung $\mathfrak{M}'$ andererseits besteht. Dagegen sind (85) und (86) die Fernwirkungsgleichungen; $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{E}'$ erscheinen hier von den skalaren Potentialen χ und φ und den Vektorpotentialen $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{G}'$ abhängig.

Die Gleichungen enthalten zwei universelle Konstanten, deren eine k unbestimmt gelassen wird, während die andere mit dem aus den Beobachtungen abgeleiteten Verhältnis $\frac{1}{A'}$ der elektromagnetischen zur elektrostatischen Elektrizitätseinheit nach der Formel

$$A = \frac{A'}{\sqrt{(1+\varepsilon_0)(1+\theta_0)}}$$

zusammenhängt; in diesen sind ε_0 und θ_0 die Werte von ε' und θ für den freien Äther. Abgeleitete Gleichungen sind

$$\operatorname{rot}\mathfrak{E}' = -A\dot{\mathfrak{B}}',\quad \operatorname{div}\dot{\mathfrak{B}}' = 0,$$

wo

$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{H}' + \mathfrak{M}',$$

und

$$(87)\qquad \operatorname{rot}\mathfrak{H}' = -A\operatorname{grad}\dot{\varphi} + A\mathfrak{C}',$$

$$(88)\qquad \operatorname{div}\mathfrak{C}' = \Delta\dot{\varphi},$$

$$(89)\qquad \Delta\operatorname{div}\mathfrak{C}' = A^2k\operatorname{div}\ddot{\mathfrak{E}}' - \Delta\operatorname{div}\dot{\mathfrak{E}}'.$$

Aus dieser Theorie ergibt sich, daß sich in einem Dielektrikum nicht nur transversale elektrische Schwingungen mit der Geschwindigkeit

$$(90)\qquad \frac{1}{A'}\sqrt{\frac{(1+\varepsilon_0)(1+\theta_0)}{\varepsilon'(1+\theta)}},$$

sondern auch longitudinale mit der Geschwindigkeit

$$\frac{1}{A'}\sqrt{\frac{(1+\varepsilon')(1+\varepsilon_0)(1+\theta_0)}{\varepsilon' k}}$$

fortpflanzen können. Aus letzterem Werte erhellt, daß k positiv sein muß; sonst wäre das Gleichgewicht der Elektrizität labil.

Innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler stimmt die Lichtgeschwindigkeit im freien Äther mit $\frac{1}{A'}$ überein. Es muß daher, wie aus (90) hervorgeht, ε_0 und also auch für jeden ponderablen Körper ε' einen sehr hohen Wert haben. Läßt man ε_0, $\frac{1}{A^2}$, ε' und σ' alle in demselben Verhältnis ins Unendliche wachsen, so folgt aus (89) $\operatorname{div} \mathfrak{E}' = 0$ und aus (88) $\dot{\varphi} = 0$. Es verschwindet in (87) das erste Glied rechts und das Gleichungssystem nimmt nach Einführung einiger neuer Variabeln und Koeffizienten gänzlich die *Hertz*'sche Form an.

Sollte sich je die Notwendigkeit zeigen, den Grundsatz von der solenoidalen Verteilung des Stromes fallen zu lassen, so könnten weitere Entwicklungen an die *Helmholtz*'sche Theorie mit einem endlichen ε_0 anknüpfen.

45. Verhältnis zwischen den Feldwirkungs- und den Fernwirkungstheorien. Es lassen sich nicht bloß Fernwirkungstheorien aufstellen, die, wie die *Helmholtz*'sche, die Theorie von *Maxwell* als einen Grenzfall in sich schließen, sondern auch solche, die, mathematisch gesprochen, völlig mit dieser Theorie übereinstimmen [96]), und zwar gilt das ganz allgemein, auch für bewegte Körper. Man kann nämlich, wenn man nach Nr. 15 die Magnetisierung $\mathfrak{M}$ einführt, die Gleichung (I') und die Gleichung $\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$ ersetzen durch

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}'' - \operatorname{grad} \chi, \tag{91}$$

wo das Vektorpotential $\mathfrak{A}''$ bestimmt wird durch

$$\Delta \mathfrak{A}'' = -\frac{1}{c} \mathfrak{C}, \tag{92}$$

und das skalare Potential durch

$$\Delta \chi = \operatorname{div} \mathfrak{M}. \tag{93}$$

Andererseits erhält man, wenn man ein elektrisches Vektorpotential $\mathfrak{G}''$ und ein elektrisches skalares Potential φ mittelst der Gleichungen

$$\Delta \mathfrak{G}'' = \frac{1}{c} \dot{\underline{\mathfrak{B}}} \tag{94}$$

und

$$\Delta \varphi = -\operatorname{div} \mathfrak{D} + \operatorname{div} \mathfrak{P} \tag{95}$$

einführt,

$$\mathfrak{E} = \operatorname{rot} \mathfrak{G}'' - \operatorname{grad} \varphi. \tag{96}$$

96) Vgl. *Boltzmann*, Vorlesungen u. s. w., 2, §§ 25 u. 27.

Diesen Formeln sind dann noch die Beziehungen (III), (IV) und (V), sowie

$$\text{div}\,(\mathfrak{J} + \dot{\underline{\mathfrak{D}}}) = 0 \tag{97}$$

hinzuzufügen.

Wie man sieht, haben die Formeln (91) bis (96) die von einer Fernwirkungstheorie geforderte Gestalt. Die Gleichung (97) gehört in dieselbe Kategorie wie (82) in der *Helmholtz*'schen Theorie. Man könnte etwa div $\mathfrak{D}$ und — div $\mathfrak{P}$ als Dichtigkeiten ϱ und ϱ' gewisser „elektrischer Mengen" auffassen und hätte sodann

$$\Delta\varphi = -(\varrho + \varrho'),$$

während die erste Dichte ϱ sich infolge eines Leitungsstromes nach der mit (97) gleichbedeutenden Gleichung

$$\int \mathfrak{J}_n d\sigma = -\frac{d}{dt}\int \varrho\, dS$$

ändern würde.

Die vorhergehenden Betrachtungen führen zu dem Schluß, daß sich, mathematisch gesprochen, eine scharfe Grenze zwischen der Feldwirkungs- und der Fernwirkungstheorie nicht ziehen läßt. Man kann eben mit demselben Gleichungssystem zweierlei Vorstellungen verbinden. Freilich wird niemand bestreiten, daß der Vorzug der Einfachheit und der größeren Anschaulichkeit und Verständlichkeit in physikalischer Hinsicht auf Seiten der *Maxwell*'schen Theorie liegt.

(Abgeschlossen im Juni 1903.)

V 14. WEITERBILDUNG DER MAXWELLSCHEN THEORIE. ELEKTRONENTHEORIE.

Von

H. A. LORENTZ

IN LEIDEN.

Inhaltsübersicht.

I. Grundlagen der Elektronentheorie.

1. Allgemeines.
2. Grundgleichungen für den Äther.
3. Die auf die geladene Materie wirkende Kraft.
4. Einführung von Potentialen.
5. Integration der Potentialgleichungen.
6. Energie. *Poynting*'scher Satz.
7. Allgemeine Betrachtung der auf geladene Materie wirkenden Kräfte. Elektromagnetischer Impuls.
8. Ableitung der Grundgleichungen aus den Prinzipien der Mechanik.
9. Allgemeine den Grundgleichungen äquivalente Sätze.
10. Die Hauptgleichungen für ein bewegliches Koordinatensystem.

II. Bestimmung des elektromagnetischen Feldes bei gegebener Lage und Bewegung der Elektronen.

11. Elektrostatisches Feld.
12. Zustand des Feldes, wenn die erregende Ladung in einem unendlich kleinen Raum liegt.
13. Ein elektrisch polarisiertes Teilchen.
14. Eine einfache Lichtquelle.
15. Ein magnetisiertes Teilchen.
16. Rotierende geladene Kugeln.
17. Das von einem Elektron mit beliebiger Bewegung erregte Feld.
18. Ausstrahlung von Energie.
19. Entstehung von Röntgenstrahlen.

III. Freie Elektronen. Bestimmung der Bewegung bei gegebenem äußeren Felde.

20. Rückwirkung des Äthers auf ein langsam bewegtes Elektron von beliebiger Gestalt. Widerstand gegen die Bewegung.
21. Elektromagnetische Masse der Elektronen.

22. Quasi-stationäre Bewegungen im allgemeinen. Rückwirkung des Äthers auf ein rotierendes Elektron.
23. Wirkung eines äußeren Feldes.
24. Bewegung eines Elektrons in einem gegebenen Felde.
25. Wechselwirkung zweier Elektronen.

IV. Elektromagnetische Vorgänge in ponderablen Körpern.

26. Die Elektronen in den ponderablen Körpern.
27. Mittelwerte.
28. Hilfssätze für die Berechnung der Mittelwerte.
29. Mittelwerte, die von den Leitungselektronen herrühren.
30. Mittelwerte, die von den Polarisationselektronen herrühren.
31. Mittelwerte, die von den Magnetisierungselektronen herrühren.
32. Die verschiedenen Teile des elektrischen Stroms.
33. Die Grundgleichungen für die Mittelwerte.
34. Versuche von *Eichenwald.*
35. Das elektromagnetische Feld im Inneren verschieden gestalteter Höhlungen.
36. Die auf die Elektronen und die Teilchen wirkenden Kräfte.
37. Leitfähigkeit.
38. Elektrizitätsbewegung in Elektrolyten.
39. Gasionen.
40. Elektrizitätsbewegung in Metallen.
41. Halleffekt und verwandte Erscheinungen.
42. Induktion in bewegten Leitern.
43. Polarisierte Dielektrika.
44. Statische Zustände in einem ruhenden System von Leitern und isotropen Nichtleitern.
45. Induktion in einem bewegten Dielektrikum.
46. Deformation eines Dielektrikums.
47. Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante und des Brechungsexponenten von Dichte und Zusammensetzung der Körper.
48. Elektronentheorie der Magnetisierung.
49. Elektrische Ströme in magnetisierten Leitern.
50. Allgemeine Betrachtungen betreffend die Beziehungen zwischen den Zustandsgrößen.
51. Energie und Energiefluß in ruhenden Körpern.
52. Andere Bestimmung der Energie und des Energieflusses.
53. Fiktive Spannungskomponenten in ruhenden unmagnetisierten Nichtleitern.
54. Energie und Energiefluß in bewegten Nichtleitern. Verifizierung der Resultate.
55. Bemerkungen zu den ponderomotorischen Kräften.

V. Nähere Betrachtung bewegter Systeme.

56. Einfluß der Erdbewegung auf elektromagnetische Erscheinungen.
57. Einfluß einer Translation auf optische Erscheinungen in durchsichtigen Körpern.
58. Aberration des Lichtes.
59. Versuche mit irdischen Lichtquellen.
60. Mitführung der Lichtwellen durch die ponderabele Materie.

61. Andere Ableitung des zur Erklärung der Aberration führenden Satzes.
62. Der *Michelson*'sche Interferenzversuch.
63. Theorie von *Cohn.*

VI. Schluß.

64. Gegenwärtiger Stand der Theorie.
65. Anwendung der Begriffe der Elektronentheorie auf andere Gebiete.

Literatur.

(Vgl. den vorhergehenden Artikel. Die abgekürzten Citate in den Anmerkungen verweisen auf die dort genauer angeführten Werke.)

Bezeichnungen.

Radiusvektor $\mathfrak{r}$; unendlich kleine Verrückung $\mathfrak{q}$; Geschwindigkeit relativ zum Äther $\mathfrak{v}$; Geschwindigkeit der Materie oder des Koordinatensystems $\mathfrak{w}$; Geschwindigkeit relativ zur Materie oder zum Koordinatensystem $\mathfrak{u}$; Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{g}$; Beschleunigung $\mathfrak{j}$; Lichtgeschwindigkeit im Äther c.

Allgemeine Zeit t; Ortszeit t'.

Masse m; Kraft $\mathfrak{F}$; Kräftepaar $\mathfrak{N}$; elektrische (potentielle) Energie U; magnetische (kinetische) Energie T; *Lagrange*'sche Funktion L; Impuls (Bewegungsgröße) $\mathfrak{G}$.

Elektrische Ladung e; elektrische Raumdichte ϱ; elektrische Flächendichte ω; elektrisches Moment eines Teilchens $\mathfrak{p}$; magnetisches Moment eines Teilchens $\mathfrak{m}$; Anzahl der Teilchen pro Volumeneinheit N.

Für den Äther: Elektrische Erregung $\mathfrak{d}$; magnetische Kraft $\mathfrak{h}$; skalares Potential φ; Vektorpotential $\mathfrak{a}$; mit diesen verwandte Größen in den auf bewegliche Achsen bezogenen Gleichungen $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{h}'$, φ', $\mathfrak{a}'$; elektrischer Strom $\mathfrak{c}$; elektrische Kraft $\mathfrak{f}$; elektrische Energie pro Volumeneinheit w_e; magnetische Energie pro Volumeneinheit w_m; Energiefluß $\mathfrak{s}$.

Für ponderabele Körper (Mittelwerte): Elektrische Kraft $\mathfrak{E}$ (für bewegte Teilchen $\mathfrak{E}'$); elektrische Polarisation $\mathfrak{P}$; elektrische Erregung $\mathfrak{D}$; Gesamtstrom $\mathfrak{C}$; Leitungsstrom $\mathfrak{J}$; Verschiebungsstrom $\mathfrak{V}$; Konvektionsstrom $\mathfrak{K}$; Röntgenstrom $\mathfrak{R}$; magnetische Kraft $\mathfrak{H}$; ein hiermit verwandter Vektor für bewegte Systeme $\mathfrak{H}'$; Magnetisierung $\mathfrak{M}$; magnetische Erregung $\mathfrak{B}$; skalares Potential Φ; Vektorpotential $\mathfrak{A}$; elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}^{el}$, $\mathfrak{E}^{ev}$; elektrische Energie pro Volumeneinheit W_e; magnetische Energie pro Volumeneinheit W_m; *Joule*'sche Wärme pro Volumen- und Zeiteinheit Q; Energiefluß $\mathfrak{S}$.

Spannungskomponenten X_x, X_y, u. s. w.; Spannung an einer beliebigen Fläche (mit der Normale n) $\mathfrak{X}^n$.

Dielektrizitätskonstante ε; Konstante der elektrischen Polarisation η; Leitfähigkeit σ; magnetische Permeabilität μ.

Zusammenstellung der mit römischen Ziffern bezeichneten wichtigsten Gleichungen.

Grundgleichungen:

$$\text{(I)} \quad \operatorname{div} \mathfrak{d} = 0 \quad \text{(für den freien Äther)},$$

$$\text{(Ia)} \quad \operatorname{div} \mathfrak{d} = \varrho \quad \text{(für das Innere eines Elektrons)},$$

$$\text{(II)}\quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathfrak{v}) = 0,$$

$$\text{(III)}\quad \operatorname{rot} \mathfrak{h} = \frac{1}{c}\mathfrak{c} = \frac{1}{c}(\dot{\mathfrak{d}} + \varrho \mathfrak{v}),$$

$$\text{(IV)}\quad \operatorname{rot} \mathfrak{d} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{h}},$$

$$\text{(V)}\quad \operatorname{div} \mathfrak{h} = 0,$$

$$\text{(VI)}\quad \mathfrak{f} = \mathfrak{d} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{h}].$$

Differentialgleichungen für die Potentiale:

$$\text{(VII)}\quad \Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\ddot{\varphi} = -\varrho, \qquad \text{(VIII)}\quad \Delta\mathfrak{a} - \frac{1}{c^2}\ddot{\mathfrak{a}} = -\frac{1}{c}\varrho\mathfrak{v}.$$

Bestimmung des Feldes aus den Potentialen:

$$\text{(IX)}\quad \mathfrak{d} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{a}} - \operatorname{grad}\varphi, \qquad \text{(X)}\quad \mathfrak{h} = \operatorname{rot}\mathfrak{a}.$$

Werte der Potentiale:

$$\text{(XI)}\quad \varphi = \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}[\varrho]\,dS, \qquad \text{(XII)}\quad \mathfrak{a} = \frac{1}{4\pi c}\int \frac{1}{r}[\varrho\mathfrak{v}]\,dS.$$

Elektrische Energie pro Volumeneinheit:

$$\text{(XIII)}\quad w_e = \tfrac{1}{2}\mathfrak{d}^2.$$

Magnetische Energie pro Volumeneinheit:

$$\text{(XIV)}\quad w_m = \tfrac{1}{2}\mathfrak{h}^2.$$

Energiefluß:

$$\text{(XV)}\quad \mathfrak{s} = c[\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{h}].$$

Fiktive Spannungskomponenten im Äther:

$$\text{(XVI)}\quad X_n = \tfrac{1}{2}[2\mathfrak{d}_x\mathfrak{d}_n - \mathfrak{d}^2\cos(n,x)] + \tfrac{1}{2}[2\mathfrak{h}_x\mathfrak{h}_n - \mathfrak{h}^2\cos(n,x)], \text{ u. s. w.}$$

Elektromagnetische Bewegungsgröße:

$$\text{(XVII)}\quad \mathfrak{G}^a = \frac{1}{c^2}\int \mathfrak{s}\,dS.$$

Definition der Ortszeit:

$$\text{(XVIII)}\quad t' = t - \frac{1}{c^2}(\mathfrak{w}_x x' + \mathfrak{w}_y y' + \mathfrak{w}_z z')$$

(x', y', z' Koordinaten in Bezug auf bewegliche Achsen).

Definition der Vektoren $\mathfrak{d}'$ und $\mathfrak{h}'$:

$$\text{(XIX)}\quad \mathfrak{d}' = \mathfrak{d} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{h}], \qquad \text{(XX)}\quad \mathfrak{h}' = \mathfrak{h} - \frac{1}{c}[\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{d}].$$

Grundformeln für bewegte Systeme, Gleichungen für die Potentiale, und zur Bestimmung des Feldes mittels der Potentiale:

$$\text{(I')}\quad \operatorname{div}\mathfrak{d}' = \left(1 - \frac{(\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{u})}{c^2}\right)\varrho,$$

$$\text{(III')}\quad \operatorname{rot}\mathfrak{h}' = \frac{1}{c}(\dot{\mathfrak{d}}' + \varrho\mathfrak{u}),$$

$$\text{(IV}'\text{)} \quad \operatorname{rot} \mathfrak{d}' = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{h}}',$$

$$\text{(V}'\text{)} \quad \operatorname{div} \mathfrak{h}' = 0,$$

$$\text{(VII}'\text{)} \quad \Delta\varphi' - \frac{1}{c^2}\ddot{\varphi}' = -\varrho, \qquad \text{(VIII}'\text{)} \quad \Delta\mathfrak{a}' - \frac{1}{c^2}\ddot{\mathfrak{a}}' = -\frac{1}{c}\varrho\mathfrak{u},$$

$$\text{(IX}'\text{)} \quad \mathfrak{d}' = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{a}}' - \operatorname{grad}\varphi' + \frac{1}{c}\operatorname{grad}(\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{a}'), \qquad \text{(X}'\text{)} \quad \mathfrak{h}' = \operatorname{rot}\mathfrak{a}',$$

$$\text{(XI}'\text{)} \quad \varphi' = \frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{r}[\varrho]\,dS, \qquad \text{(XII}'\text{)} \quad \mathfrak{a}' = \frac{1}{4\pi c}\int\frac{1}{r}[\varrho\mathfrak{u}]\,dS.$$

Definition des elektrischen und des magnetischen Moments eines Teilchens:

$$\text{(XXI)} \quad \int\varrho\mathfrak{r}\,dS = \mathfrak{p}, \qquad \text{(XXII)} \quad \frac{1}{2c}\int\varrho[\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{u}]\,dS = \mathfrak{m}.$$

Gleichungen für ponderabele Körper.

Konvektionsstrom:

$$\text{(XXIII)} \quad \mathfrak{K} = \varrho\mathfrak{w} \quad (\varrho \text{ beobachtbare Dichte der Ladung}).$$

Leitungsstrom:

$$\text{(XXIV)} \quad \mathfrak{J} = \overline{\varrho\mathfrak{u}}, \qquad \text{(XXIV a)} \quad \mathfrak{J} = Ne\mathfrak{u} + N'e'\mathfrak{u}' + N''e''\mathfrak{u}'' + \text{u. s. w.}$$

Elektrische Erregung und Verschiebungsstrom:

$$\text{(XXV)} \quad \mathfrak{D} = \bar{\mathfrak{d}} + \mathfrak{P}, \qquad \text{(XXVI)} \quad \mathfrak{V} = \dot{\mathfrak{D}}.$$

Röntgenstrom:

$$\text{(XXVII)} \quad \mathfrak{R} = \operatorname{rot}[\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{w}].$$

Gesamtstrom:

$$\text{(XXVIII)} \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{V} + \mathfrak{J} + \mathfrak{K} + \mathfrak{R}.$$

Definition der magnetischen Erregung und der magnetischen Kraft:

$$\text{(XXIX)} \quad \bar{\mathfrak{h}} = \mathfrak{B}, \quad \text{(XXX)} \quad \bar{\mathfrak{h}} - \mathfrak{M} = \mathfrak{B} - \mathfrak{M} = \mathfrak{H}, \quad \text{(XXX}'\text{)} \quad \mathfrak{H} - \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{E}] = \mathfrak{H}'.$$

Definition der elektrischen Kraft:

$$\text{(XXXI)} \quad \bar{\mathfrak{d}} = \mathfrak{E}, \quad \text{(XXXI}'\text{)} \quad \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{B}] = \mathfrak{E}', \quad \text{(XXXI}'\text{a)} \quad \bar{\mathfrak{d}}' = \mathfrak{E}'.$$

Potentiale:

$$\text{(XXXII)} \quad \bar{\varphi} = \Phi, \qquad \bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{A}.$$

Grundgleichungen für die Mittelwerte:

$$\text{(I}''\text{)} \quad \operatorname{div}\mathfrak{D} = \varrho,$$

$$\text{(II}''\text{)} \quad \operatorname{div}\mathfrak{C} = 0,$$

$$\text{(III}''\text{)} \quad \operatorname{rot}\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\mathfrak{C}, \qquad \text{(III}''\text{a)} \quad \operatorname{rot}\mathfrak{H}' = \frac{1}{c}(\mathfrak{J} + \underline{\dot{\mathfrak{D}}}),$$

$$\text{(IV}''\text{)} \quad \operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{B}}, \qquad \text{(IV}''\text{a)} \quad \operatorname{rot}\mathfrak{E}' = -\frac{1}{c}\underline{\dot{\mathfrak{B}}},$$

$$\text{(V}''\text{)} \quad \operatorname{div}\mathfrak{B} = 0,$$

$$\text{(VII}''\text{)} \quad \Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\ddot{\Phi} = -\varrho + \operatorname{div}\mathfrak{P},$$

$$(\text{VIII}'')\quad \Delta\mathfrak{A} - \frac{1}{c^2}\ddot{\mathfrak{A}} = -\frac{1}{c}(\mathfrak{J} + \varrho\mathfrak{w} + \dot{\mathfrak{P}} + \text{rot}[\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{w}] + c\,\text{rot}\,\mathfrak{M}),$$

$$(\text{IX}'')\quad \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{A}} - \text{grad}\,\Phi, \qquad (\text{X}'')\quad \mathfrak{B} = \text{rot}\,\mathfrak{A}.$$

Zusammenhang zwischen Leitungsstrom und elektrischer, bez. elektromotorischer Kraft:

$$(\text{XXXIII})\ \mathfrak{J} = \sigma\mathfrak{E},\quad (\text{XXXIII}')\ \mathfrak{J} = (\sigma)\mathfrak{E},\quad (\text{XXXIII}''')\ \mathfrak{J} = (\sigma)(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^{el})$$

Leitungsstrom in einem bewegten Körper:

$$(\text{XXXIII}'')\quad \mathfrak{J} = (\sigma)\mathfrak{E}'.$$

Zusammenhang zwischen elektrischer Polarisation, bez. elektrischer Erregung, und elektrischer Kraft in isotropen und anisotropen Körpern:

$$(\text{XXXIV})\quad \mathfrak{P} = \eta\mathfrak{E}, \qquad (\text{XXXIV}')\quad \mathfrak{P} = (\eta)\mathfrak{E},$$

$$(\text{XXXV})\quad \mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}, \qquad (\text{XXXV}')\quad \mathfrak{D} = (\varepsilon)\mathfrak{E}.$$

Elektrische Polarisation bei Anwesenheit einer elektromotorischen Kraft:

$$(\text{XXXIV}'')\quad \mathfrak{P} = \eta(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^{ev}), \qquad (\text{XXXIV}^{\text{IV}})\quad \mathfrak{P} = (\eta)(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^{ev}).$$

Elektrische Polarisation in einem bewegten unmagnetisierten Nichtleiter:

$$(\text{XXXIV}''')\quad \mathfrak{P} = (\eta)\mathfrak{E}'.$$

Zusammenhang zwischen magnetischer Erregung und magnetischer Kraft in isotropen und anisotropen Körpern:

$$(\text{XXXVI})\quad \mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}, \qquad (\text{XXXVI}')\quad \mathfrak{B} = (\mu)\mathfrak{H}.$$

Energiefluß, *Joule*'sche Wärme, elektrische und magnetische Energie in ruhenden Körpern:

$$(\text{XXXVII})\quad \mathfrak{S} = c[\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{H}],$$

$$(\text{XXXVIII})\quad Q = ((\sigma')\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{J}),$$

$$(\text{XXXIX})\quad W_e = \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}^2 + \tfrac{1}{2}((\eta')\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{P}) = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{D}) + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}^{ev}\cdot\mathfrak{P}),$$

oder

$$(\text{XXXIX}')\quad W_e = \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}^2 + W_{ep}, \qquad W_{ep} = \tfrac{1}{2}((\eta')\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{P}),$$

$$(\text{XL})\quad W_m = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{B}).$$

Elektromagnetischer Impuls in einem ruhenden Dielektrikum:

$$(\text{XLI})\quad \mathfrak{G}^a = \frac{1}{c^2}\int \mathfrak{S}\,dS.$$

Fiktive Spannungskomponenten in ruhenden unmagnetisierbaren Nichtleitern, bei Abwesenheit elektromotorischer Kräfte:

$$(\text{XLII})\quad X_x = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x - \mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_y - \mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_z) + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}_x^2 - \mathfrak{H}_y^2 - \mathfrak{H}_z^2) + \left(\frac{\partial W_{ep}}{\partial x_x}\right)_{\mathfrak{P}},\ \text{u. s. w.},$$

$$(\text{XLIII})\quad \tfrac{1}{2}(X_y + Y_x) = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_y + \mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_x) + \mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_y + \left(\frac{\partial W_{ep}}{\partial x_y}\right)_{\mathfrak{P}},\ \text{u. s. w.}$$

Elektrische und magnetische Energie, Energiefluß relativ zur Materie, in bewegten unmagnetisierbaren Nichtleitern, bei Abwesenheit elektromotorischer Kräfte:

$$\text{(XXXIX'')}\quad W_e = \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}^2 + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}'.\mathfrak{P}) = \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}^2 + \tfrac{1}{2}((\eta')\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{P}), \qquad \text{(XL')}\quad W_m = \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}^2,$$

$$\text{(XLIV)}\qquad \mathfrak{S}_n = c[\mathfrak{E}'\cdot\mathfrak{H}']_n - (\mathfrak{T}^n\cdot\mathfrak{w}).$$

I. Grundlagen der Elektronentheorie.

1. Allgemeines. Die Theorie, mit der sich dieser Artikel zu befassen hat, ist aus dem Bedürfnis entstanden, von den elektromagnetischen Vorgängen in ponderablen Körpern ein klareres und detaillierteres Bild zu entwerfen als es die *Maxwell-Hertz*'sche Theorie zu liefern vermag. Sie sucht dieses Ziel dadurch zu erreichen, daß sie *erstens* die Existenz des Äthers auch im Innern der ponderablen Körper voraussetzt, und *zweitens* die Anschauungen der Molekulartheorie, die sich auf anderen Gebieten als so fruchtbar erwiesen haben, verwertet. Für die erste Annahme findet sie in vielen optischen Erscheinungen schwer ins Gewicht fallende, in einigen derselben geradezu zwingende Gründe. Das Band aber zwischen der Materie [1] und dem Äther sucht sie in kleinen, mit elektrischen Ladungen ausgestatteten Teilchen, die sie in allen ponderablen Körpern voraussetzt. Nachdem zuerst die Tatsachen der Elektrolyse zu der Vorstellung solcher Teilchen geführt hatten, hat man später versucht, dieselbe in weiterem Umfange und namentlich auf die Entladungserscheinungen in Gasen, sowie auch auf die metallische Leitung [2] anzuwenden. Daß viele Entladungserscheinungen, speziell die an den Kathodenstrahlen [3] be-

---

1) Die Benennung „Materie" wird in diesem Artikel nicht mehr auf den Äther angewandt.

2) *W. Giese,* Experimentelle Beiträge zur Kenntnis vom elektrischen Leitungsvermögen der Flammengase, Ann. Phys. Chem. 17 (1882), pp. 537—544; Grundzüge einer einheitlichen Theorie der Elektrizitätsleitung, Ann. Phys. Chem. 37 (1889), p. 576; *A. Schuster,* Experiments on the discharge of electricity through gases. Sketch of a theory. London Proc. R. Soc. 37 (1884), p. 317; *Sv. Arrhenius,* Über das Leitungsvermögen der phosphoreszierenden Luft, Ann. Phys. Chem. 32 (1887), p. 545; Über das Leitungsvermögen beleuchteter Luft, Ann. Phys. Chem. 33 (1888), p. 638; *J. Elster* und *H. Geitel*, Wien. Ber. 97, IIa (1888), p. 1255; *F. Richarz,* Über die elektrischen und magnetischen Kräfte der Atome, Ann. Phys. Chem. 52 (1894), p. 385.

3) Die experimentelle Kenntnis dieser Erscheinung verdankt man in erster Linie *W. Hittorf* (erste Mitteilung: Über die Elektrizitätsleitung der Gase, Ann. Phys. Chem. 136 (1869), p. 1). In dem Vortrage „On radiant matter", Nature 20 (1879), p. 419, 436; Amer. Journ. of Science (3) 18 (1879), p. 241; Ann. chim.

obachteten, überhaupt keine andere Deutung zulassen, unterliegt gegenwärtig keinem Zweifel mehr. Andererseits lag es nahe, oscillierende Bewegungen geladener Teilchen als Ursprung der von einem Körper emittierten Licht- und Wärmestrahlen zu betrachten[4]), und das Mitschwingen ponderabler Teilchen, welches bereits in der Dispersionstheorie von *Sellmeier, Ketteler* und *Helmholtz* angenommen wurde, als eine Folge einer Ladung dieser Teilchen aufzufassen[5]).

So ist man allmählich dazu gekommen[6]), kleinen geladenen Teilchen, die wir mit einem von *Johnstone Stoney*[7]) herrührenden Namen „Elektronen" nennen wollen[8]), bei allen elektromagnetischen Erscheinungen, die sich nicht im freien Äther abspielen, eine Rolle zuzuschreiben.

Würde man nun den zwischen den Teilchen der Materie eingeschlossenen Äther an den sichtbaren Bewegungen der ponderablen Körper teilnehmen lassen, so käme wohl im wesentlichen wieder die *Hertz*'sche Theorie heraus, obgleich die Möglichkeit bestehen bliebe, diese durch die Erforschung der Umstände, welche die Werte der elektromagnetischen Konstanten der Körper bedingen, zu ergänzen. Man hat es jedoch vorgezogen, den Äther gar nicht durch die Ma-

---

phys. (5) 19 (1880), p. 195, und anderen Abhandlungen hat *W. Crookes* eine Hypothese aufgestellt, die man als den Vorläufer der jetzigen Theorie der Kathodenstrahlen betrachten kann. Siehe, was diese letztere betrifft, *E. Wiechert,* Über das Wesen der Elektrizität, Sitzungsber. der phys.-ökonom. Ges. zu Königsberg i. Pr., Jan. 1897, p. 3; *J. J. Thomson,* Cathode rays, Phil. Mag. (5) 44, p. 293, Okt. 1897.

4) *H. Ebert,* Elektrische Schwingungen molekularer Gebilde, Ann. Phys. Chem. 49 (1893), p. 651.

5) *Lorentz,* Over het verband tusschen de voortplantingssnelheid van het licht en de dichtheid en samenstelling der middenstoffen, Amsterdam Akad. Verh. 18 (1878), p. 1; Über die Beziehung zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes und der Körperdichte, Ann. Phys. Chem. 9 (1880), p. 641.

6) Vgl. *W. Kaufmann,* Die Entwicklung des Elektronenbegriffs, Phys. Zeitschrift 3 (1901), p. 9.

7) *G. Johnstone Stoney,* Dublin Trans. R. Soc. (2) 4 (1891), p. 583.

8) Wir nehmen das Wort in etwas weiterem Sinne als *Johnstone Stoney.* „Elektron" heißt im folgenden jedes geladene Teilchen, einerlei ob es ponderabele Masse enthält, oder, wie es für die „freien Elektronen" z. B. in den Kathodenstrahlen wahrscheinlich ist, sich nur durch seine Ladung von Teilen des freien Äthers unterscheidet. In den allgemeinen Betrachtungen legen wir indes die erste Annahme als die allgemeinere zu Grunde.

Nach dieser Auffassung ist der Name auch für die bei der Elektrolyse ins Spiel kommenden geladenen Teilchen geeignet. Für diese ziehen wir jedoch das Wort „Ion" vor; vielleicht sind in denselben ein ungeladener Teil und eine gewisse Anzahl geladener Körperchen, die dann „Elektronen" genannt werden könnten, zu unterscheiden.

terie mitführen zu lassen[9]), eine von *Fresnel* herrührende Hypothese, die sich auf dem Gebiete der Lichtaberration und der damit zusammenhängenden Erscheinungen wohl bewährt hat. Dieselbe liegt, und zwar in voller Konsequenz, den nachstehenden Betrachtungen zu Grunde; der Äther soll also ein Medium sein, das alle Elektronen und alle sonstigen materiellen Teilchen durchdringt und dessen Volumenelemente sich nie relativ gegen einander bewegen. Eine vollkommene Naturwissenschaft würde, nach dieser Auffassung, die relativen Bewegungen der Materie in Bezug auf den Äther, und auch nur diese, aus den Beobachtungen ableiten können. Es steht nichts im Wege, diese relativen Bewegungen zur Abkürzung als absolute zu bezeichnen und von einem „ruhenden" Äther zu sprechen.

Die Zustände im freien Äther werden von den gewöhnlichen *Hertz-Heaviside*'schen Gleichungen beherrscht, und lassen sich mittels zweier Vektoren darstellen. Diese sind die elektrische Erregung, die jetzt mit $\mathfrak{d}$, und die magnetische Feldstärke, die mit $\mathfrak{h}$ bezeichnet werden soll[10]). Auch im Inneren eines Elektrons bestehen die entsprechenden Zustände des Äthers; hier sind indes die Feldgleichungen in einer von der Ladung und der Bewegung der Elektronen abhängigen Weise zu modifizieren. Zu den in diesem Gedankengange erhaltenen Formeln kommen dann noch solche, welche die von dem Äther auf die Elektronen ausgeübten und die Bewegung dieser letzteren bestimmenden Kräfte angeben.

Was die nicht geladenen Teilchen der Materie betrifft, so wird angenommen, daß in deren Innerem der Äther sich in nichts von dem freien Äther unterscheidet; diese Teilchen können infolgedessen nur dadurch einen Einfluß auf die Erscheinungen haben, daß von ihnen gewisse auf die Elektronen wirkende Kräfte ausgehen. Die Theorie versucht es nicht, von der Natur dieser Kräfte Rechenschaft zu geben.

---

9) *Lorentz,* La théorie électromagnétique etc.; Versuch u. s. w.; *Larmor,* A dynamical theory of the electric and luminiferous medium, London Phil. Trans. A, 185 (1894), p. 719; 186 (1895), p. 695; 190 (1897), p. 205; Aether and matter, (1900); *E. Wiechert,* Über die Bedeutung des Weltäthers, Abh. d. phys. ökonom. Ges. z. Königsberg i. Pr. (1894), p. 4; Die Theorie der Elektrodynamik und die Röntgensche Entdeckung, Abh. der Phys.-ökon. Ges. zu Königsberg i. Pr. (1896), p. 1; Über die Grundlagen der Elektrodynamik, Ann. Phys. Chem. 59 (1896), p. 283; Hypothesen für eine Theorie der elektrischen und magnetischen Erscheinungen, Göttinger Nachr., math.-phys. Klasse 1898, p. 88; Grundlagen der Elektrodynamik, Festschrift z. Feier d. Enthüllung d. Gauß-Weber-Denkmals in Göttingen, Leipzig 1899.

10) Es geschieht dies in der Absicht, die großen Buchstaben für später einzuführende Vektoren zu reservieren.

Es ist klar, daß in den genannten Annahmen in gewissem Sinne eine Rückkehr zu der älteren, namentlich von *Wilhelm Weber* vertretenen Elektrizitätslehre liegt, die mit zwei elektrischen Flüssigkeiten operierte. Jedoch bleibt die Grundidee der *Maxwell*'schen Theorie bestehen; alle elektromagnetischen Wirkungen geschehen unter Vermittlung des Äthers, und zwar in solcher Weise, daß im allgemeinen jede Änderung im Bewegungszustande der Elektronen einen Einfluß hat, der sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet. Insofern die Theorie über diese Fortpflanzung ganz bestimmte Aussagen macht, erfüllt sie eine Forderung, die vor vielen Jahren von *Gauß*[11]) an ein Grundgesetz der Elektrodynamik gestellt wurde; zugleich führt sie, und zwar in einer neuen erst nach den Arbeiten von *Maxwell* möglichen Form einen Gedanken durch, den schon *Riemann*[12]), *C. Neumann*[13]) und *Betti*[14]) verfolgt haben.

Während die Elektronentheorie für ruhende Systeme zu denselben Ergebnissen wie die Theorie von *Hertz* führt, besteht ein tiefgehender Unterschied, was die bewegten Systeme betrifft. Dieser zeigt sich darin, daß dem Prinzip von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung nicht mehr, wie bei *Hertz* genügt wird, was damit zusammenhängt, daß die Erscheinungen nicht nur von der relativen Bewegung der betrachteten Körper, sondern von deren Bewegung in Bezug auf den Äther abhängen. Es besteht in dieser Beziehung zwischen den *Hertz*'schen Anschauungen und der Elektronentheorie ein ähnlicher Gegensatz, wie zwischen den elektrodynamischen Grundgesetzen von *Weber* und *Clausius*[15]). Überhaupt hat die Elektronentheorie manche Berührungspunkte mit den Entwicklungen von *Clausius*; nur fehlt bei diesem Physiker die Fortpflanzung der Wirkungen mit endlicher Geschwindigkeit.

Es war oben die Rede von dem Inneren eines Elektrons. Damit ist gesagt, daß ein solches Teilchen eine gewisse räumliche Ausdehnung habe. Allerdings kann man bei vielen Problemen davon gänzlich absehen; man kann ein Elektron manchmal als einen Punkt betrachten, der eine Ausnahmestelle für die Gültigkeit der sonst im Äther erfüllten Gleichungen bildet und in dem gewisse Zustands-

---

11) *Gauß,* Werke 5, p. 627. Vgl. auch Art. V 12, Nr. 7.

12) *Riemann,* Ein Beitrag zur Elektrodynamik, Ann. Phys. Chem. 131 (1867), p. 237; Ges. Werke, 2. Aufl. Leipzig 1892, p. 288. Vgl. auch Art. V 12, Nr. 7.

13) *C. Neumann,* Die Prinzipien der Elektrodynamik, Tübingen (1868); Math. Ann. 1 (1869), p. 317. Vgl. auch Art. V 12, Nr. 8.

14) *E. Betti,* Sopra la elettrodinamica, Il Nuovo Cimento 27 (1868), p. 402.

15) Vgl. Art. V 12, insbes. p. 60, 61.

größen in bestimmter Weise unendlich werden. Da indessen die Beobachtungen eine untere Grenze für die Dimensionen der Elektronen liefern[16]), und da man leicht an den Resultaten erkennt, inwiefern dieselben von den über den inneren Zustand der Elektronen gemachten Ansätzen abhängig sind, so empfiehlt es sich, mit der Analyse auch in das Innere der Teilchen einzudringen. Freilich bleibt gerade in diesem Punkte große Ungewißheit bestehen. Trotzdem wird eine Theorie, die, indem sie von ganz bestimmten Voraussetzungen ausgeht, auch auf jede Frage mit einer bestimmten Aussage antwortet, nützlich sein, wäre es auch nur als Vorbereitung zu späteren vielleicht sehr abweichenden Auffassungen.

Zur Vereinfachung wird angenommen, daß die Ladung eines Elektrons mit endlicher Raumdichtigkeit ϱ verteilt ist, welche sich stetig von Punkt zu Punkt ändert, also an der Oberfläche eines Elektrons allmählich auf 0 herabsinkt. Fälle einer scharf begrenzten Ladung und einer Flächenladung können als Grenzfälle behandelt werden.

Viele Sätze gelten auch dann, wenn die elektrische Ladung in beliebiger Weise kontinuierlich über einen Raum verteilt ist. Bei den Grundgleichungen setzen wir daher diesen allgemeinen Fall voraus und reden von den Feldgleichungen im Inneren einer Ladung, sowie von der „auf die Ladung“ oder „auf die geladene Materie“ infolge des im Äther bestehenden Zustandes wirkenden Kraft. Der Übergang zu einer in vereinzelten Elektronen konzentrierten Ladung und zu den auf diese wirkenden Kräften ist dann immer leicht auszuführen.

2. Grundgleichungen für den Äther[17]). Bestimmte Annahmen über den „Mechanismus“ der Erscheinungen sollen im folgenden nicht gemacht werden. *Larmor* hat in seiner Theorie die Vorstellung des quasi-rigiden Äthers (V 13, Nr. 42) zum Ausgangspunkt gewählt; doch sind auch bei ihm die weiteren Entwickelungen davon unabhängig.

Die Einheiten wählen wir so, wie es im vorigen Art. Nr. 7 auseinandergesetzt wurde. Auch halten wir uns an die in Nr. 3 daselbst erklärten mathematischen Bezeichnungen.

Es ist für jeden Punkt des freien Äthers

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{d} = 0,$$

und an allen Stellen, wo eine elektrische Ladung vorhanden ist,

$$\text{(Ia)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{d} = \varrho,$$

---

16) Siehe unten, Nr. **24.**

17) Vgl. z. B. *Wiechert,* Grundlagen der Elektrodynamik.

welche letztere Gleichung man auch als Definition von ϱ auffassen könnte.

Es sei weiter $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit irgend eines Punktes der geladenen Materie, und es möge im Laufe der Bewegung jedes substantielle Raumelement seine Ladung unverändert behalten. Es gilt dann, ein ruhendes Koordinatensystem vorausgesetzt, die Gleichung

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathfrak{v}) = 0.$$

Der Verschiebungsstrom ist

$$\dot{\mathfrak{d}},$$

und als Ausdruck des Konvektionsstromes hat man den Vektor

$$\varrho \mathfrak{v}$$

anzusehen. Der Gesamtstrom

$$(1) \qquad \mathfrak{c} = \dot{\mathfrak{d}} + \varrho \mathfrak{v}$$

besitzt dann nach (Ia) und (II) die Eigenschaft der solenoidalen Verteilung. Demgemäß ist es statthaft, für die magnetische Feldstärke $\mathfrak{h}$ die Gleichung

$$\text{(III)} \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{h} = \frac{1}{c} \mathfrak{c} = \frac{1}{c} (\dot{\mathfrak{d}} + \varrho \mathfrak{v})$$

anzunehmen.

Die andere Hauptgleichung der *Hertz-Heaviside*'schen Theorie soll ungeändert bleiben; wir führen sie in der Gestalt

$$\text{(IV)} \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{d} = - \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{h}}$$

ein, und nehmen überdies an, daß nicht nur, wie hieraus hervorgeht,

$$\operatorname{div} \dot{\mathfrak{h}} = 0,$$

sondern auch

$$\text{(V)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{h} = 0$$

ist.

3. Die auf die geladene Materie wirkende Kraft. Es soll jetzt unter der *elektrischen Kraft* $\mathfrak{f}$ die auf ein Volumenelement der geladenen Materie pro Einheit der Ladung wirkende Kraft verstanden werden. Die Beobachtungen über die ponderomotorischen Wirkungen in elektrostatischen und elektromagnetischen Feldern legen es nahe, für dieselbe die Formel

$$\text{(VI)} \qquad \mathfrak{f} = \mathfrak{d} + \frac{1}{c} [\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{h}]$$

zu Grunde zu legen.

4. Einführung von Potentialen. Von den Grundgleichungen ausgehend kann man die Vektoren $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{h}$ mit Hilfe eines elektri-

schen skalaren Potentials φ und eines magnetischen Vektorpotentials $\mathfrak{a}$ darstellen[18]. Es genügen diese Hilfsgrößen den Differentialgleichungen

$$\text{(VII)} \qquad \Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\ddot{\varphi} = -\varrho,$$

$$\text{(VIII)} \qquad \Delta\mathfrak{a} - \frac{1}{c^2}\ddot{\mathfrak{a}} = -\frac{1}{c}\varrho\mathfrak{v},$$

und es ist

$$\text{(IX)} \qquad \mathfrak{d} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{a}} - \operatorname{grad}\varphi,$$

$$\text{(X)} \qquad \mathfrak{h} = \operatorname{rot}\mathfrak{a}.$$

Zwischen den beiden Potentialen besteht die Relation

$$(2) \qquad \operatorname{div}\mathfrak{a} = -\frac{1}{c}\dot{\varphi}.$$

Man gelangt zu diesen Formeln in folgender Weise. Aus (V) geht sofort hervor, daß die magnetische Kraft sich in der Form (X) darstellen läßt, und es folgt dann weiter aus (IV)

$$\operatorname{rot}\left(\mathfrak{d} + \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{a}}\right) = 0,$$

was auf (IX) führt. Hierbei bleiben, obgleich bei jeder elektromagnetischen Erscheinung $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{h}$ bestimmte Funktionen von x, y, z, t sind, die Potentiale $\mathfrak{a}$ und φ teilweise unbestimmt. Diesen Übelstand heben wir, indem wir dieselben der weiteren Bedingung (2) unterwerfen. Sind nämlich $\mathfrak{a}_0$ und φ_0 irgend welche mit den Gleichungen (IX) und (X) verträgliche Potentiale, so ist jedes andere zulässige Funktionenpaar $\mathfrak{a}$, φ von der Form

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 - \operatorname{grad}\chi, \qquad \varphi = \varphi_0 + \frac{1}{c}\dot{\chi}.$$

Hier läßt sich nun die skalare Funktion χ so bestimmen, daß der Gleichung (2), oder

$$\Delta\chi - \frac{1}{c^2}\ddot{\chi} = \operatorname{div}\mathfrak{a}_0 + \frac{1}{c}\dot{\varphi}_0$$

genügt wird. Man gelangt schließlich zu (VII) und (VIII), wenn man die Werte (IX) und (X) in (I a) und (III) einführt und dabei (2) berücksichtigt.

Auch für $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{h}$ selbst gelten Gleichungen von derselben Gestalt wie (VII) und (VIII)[19],

---

18) *A. Liénard,* Champ électrique et magnétique produit par une charge électrique concentrée en un point et animée d'un mouvement quelconque, L'Éclairage électrique 16 (1898), p. 5, 53, 106; *Wiechert,* Elektrodynamische Elementargesetze, Arch. néerl. (2), 5 (1900), p. 549.

19) *Lorentz,* La théorie électromagnétique etc., § 112.

$$\Delta \mathfrak{d} - \frac{1}{c^2}\ddot{\mathfrak{d}} = \operatorname{grad} \varrho + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\varrho \mathfrak{v}),$$

$$\Delta \mathfrak{h} - \frac{1}{c^2}\ddot{\mathfrak{h}} = -\frac{1}{c}\operatorname{rot}(\varrho \mathfrak{v}).$$

5. Integration der Potentialgleichungen[20]). Soll die Funktion ψ in einem von der Fläche σ begrenzten Raum der Differentialgleichung

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2}\ddot{\psi} = \omega$$

genügen, in der ω eine gegebene Funktion von x, y, z, t ist, so ist der Wert von ψ in einem Punkt P jenes Raumes zur Zeit t

$$\psi = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}[\omega]\, dS + \frac{1}{4\pi}\int \left\{ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial \psi}{\partial n}\right] - [\psi]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{c}[\dot{\psi}]\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n} \right\} d\sigma. \tag{3}$$

Hier ist r die Entfernung des Raumelementes dS oder des Oberflächenelementes $d\sigma$ vom Punkte P; die Einschließung in eckige Klammern soll dazu dienen, die Werte zur Zeit $t - r/c$ anzudeuten. Läßt man die Fläche σ nach allen Richtungen hin ins Unendliche rücken, so verschwindet in vielen Fällen das Oberflächenintegral, namentlich dann, wenn einmal, im Laufe der Zeit, in entfernten Punkten $\psi = 0$ gewesen ist. Die in dieser Weise aus (3) entstehende Gleichung soll im folgenden zur Bestimmung des elektromagnetischen Feldes dienen. Nach derselben ist

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}[\varrho]\, dS, \tag{XI}$$

und, da die Gleichung auch dann gilt, wenn ω und ψ Vektoren sind,

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{4\pi c}\int \frac{1}{r}[\varrho \mathfrak{v}]\, dS. \tag{XII}$$

Die Form der vorstehenden Gleichungen veranlaßt uns zu zwei Bemerkungen. Erstens zeigt sie, daß die zur Zeit t in einem bestimmten Punkte bestehenden Zustandsgrößen von den Zuständen abhängen, die in den verschiedenen Raumelementen zu einer früheren Zeit und zwar jedesmal zur Zeit $t - r/c$ vorhanden waren. Das ist nun allerdings (eben weil wir das Oberflächenintegral in (3) verschwinden ließen) nicht die allgemeinste Lösung der Grundgleichungen und sind z. B. auch Lösungen möglich, die eine Fortpflanzung auf die Volumelemente zu, statt von denselben fort, anzeigen würden. Von solchen wollen wir indes die Theorie frei halten, indem wir ein für

20) Encyklopädie IV, Art. *Lamb,* Akustik. Gl. (3) ist eine Verallgemeinerung der Lösung des sog. *Poisson'schen Problems.*

allemal die Voraussetzung machen, daß in Wirklichkeit die geladenen Volumelemente nur Ausgangspunkte von Gleichgewichtsstörungen sind. Wir schließen auch alle Zustände im Äther aus, die gar nicht mit geladener Materie zusammenhängen; wäre letztere nicht da, so bliebe das Gleichgewicht des Äthers beständig ungestört.

Im Hinblick auf die soeben besprochene Eigentümlichkeit der Lösung nennen wir füglich φ und $\mathfrak{a}$ *verzögerte* Potentiale.

Die zweite Bemerkung betrifft das lineare Auftreten von ϱ, $\varrho\mathfrak{v}$, φ, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{h}$. Wir schließen daraus auf die Möglichkeit der Superposition verschiedener Lösungen, aus der wir oft Nutzen ziehen werden. Wir können uns nämlich jedes elektromagnetische Feld zusammengesetzt denken aus einer größeren oder kleineren Zahl von Partialfeldern, deren jedes, obigen Gleichungen entsprechend, durch ein einzelnes Elektron oder durch einen gewissen Teil des Elektronensystems „erregt" wird.

Es empfiehlt sich sogar bei einigen Untersuchungen — obgleich es im folgenden nicht geschehen wird — sich ein gegenseitiges Durchdringen zweier Ladungen, jede mit ihrer eigenen Geschwindigkeit, vorzustellen, und also etwa ϱ in ϱ_1, ϱ_2, u. s. w. zu zerlegen und $\varrho\mathfrak{v}$ durch $\varrho_1\mathfrak{v}_1 + \varrho_2\mathfrak{v}_2 +$ u. s. w. zu ersetzen.

6. Energie. Poynting'scher Satz. Es sei σ eine beliebige geschlossene Fläche, S der innere Raum. Aus den angeführten Gleichungen folgt

$$\int \varrho\,(\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{v})\,dS + \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int(\mathfrak{d}^2+\mathfrak{h}^2)\,dS\right\} + c\int[\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{h}]_n\,d\sigma = 0.$$

Diese Gleichung drückt das Energiegesetz, auf die Zeiteinheit bezogen, aus, und zwar stellt das erste Glied die Arbeit der vom Äther auf die geladene Materie ausgeübten Kräfte vor, das zweite die Zunahme der Energie des Äthers und das dritte die Energiemenge, welche den Raum durch die Fläche σ hin verläßt. Für die elektrische Energie pro Volumeneinheit ist zu setzen

(XIII) $$w_e = \tfrac{1}{2}\mathfrak{d}^2,$$

für die magnetische

(XIV) $$w_m = \tfrac{1}{2}\mathfrak{h}^2$$

und für den Energiestrom

(XV) $$\mathfrak{s} = c\,[\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{h}].$$

Die gesamte elektrische Energie bezeichnen wir mit U, die magnetische mit T.

Wir führen auch die Gleichungen an, die sich ergeben, wenn man in w_e und w_m die Werte (IX) und (X) einsetzt. Wir schreiben

dieselben, ebenso wie viele spätere Formeln, für den unendlichen Raum hin, was man sofort an dem Fehlen eines Integrales über eine Grenzfläche sieht; es soll dabei angenommen werden, daß die Integrale über den unendlichen Raum endlich bleiben und daß Integrale über eine unendlich entfernte Grenzfläche verschwinden.

Für die elektrische Energie findet man zunächst

$$U = -\frac{1}{2}\int \varphi \Delta \varphi \, dS + \frac{1}{c}\int (\dot{\mathfrak{a}} \cdot \operatorname{grad} \varphi)\, dS + \frac{1}{2c^2}\int \dot{\mathfrak{a}}^2 \, dS,$$

und dann, indem man die Hälfte des zweiten Gliedes partiell integriert und die Werte von $\Delta \varphi$ und div $\dot{\mathfrak{a}}$ den Gleichungen (VII) und (2) entnimmt,

$$U = \frac{1}{2}\int \left\{ \varrho \varphi + \frac{1}{c}(\dot{\mathfrak{a}} \cdot \operatorname{grad} \varphi) + \frac{1}{c^2}\dot{\mathfrak{a}}^2 \right\} dS. \tag{4}$$

Eine ähnliche Transformation, wobei man auch (VIII) zu beachten hat, führt zu der Formel

$$T = \frac{1}{2c}\int \left\{ (\varrho \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{a}) - (\mathfrak{a} \cdot \operatorname{grad} \dot{\varphi}) - \frac{1}{c}(\mathfrak{a} \cdot \ddot{\mathfrak{a}}) \right\} dS. \tag{5}$$

Von Interesse ist auch die sich hieraus ergebende Formel für die Differenz $T - U$, die wir mit L bezeichnen. Sie lautet

$$L = T - U = -\frac{1}{2}\int \varrho \psi \, dS - \frac{1}{2c}\frac{d}{dt}\int \left\{ (\mathfrak{a} \cdot \operatorname{grad} \varphi) + \frac{1}{c}(\mathfrak{a} \cdot \dot{\mathfrak{a}}) \right\} dS \tag{6}$$
$$= -\frac{1}{2}\int \varrho \psi \, dS + \frac{1}{2c}\frac{d}{dt}\int (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{d})\, dS$$

wo

$$\psi = \varphi - \frac{1}{c}(\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{a}). \tag{7}$$

Substituiert man hier die Werte (XI) und (XII), so erhält man für die Funktion ψ die einfache von *Schwarzschild*[21]) angegebene Form

$$\psi = \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r} \left\{ [\varrho] - \frac{1}{c^2}(\mathfrak{v} \cdot [\varrho \mathfrak{v}']) \right\} dS. \tag{8}$$

Hier bedeutet $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit im Punkte, für den man ψ berechnen will, $\mathfrak{v}'$ die Geschwindigkeit im Elemente dS.

Schwarzschild nennt ψ das *elektrokinetische Potential.*

Wir bemerken schließlich, daß die Gesamtenergie zweier superponierten Felder, die wir durch die Indices 1 und 2 voneinander unterscheiden wollen, sich aus drei Teilen zusammensetzt, deren erster

---

21) *K. Schwarzschild,* Zwei Formen des Prinzips der kleinsten Aktion in der Elektronentheorie, Gött. Nachr., math.-phys. Kl. 1903, p. 125.

und zweiter die Energien sind, die vorhanden sein würden, wenn entweder das erste oder das zweite Feld allein existierten, während der dritte Teil $U_{12} + T_{12}$ von der gleichzeitigen Existenz von beiden Feldern herrührt. Man erhält diesen Teil, wenn man pro Volumeneinheit eine elektrische Energie $(\mathfrak{d}_1 \cdot \mathfrak{d}_2)$ und eine magnetische Energie $(\mathfrak{h}_1 \cdot \mathfrak{h}_2)$ in Anschlag bringt. Man denke sich hierbei, daß die Ladungen der beiden Felder gänzlich auseinander liegen, daß also nie an derselben Stelle ϱ_1 und ϱ_2 gleichzeitig von Null verschieden seien.

Für die Größen U_{12}, T_{12}, $L_{12} = T_{12} - U_{12}$ gelten die den Gleichungen (4), (5) und (6) entsprechenden Formeln

$$(9) \qquad U_{12} = \int \left\{ \varrho_1 \varphi_2 + \frac{1}{c} (\dot{\mathfrak{a}}_2 \cdot \operatorname{grad} \varphi_1) + \frac{1}{c^2} (\dot{\mathfrak{a}}_1 \cdot \dot{\mathfrak{a}}_2) \right\} dS,$$

$$(10) \qquad T_{12} = \frac{1}{c} \int \left\{ (\varrho_1 \mathfrak{v}_1 \cdot \mathfrak{a}_2) - (\mathfrak{a}_2 \cdot \operatorname{grad} \dot{\varphi}_1) - \frac{1}{c} (\ddot{\mathfrak{a}}_1 \cdot \mathfrak{a}_2) \right\} dS,$$

$$(11) \qquad L_{12} = - \int \varrho_1 \psi_{21} dS + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int (\mathfrak{d}_1 \cdot \mathfrak{a}_2) dS.$$

In der letzten Gleichung ist

$$(12) \qquad \psi_{21} = \varphi_2 - \frac{1}{c} (\mathfrak{v}_1 \cdot \mathfrak{a}_2).$$

7. Allgemeine Betrachtung der auf geladene Materie wirkenden Kräfte. Elektromagnetischer Impuls. Eine ruhende Fläche σ umschließe ein aus geladener Materie bestehendes System, und es sei $\mathfrak{F}$ die Resultierende aller nach (VI) auf dieses System wirkenden Kräfte, also

$$\mathfrak{F} = \int \varrho \{ \mathfrak{d} + \frac{1}{c} [\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{h}] \} dS.$$

Ersetzt man hier ϱ und $\varrho \mathfrak{v}$ durch die aus (Ia) und (III) folgenden Werte, so ergibt sich nach partieller Integration, wenn man überdies Substitutionen wie $\frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{d}_y}{\partial x} + \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{h}}_z$, u. s. w. (nach (IV)) benutzt,

$$(13) \qquad \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2,$$

$$(14) \qquad \mathfrak{F}_{1x} = \tfrac{1}{2} \int [2 \mathfrak{d}_x \mathfrak{d}_n - \mathfrak{d}^2 \cos(n, x)] d\sigma + \tfrac{1}{2} \int [2 \mathfrak{h}_x \mathfrak{h}_n - \mathfrak{h}^2 \cos(n, x)] d\sigma$$

u. s. w.,

$$(15) \qquad \mathfrak{F}_2 = - \frac{1}{c^2} \int \dot{\mathfrak{s}} dS,$$

wo $\mathfrak{s}$ die in (XV) angegebene Bedeutung hat.

Die Kraft $\mathfrak{F}_1$ könnte man deuten als die Resultierende eines Systems auf σ wirkender Spannungen

$$(\text{XVI}) \qquad X_n = \tfrac{1}{2} [2 \mathfrak{d}_x \mathfrak{d}_n - \mathfrak{d}^2 \cos(n, x)] + \tfrac{1}{2} [2 \mathfrak{h}_x \mathfrak{h}_n - \mathfrak{h}^2 \cos(n, x)]$$

u. s. w.

Nimmt man die Existenz dieser Spannungen, die mit den von *Maxwell* abgeleiteten übereinstimmen, an, so ist damit im allgemeinen die auf die geladene Materie wirkende Kraft noch nicht vollständig dargestellt, da noch die Kraft $\mathfrak{F}_2$ hinzukommt. Es zeigt sich hier ein fundamentaler Gegensatz zwischen der jetzt entwickelten und der *Hertz*'schen Theorie, ein Gegensatz, der damit zusammenhängt, daß die Gesamtkraft $\mathfrak{F}$, ihrer Bedeutung nach, verschwinden muß, sobald die Fläche σ nur freien Äther in sich schließt. Die Kraft $\mathfrak{F}_1$, welche in diesem Fall aus den Spannungen resultieren würde (vgl. Art. V 13, Nr. 26), wird eben durch $\mathfrak{F}_2$ aufgehoben.

Hat man es mit einem System geladener Materie von endlichen Dimensionen zu tun, so hat die Kraft $\mathfrak{F}$ einen bestimmten Wert, einerlei ob die Fläche σ dem Systeme eng anliegt oder dasselbe in größerer Entfernung umschließt. Läßt man dann die Fläche nach allen Seiten hin ins Unendliche rücken, und verschwindet dabei $\mathfrak{F}_1$, so wird

$$\mathfrak{F} = -\frac{1}{c^2}\int \dot{\mathfrak{s}}\, dS.$$

Es würde also der Impuls (die Bewegungsgröße) $\mathfrak{G}^m$ des materiellen Systems in der Zeiteinheit eine dieser Kraft $\mathfrak{F}$ gleiche Änderung erleiden, und dem würde keine entgegengesetzt gleiche Änderung einer anderen Bewegungsgröße gegenüberstehen. Hierin liegt eine Verletzung des Prinzips der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung, die namentlich *Poincaré* [22]) als einen Mangel der Theorie hervorgehoben hat, obgleich er zugibt, daß derselbe schwer zu beseitigen ist. In der Tat wurzelt diese Abweichung von der gewöhnlichen Mechanik in den Grundlagen der Theorie, wenn man diese so auffaßt [23]), daß zwar der Äther Kräfte auf geladene Materie ausübt, daß aber von einer strömenden Bewegung des Äthers, von Beschleunigungen dieses Mittels und von Kräften, die auf dasselbe wirken, nie die Rede ist. Es verdient indessen bemerkt zu werden, daß jede Änderung der Bewegungsgröße der Materie von einer Änderung in entgegengesetztem Sinne einer bestimmten von dem Zustande des Äthers abhängigen Größe, wenn auch nicht einer Bewegungsgröße im gewöhnlichen Sinne des Wortes begleitet ist. Setzt man nämlich

$$\text{(XVII)}\qquad \mathfrak{G}^a = \frac{1}{c^2}\int \mathfrak{s}\, dS,$$

indem man durch den Index a auf den Äther, sowie vorher durch den Index m auf die Materie hinweist, so ist

22) *Poincaré*, Électricité et optique, 2e édition, p. 448; La théorie de *Lorentz* et le principe de la réaction, Arch. néerl. (2) 5 (1900), p. 252.

23) *Lorentz*, Versuch u. s. w., §§ 15—17.

$$\mathfrak{G}^m + \mathfrak{G}^a = \text{konst.}$$

Wegen dieser Eigenschaft kann man $\mathfrak{G}^a$ den *elektromagnetischen Impuls* oder die *elektromagnetische Bewegungsgröße* nennen[24]).

Bleibt man dem Grundsatze getreu, nicht von Kräften zu reden, die auf den Äther wirken, so kann man den Spannungen (XVI), die ja zwischen zwei Teilen des Äthers wirken würden, keine reelle Existenz zuschreiben. Immerhin kann man sich der Gleichungen (14) und (15) als bequemer Rechnungsformeln bedienen und für die auf der rechten Seite der ersten stehenden Größen den Namen „(fiktive) Spannungen" beibehalten. Es empfiehlt sich dies besonders in den Fällen, wo $\mathfrak{F}_2$ verschwindet, so bei allen stationären Zuständen, und wenn es sich bei rein periodischen Vorgängen um den Mittelwert der Kraft während einer vollen Periode handelt. Ist z. B. ein Körper einer konstanten Lichtstrahlung ausgesetzt, dann läßt sich die resultierende ponderomotorische Kraft durch ein Integral über eine im Äther liegende, den Körper eng umschließende Fläche darstellen; in diesem Sinne kann man von einem „Druck" der Lichtstrahlen reden. Der Druck ist normal gerichtet und hat den Wert $\frac{1}{c}(E + E')$, wenn eine Scheibe senkrecht von Strahlen getroffen wird, die der Flächeneinheit pro Sekunde die Energiemenge E zuführen, während in den reflektierten Strahlen die Energie E' rückwärts strömt. Pflanzen sich in einem nur Äther enthaltenden Raum Strahlen von jeder transversalen Schwingungsrichtung nach allen Seiten in derselben Weise fort, dann gelten für die in Betracht kommenden Mittelwerte die Beziehungen

$$X_y = Y_z = Z_x = 0,$$

$$X_x = Y_y = Z_z = \tfrac{1}{3}(X_x + Y_y + Z_z) = -\tfrac{1}{6}(\mathfrak{d}^2 + \mathfrak{h}^2) = -\tfrac{1}{3}(w_e + w_m);$$

daraus folgt, daß für jedes Flächenelement die fiktive Spannung sich auf einen normalen Druck $\frac{1}{3}(w_e + w_m)$ reduziert. Diesen Druck erleiden alle in dem Raum befindlichen Körper und auch die Teile einer denselben einschließenden Wand. Von letzterem überzeugt man sich, wenn man ein Element $d\sigma$ der Wand durch einen engen Schlitz von dem übrigen Teil trennt und dann das obengenannte Integral für eine dieses Wandelement eng umschließende durch den Schlitz geführte Fläche berechnet.

Es hängt übrigens von der Natur der Probleme ab, ob man die auf einen Teil der geladenen Materie wirkende Kraft am leichtesten

24) *M. Abraham*, Prinzipien der Dynamik des Elektrons, Ann. Phys. 10 (1903), p. 105.

aus den „Spannungen", durch direkte Anwendung der Grundgleichung (VI) oder mittels der weiter unten anzuführenden Sätze bestimmen wird.

Ebenso wie die Resultierende der auf die von σ eingeschlossene geladene Materie wirkenden Kräfte kann man auch das resultierende Drehmoment $\mathfrak{N}$ dieser Kräfte in Bezug auf den Koordinatenursprung berechnen. Es gelten hierfür die den Formeln (13)—(15) analogen Gleichungen

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2,$$

$$\mathfrak{N}_{1x} = \int (y Z_n - z Y_n) d\sigma, \quad \text{u. s. w.},$$

$$\mathfrak{N}_2 = -\frac{1}{c^2}\int [\mathfrak{r} \cdot \dot{\mathfrak{s}}] dS, \tag{16}$$

wo $\mathfrak{r}$ der von O aus gezogene Radiusvektor ist.

Um zu diesen Gleichungen zu gelangen, kann man z. B. die auf ein Raumelement dS wirkende Kraft $\varrho \mathfrak{f} dS = \mathbf{F} dS$ in einer den Formeln (13)—(15) entsprechenden Weise darstellen, wobei

$$\mathbf{F}_{1x} = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}$$

wird, und dann die Integrale $\int (y \mathbf{F}_z - z \mathbf{F}_y) dS$, u. s. w. bestimmen[25]).

Den Gleichungen (4) und (5) lassen sich ähnliche für die Komponenten des elektromagnetischen Impulses an die Seite stellen. Es ist nach (XVII), (XV), (IX) und (X) für den unendlichen Raum

$$\mathfrak{G}_x^a = -\frac{1}{c}\int \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathfrak{h}_z - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\mathfrak{h}_y + \frac{1}{c}\left\{\dot{\mathfrak{a}}_y\left(\frac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial y}\right) - \dot{\mathfrak{a}}_z\left(\frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial x}\right)\right\}\right] dS,$$

also, wenn man partiell integriert, und (III), (IX) und (2) benutzt,

$$\mathfrak{G}_x^a = \frac{1}{c^2}\int \varrho \varphi \mathfrak{v}_x dS - \frac{1}{c^2}\int \left\{\varphi \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial x} - \mathfrak{a}_x \frac{\partial \dot{\mathfrak{a}}_x}{\partial x} - \mathfrak{a}_y \frac{\partial \dot{\mathfrak{a}}_y}{\partial x} - \mathfrak{a}_z \frac{\partial \dot{\mathfrak{a}}_z}{\partial x}\right\} dS$$
$$+ \frac{1}{c^3}\frac{d}{dt}\int (\mathfrak{a}_x \dot{\varphi} - \dot{\mathfrak{a}}_x \varphi) dS, \quad \text{u. s. w.} \tag{17}$$

8. Ableitung der Grundgleichungen aus den Prinzipien der Mechanik. Nimmt man an, daß die Gleichungen (I), (Ia), (II), sowie die Gleichungen (III) und (V), welche bei gegebenem $\mathfrak{c}$ die magnetische Kraft $\mathfrak{h}$ bestimmen, aus den im System bestehenden Zusammenhängen hervorgehen, betrachtet man die mit (XIII) berechnete elektrische Energie U als die potentielle und die magnetische Energie T, nach (XIV) berechnet, als die kinetische Energie

25) Siehe *Lorentz,* Bijdragen tot de electronentheorie, Zittingsverslag Amsterdam Akad. v. Wet. 11 (1903), p. 729 (Proceedings Amsterdam Akad. 1902—1903, p. 608). Dort ist auch ein dem Virialtheorem analoger Satz bewiesen.

eines quasi-holonomen Systems (V 13, Nr. **35**), und die Koordinaten der Materie nebst den Komponenten von $\mathfrak{d}$ als Koordinaten, so lassen sich die Bewegungsgleichungen für den Äther, d. h. die Formel (IV), und der Ausdruck (VI) für die elektrische Kraft aus dem *d'Alembert*schen Prinzip ableiten[26]). Man kann sich dabei vorstellen, daß auf die geladene Materie gewisse äußere Kräfte $\mathfrak{F}^*$ wirken, deren Arbeit in dem ersten Gliede der Formel

$$\delta A = \frac{d}{dt}(\delta' T) - \delta T \tag{18}$$

enthalten ist. Die virtuellen Verrückungen sind durch die Verrückungen $\mathfrak{q}$ der Materie und die Variation $\delta\mathfrak{d}$ anzugeben, wobei sich das Zeichen δ auf einen festen Raumpunkt beziehen soll. Dieselben sind der Bedingung zu unterwerfen, daß der Vektor

$$\delta\mathfrak{d} + \varrho\mathfrak{q}, \tag{19}$$

den man den „Verrückungsstrom" nennen könnte (vgl. (1)), solenoidal verteilt ist. Der Wert von $\delta' T$ ergibt sich, wenn man bei festgehaltener Lage der Materie dem Strome $\mathfrak{c}$ die Variation (19) auferlegt; es ist daher, wenn man irgend ein Vektorpotential $\mathfrak{a}$ mittels der Gleichung

$$\mathfrak{h} = \operatorname{rot} \mathfrak{a}$$

einführt (vgl. V 13, Nr. **29**)

$$\delta' T = \frac{1}{c}\int (\mathfrak{a}\cdot\{\delta\mathfrak{d} + \varrho\mathfrak{q}\})\,dS.$$

Was den Wert von δT anbelangt, so erhält man diesen richtig (vgl. V 13, Nr. **35**), wenn man als variierte Bewegung eine solche betrachtet, bei welcher im Laufe der Zeit dt die Koordinaten der Materie und die Komponenten von $\mathfrak{d}$ von den der Zeit t entsprechenden variierten Werten in die variierten Werte für die Zeit $t + dt$ übergehen.

a) Es sei zunächst $\mathfrak{q} = 0$, $\delta\mathfrak{d}$ unabhängig von der Zeit. Man hat dann

$$\delta T = 0, \quad \delta' T = \frac{1}{c}\int (\mathfrak{a}\cdot\delta\mathfrak{d})\,dS,$$

$$\delta A = -\delta U = -\int (\mathfrak{d}\cdot\delta\mathfrak{d})\,dS,$$

also nach (18), für jedes solenoidal verteilte $\delta\mathfrak{d}$

$$-\int (\mathfrak{d}\cdot\delta\mathfrak{d})\,dS = \frac{1}{c}\int (\dot{\mathfrak{a}}\cdot\delta\mathfrak{d})\,dS.$$

26) *Lorentz*, La théorie électromagnétique etc., §§ 76—80.

Hieraus folgt

$$\operatorname{rot} \mathfrak{b} = -\frac{1}{c} \operatorname{rot} \dot{\mathfrak{a}} = -\frac{1}{c} \dot{\mathfrak{h}}.$$

b) Zweitens kombiniere man eine Verrückung $\mathfrak{q}$ der geladenen Materie, die in jedem Raumpunkte unabhängig von der Zeit gedacht wird, mit einer solchen Variation $\delta \mathfrak{b}$, daß der Verrückungsstrom (19) gleich Null ist, also mit

$$\delta \mathfrak{b} = -\varrho \mathfrak{q}; \tag{20}$$

es ist dann $\delta' T = 0$. Man kann aus den äußeren auf die Materie wirkenden Kräften einen Teil abscheiden, der gerade der elektrischen Kraft $\mathfrak{f}$ das Gleichgewicht hält. Die übrigbleibenden Kräfte, von welchen dann die Bewegung der Materie allein abhängt, brauchen nicht weiter berücksichtigt zu werden, wenn man unter U und T nur die elektromagnetischen Teile der potentiellen und der kinetischen Energie versteht. Es ist also zu setzen

$$\delta A = -\int \varrho (\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{q})\, dS - \delta U.$$

Um $\delta \mathfrak{v}_x$, die Variation in einem festen Punkte des Raumes, zu berechnen, bemerken wir, daß, wenn $(\delta \mathfrak{v}_x)$ und $\frac{d}{dt}$ sich auf einen bestimmten Punkt der Materie beziehen,

$$(\delta \mathfrak{v}_x) = \frac{d \mathfrak{q}_x}{dt}$$

ist. Also, wenn man den Zusammenhang, einerseits zwischen $(\delta \mathfrak{v}_x)$ und $\delta \mathfrak{v}_x$, andererseits zwischen $\frac{d \mathfrak{q}_x}{dt}$ und $\dot{\mathfrak{q}}_x$ in Betracht zieht,

$$\delta \mathfrak{v}_x = \dot{\mathfrak{q}}_x - \left(\mathfrak{q}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{q}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{q}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \mathfrak{v}_x + \left(\mathfrak{v}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{v}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{v}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \mathfrak{q}_x, \tag{21}$$

u. s. w.,

wo jetzt $\dot{\mathfrak{q}} = 0$ zu setzen ist. Weiter ist (vgl. (II))

$$\delta \varrho = -\operatorname{div} (\varrho \mathfrak{q}),$$

und nach (20) und (II)

$$\delta \dot{\mathfrak{b}} = -\dot{\varrho} \mathfrak{q} = \operatorname{div} (\varrho \mathfrak{v}) \cdot \mathfrak{q}.$$

Berechnet man mit diesen Werten die Variation des Gesamtstroms (1), so erhält man nach einigen Umformungen

$$\delta \mathfrak{c} = \operatorname{rot} \{\varrho [\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{v}]\},$$

und bei Integration über den unendlichen Raum

$$\delta T = \frac{1}{c} \int (\mathfrak{a} \cdot \delta \mathfrak{c})\, dS = \frac{1}{c} \int (\mathfrak{a} \cdot \operatorname{rot} \{\varrho [\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{v}]\})\, dS = \frac{1}{c} \int (\varrho [\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{v}] \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{a})\, dS$$

$$= \frac{1}{c} \int \varrho ([\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{v}] \cdot \mathfrak{h})\, dS = \frac{1}{c} \int \varrho ([\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{h}] \cdot \mathfrak{q})\, dS.$$

Da nun

$$\delta U = \int (\mathfrak{d} \cdot \delta \mathfrak{d})\, dS = -\int \varrho\, (\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{q})\, dS,$$

so liefert schließlich (18) die Bedingung

$$-\int \varrho\, (\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{q})\, dS + \int \varrho\, (\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{q})\, dS = -\frac{1}{c} \int \varrho\, ([\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{h}] \cdot \mathfrak{q})\, dS,$$

die für ein beliebig gewähltes $\mathfrak{q}$ erfüllt sein muß. Folglich

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{d} + \frac{1}{c} [\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{h}].$$

Ebenso wie hier das *d'Alembert*'sche Prinzip angewendet wurde, kann man sich auch des Prinzips der kleinsten Wirkung[27]) oder der *Lagrange*'schen Gleichungen[28]) bedienen.

9. Allgemeine den Grundgleichungen äquivalente Sätze. Abgesehen von der Frage nach der Möglichkeit einer mechanischen Erklärung, ist es beachtenswert, daß man die Grundgleichungen der Theorie in Sätze, die an die Prinzipien der Mechanik erinnern, zusammenfassen kann. Man hat, um das zu tun, gewissermaßen den umgekehrten Weg wie in der vorigen Nummer zu gehen.

a) Wir bestimmen wieder[29]) eine unendlich kleine Variation der zu betrachtenden elektromagnetischen Erscheinung durch die Vektoren $\mathfrak{q}$ und $\delta \mathfrak{d}$, die sich kontinuierlich in der Zeit ändern sollen. Denken wir uns, was die Lage der Materie und das Feld $\mathfrak{d}$ betrifft, den Übergang von dem der Zeit t entsprechenden variierten Zustande in den der Zeit $t + dt$ entsprechenden in dem Intervall dt vollzogen, so gelangen wir zur Vorstellung des variierten Vorganges; auch die bei diesem bestehende Elektrizitätsbewegung berechnen wir nach (1). Daß dann auch der variierte Strom solenoidal verteilt sein wird, dafür bürgt uns unsere Annahme, daß auch bei den virtuellen Variationen weder die Bedingung (Ia) verletzt, noch die Ladung der materiellen Elemente geändert wird.

Wir können nun die Variationen δU und δT ins Auge fassen, wobei wir auch für den variierten Vorgang die Gleichungen (III), (V), (XIII) und (XIV) gelten lassen wollen. Was den ursprünglichen Zustand anbelangt, so legen wir für diesen sämtliche Grundgleichungen zu Grunde; speziell verstehen wir unter $\mathfrak{a}$ das bestimmte in (VIII)—(X) vorkommende Vektorpotential. Zur Abkürzung der Formeln empfiehlt

27) *Larmor,* Aether and matter, chap. VI; vgl. auch V 13, Nr. 39.

28) *Poincaré,* Électricité et optique, 2e édit., p. 427—446

29) *Lorentz,* l. c. (Anm. 25).

es sich, für den Verrückungsstrom (19) ein einfaches Zeichen einzuführen. Wir schreiben

$$\delta \mathfrak{d} + \varrho \mathfrak{q} = \delta' \mathfrak{c}$$

und bezeichnen die Änderungen, welche $\mathfrak{h}$ und T erleiden würden, wenn der Strom sich um dieses $\delta' \mathfrak{c}$ änderte, mit $\delta' \mathfrak{h}$ und $\delta' T$. Um der Allgemeinheit willen soll zunächst ein von einer Fläche σ umschlossenes System betrachtet werden; in den Punkten dieser Fläche sei jedoch $\varrho = 0$.

Es zeigt sich nun zunächst, wenn man (21) benutzt, daß die Variation $\delta \mathfrak{c}$ aus den beiden Teilen

$$\delta_1 \mathfrak{c} = \frac{\partial}{\partial t} (\delta' \mathfrak{c}) \tag{22}$$

und

$$\delta_2 \mathfrak{c} = \operatorname{rot} \{ \varrho [\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{v}] \}$$

zusammengesetzt ist. Die entsprechenden Variationen von $\mathfrak{h}$ und T nennen wir $\delta_1 \mathfrak{h}$, $\delta_2 \mathfrak{h}$, $\delta_1 T$, $\delta_2 T$.

Benutzt man den leicht zu beweisenden Satz, daß, wenn $\delta \mathfrak{c}$ und $\delta \mathfrak{h}$ irgend welche zusammengehörige Änderungen von $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{h}$ sind, für jeden Vektor $\mathfrak{k}$,

$$\int (\operatorname{rot} \mathfrak{k} \cdot \delta \mathfrak{h}) dS = \frac{1}{c} \int (\mathfrak{k} \cdot \delta \mathfrak{c})\, dS + \int [\mathfrak{k} \cdot \delta \mathfrak{h}]_n d\sigma, \tag{23}$$

so erhält man

$$\delta_1 T = \int (\mathfrak{h} \cdot \delta_1 \mathfrak{h}) dS = \int (\operatorname{rot} \mathfrak{a} \cdot \delta_1 \mathfrak{h}) dS = \frac{1}{c} \int (\mathfrak{a} \cdot \delta_1 \mathfrak{c}) dS + \int [\mathfrak{a} \cdot \delta_1 \mathfrak{h}]_n d\sigma$$

und ebenso

$$\delta' T = \frac{1}{c} \int (\mathfrak{a} \cdot \delta' \mathfrak{c}) dS + \int [\mathfrak{a} \cdot \delta' \mathfrak{h}]_n d\sigma.$$

Mit Rücksicht auf (22) folgt aus diesen Gleichungen

$$\delta_1 T - \frac{d}{dt} (\delta' T) = -\frac{1}{c} \int (\dot{\mathfrak{a}} \cdot \delta' \mathfrak{c}) dS - \int [\dot{\mathfrak{a}} \cdot \delta' \mathfrak{h}]_n d\sigma$$
$$+ \int \left[\mathfrak{a} \cdot \left\{ \delta_1 \mathfrak{h} - \frac{\partial}{\partial t} (\delta' \mathfrak{h}) \right\} \right]_n d\sigma.$$

Zu dieser Gleichung addieren wir nun erstens die aus (23) hervorgehende

$$0 = -\int (\operatorname{grad} \varphi \cdot \delta' \mathfrak{c}) dS - c \int [\operatorname{grad} \varphi \,.\, \delta' \mathfrak{h}]_n d\sigma,$$

und zweitens die Gleichung

$$\begin{aligned}\delta_2 T &= \frac{1}{c}\int(\mathfrak{a}\cdot\delta_2\mathfrak{c})\,dS + \int[\mathfrak{a}\cdot\delta_2\mathfrak{h}]_n\,d\sigma\\ &= \frac{1}{c}\int(\mathfrak{h}\cdot\varrho\,[\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{v}])\,dS + \int[\mathfrak{a}\cdot\delta_2\mathfrak{h}]_n\,d\sigma\\ &= \frac{1}{c}\int\varrho([\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{h}]\cdot\mathfrak{q})\,dS + \int[\mathfrak{a}\cdot\delta_2\mathfrak{h}]_n\,d\sigma\end{aligned}$$

(bei deren Transformation berücksichtigt worden ist, daß $\varrho = 0$ in jedem Punkte von σ).

Das Resultat transformieren wir dadurch, daß wir $-\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{a}} - \operatorname{grad}\varphi$ durch $\mathfrak{d}$ ersetzen, den Wert von $\delta'\mathfrak{c}$ einführen, die Gleichung (VI) berücksichtigen und außerdem für die virtuelle Arbeit $\int(\varrho\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{q})\,dS$ der elektrischen Kräfte das Zeichen δE und statt $\int(\mathfrak{d}\cdot\delta\mathfrak{d})\,dS$ das Zeichen δU schreiben. Es kommt schließlich

$$(24)\qquad \delta E = \delta(T-U) - \frac{d}{dt}(\delta' T) - \int\Big[\mathfrak{a}\cdot\Big\{\delta\mathfrak{h} - \frac{\partial}{\partial t}(\delta'\mathfrak{h})\Big\}\Big]_n d\sigma - c\int[\mathfrak{d}\cdot\delta'\mathfrak{h}]_n\,d\sigma.$$

b) Aus dieser allgemeinen Gleichung kann man durch Spezialisierung verschiedene Sätze gewinnen[30]). Es liegt z. B. nahe, für die virtuelle Variation die Änderung zu wählen, die bei dem wirklichen Vorgange in einem Zeitelement stattfindet; dies führt auf die Energiegleichung (Nr. 6) zurück. Nimmt man dagegen für die Variation eine Translation des ganzen Systems (Materie und Feld) in Richtung der x-Achse, dann stellt sich die in Nr. 7 besprochene Darstellung der in dieser Richtung wirkenden Gesamtkraft heraus. Schließlich gelangt man zu dem ebenfalls in Nr. 7 besprochenen Drehmomente $\mathfrak{N}$ mittels der Betrachtung einer virtuellen unendlich kleinen Drehung.

c) Wir lassen jetzt die Fläche σ ins Unendliche rücken, sodaß (24) übergeht in

$$(25)\qquad \delta E = \delta(T-U) - \frac{d}{dt}(\delta' T),$$

und wir kombinieren diese Gleichung mit derjenigen, welche das *d'Alembert*'sche Prinzip für die Materie an und für sich betrachtet ausdrückt. Es sei δA die Arbeit der auf diese wirkenden Kräfte, insofern sie nicht elektromagnetischen Ursprungs sind, und T_m die kinetische Energie der Materie. Die besagte Gleichung lautet dann

$$\delta A + \delta E = \frac{d}{dt}(\delta' T_m) - \delta T_m.$$

30) Vgl. *Abraham*, l. c. (Anm. 24).

Mithin wird

$$\delta A = -\delta(T + T_m - U) + \frac{d}{dt}(\delta'\{T + T_m\}).$$

Sind nun die Kräfte, deren Arbeit mit δA bezeichnet wurde, konservativ, und ist die denselben entsprechende potentielle Energie U_m, so ist $\delta A = -\delta U_m$ zu setzen. Wenn man dann schließlich nach t zwischen t_1 und t_2 integriert und annimmt, daß für diese Grenzzeiten die Verrückungen $\mathfrak{q}$ und die Variationen $\delta\mathfrak{d}$ verschwinden, dann ergibt sich

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\{(T + T_m) - (U + U_m)\}\,dt = 0, \tag{26}$$

eine genau mit dem *Hamilton*'schen Prinzip übereinstimmende Gleichung. Dieses Resultat legt es nahe, die bereits in Nr. **6** betrachtete Differenz $L = T - U$ als *Lagrange'sche Funktion* zu bezeichnen.

Man kann nun auch rückwärts von (26) aus, durch eine Betrachtung, die der in Nr. 8 benutzten ähnlich ist, zu den Gleichungen (IV) und (VI) gelangen; man hat dabei die Formeln (Ia), (III), (V), (XIII) und (XIV), sowie die Unveränderlichkeit der Ladung eines materiellen Elementes anzunehmen.

d) Es ist aber auch möglich, ein Variationsprinzip so zu formulieren, daß es eine größere Zahl der Grundgleichungen vertreten kann. Z. B. hat *Schwarzschild*[31]) gezeigt, daß man zu den Gleichungen (Ia), (III) und (VI) gelangt, wenn man postuliert, daß die Variation des Integrals

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{-\int\varrho\psi\,dS - (T - U) + (T_m - U_m)\right\}dt$$

verschwinden soll. Zu variieren sind hierbei die Lage der Materie und die beiden Potentiale φ und $\mathfrak{a}$, durch welche letztere ψ nach (7) und U, T nach (XIII), (XIV), (IX), (X) auszudrücken sind. Weiter hat man sich die Ladung als an der Materie haftend vorzustellen und $\mathfrak{q}$ und $\delta\mathfrak{a}$ für die Grenzzeiten verschwinden zu lassen. Die Annahme der Formeln (IX) und (X) involviert hierbei die Relation (IV).

10. Die Hauptgleichungen für ein bewegliches Koordinatensystem. Für viele Anwendungen ist es bequem, die Gleichungen auf ein Koordinatensystem zu transformieren, das sich mit einer konstanten Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ verschiebt. Dabei empfiehlt es sich, auch statt der Zeit t eine neue Variable t' einzuführen, welche man als die Zeit, gerechnet von einer von der Lage im Raum abhängigen Anfangszeit („Ortszeit" im Gegensatz zur „allgemeinen Zeit" t) betrachten

31) *Schwarzschild,* l. c. (Anm. 21).

kann, und $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{h}$ durch zwei neue Vektoren $\mathfrak{d}'$ und $\mathfrak{h}'$ zu ersetzen[32]). Die Gleichungen bleiben dann ziemlich einfach, wenn man Glieder von der Ordnung $\frac{\mathfrak{w}^2}{c^2}$ vernachlässigt[33]), (siehe indes Nr. **11** b) und Nr. **16** b)). Für die relative Geschwindigkeit der geladenen Materie in Bezug auf die beweglichen Koordinatenachsen schreiben wir $\mathfrak{u}$, sodaß

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{w} + \mathfrak{u}$$

zu setzen ist. Dieselbe Bezeichnung $\mathfrak{u}$ wenden wir hin und wieder auch in Fällen an, wo $\mathfrak{w} = 0$ ist. Ich mache auch darauf aufmerksam, daß zwar die Glieder mit $\mathfrak{w}^2$ im allgemeinen vernachlässigt werden, diejenigen aber, welche dem Produkte $|\mathfrak{w}|\,|\mathfrak{u}|$ proportional sind, beibehalten werden sollen.

Es sei

$$t' = t - \frac{1}{c^2}(\mathfrak{w}_x x' + \mathfrak{w}_y y' + \mathfrak{w}_z z'), \tag{XVIII}$$

wo x', y', z' die neuen Koordinaten sind, für welche aber weiterhin x, y, z geschrieben wird. Nach dieser Gleichung fallen im Anfangspunkt der Koordinaten Ortszeit und allgemeine Zeit zusammen.

Ferner sei

$$\mathfrak{d}' = \mathfrak{d} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{h}], \tag{XIX}$$

$$\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} - \frac{1}{c}[\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{d}]. \tag{XX}$$

Man erhält dann

$$\operatorname{div} \mathfrak{d}' = \left(1 - \frac{(\mathfrak{w} \,.\, \mathfrak{u})}{c^2}\right)\varrho, \tag{I'}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{h}' = 0, \tag{V'}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{h}' = \frac{1}{c}\left(\dot{\mathfrak{d}}' + \varrho\mathfrak{u}\right), \tag{III'}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{d}' = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{h}}'. \tag{IV'}$$

Hier sind $\dot{\mathfrak{d}}'$ und $\dot{\mathfrak{h}}'$ die Differentialquotienten nach der Ortszeit und in den mit „div" und „rot" angedeuteten Ausdrücken treten die für konstantes t' genommenen Differentialquotienten nach x', y', z' in derselben Weise auf, wie sonst die nach x, y, z bei konstantem t. Dieselbe Bemerkung gilt von dem weiter unten vorkommenden Symbol „grad".

---

32) *Lorentz*, Versuch u. s. w., §§ 19, 20, 31.

33) Die entsprechende Transformation bei Berücksichtigung dieser Glieder findet man in *Lorentz*, Vereenvoudigde theorie der electrische en optische verschijnselen in lichamen die zich bewegen, Amsterdam Akad. Zittingsversl. 7 (1899), p. 507 (Proceedings 1898—99, p. 427) [vgl. auch eine ähnliche Transformation in *Lorentz*, De stralingswetten van *Boltzmann* en *Wien*, ibid. 9 (1901), p. 572 (Proceedings 1900—1901, p. 607)].

Was die Ableitung obiger Formeln anbelangt, so bemerken wir folgendes.

Aus den Beziehungen zwischen x, y, z, t und x', y', z', t' folgt für jeden Vektor $\mathfrak{k}$

$$\operatorname{div} \mathfrak{k} = \operatorname{div}' \mathfrak{k} - \frac{1}{c^2}\left(\mathfrak{w} \cdot \frac{\partial \mathfrak{k}}{\partial t'}\right),$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{k} = \operatorname{rot}' \mathfrak{k} - \frac{1}{c^2}\left[\mathfrak{w} \cdot \frac{\partial \mathfrak{k}}{\partial t'}\right],$$

wo die Zeichen div′ und rot′ eine naheliegende Bedeutung haben, und wenn man die Glieder mit $\mathfrak{w}^2$ vernachlässigt,

$$\frac{\partial \mathfrak{k}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{k}}{\partial t'} - \operatorname{div} \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{w} + \operatorname{rot}[\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{k}].$$

Wir transformieren jetzt die Gleichungen (Ia), (V), (III) und (IV), wobei wir der Reihe nach (III), (IV), (Ia) und (V) benutzen. Dabei beachten wir, daß es, wo ein $\mathfrak{w}$ steht, einerlei ist ob ein Strich geschrieben wird oder nicht, und daß

$$(\mathfrak{w} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{h}) = -\operatorname{div}[\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{h}], \quad (\mathfrak{w} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{d}) = -\operatorname{div}[\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{d}].$$

Das Ergebnis ist

$$\operatorname{div}' \mathfrak{d} + \frac{1}{c} \operatorname{div}[\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{h}] + \frac{\varrho}{c^2}(\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{u}) = \varrho,$$

$$\operatorname{div}' \mathfrak{h} - \frac{1}{c} \operatorname{div}[\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{d}] = 0,$$

$$\operatorname{rot}' \mathfrak{h} - \frac{1}{c^2}\left[\mathfrak{w} \cdot \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial t'}\right] = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial t'} + \operatorname{rot}[\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{d}] + \varrho \mathfrak{u}\right),$$

$$\operatorname{rot}' \mathfrak{d} - \frac{1}{c^2}\left[\mathfrak{w} \cdot \frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial t'}\right] = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial t'} + \operatorname{rot}[\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{h}]\right).$$

Diese Formeln verwandeln sich in (I′), (V′), (III′) und (IV′), wenn man die neuen Vektoren (XIX) und (XX) einführt, die Striche bei den Zeichen „div“ und „rot“ fortläßt und die Differentialquotienten nach t' durch einen Punkt bezeichnet.

Auch jetzt kann man alle Größen in einem skalaren Potential φ' und einem Vektorpotential $\mathfrak{a}'$ ausdrücken. Bestimmt man diese aus den Gleichungen

(VII′) $$\Delta \varphi' - \frac{1}{c^2} \ddot{\varphi}' = -\varrho,$$

(VIII′) $$\Delta \mathfrak{a}' - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathfrak{a}}' = -\frac{1}{c} \varrho \mathfrak{u},$$

so ist

(IX′) $$\mathfrak{d}' = -\frac{1}{c} \dot{\mathfrak{a}}' - \operatorname{grad} \varphi' + \frac{1}{c} \operatorname{grad}(\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{a}'),$$

(X′) $$\mathfrak{h}' = \operatorname{rot} \mathfrak{a}',$$

während zwischen den Potentialen die Relation

$$\text{(2')} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{a}' = -\frac{1}{c}\dot{\varphi}' + \frac{1}{c^2}(\mathfrak{w} \cdot \dot{\mathfrak{a}}')$$

besteht.

Aus (VII') und (VIII') erhält man die mit (XI) und (XII) übereinstimmenden Formeln

$$\text{(XI')} \qquad \varphi' = \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}[\varrho]\, dS,$$

$$\text{(XII')} \qquad \mathfrak{a}' = \frac{1}{4\pi c}\int \frac{1}{r}[\varrho \mathfrak{u}]\, dS.$$

Es handelt sich in denselben um die Werte, welche φ' und $\mathfrak{a}'$ in einem bestimmten Punkte des sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ verschiebenden Raumes für eine bestimmte Ortszeit t' annehmen. Unter dS ist ein um r von jenem Punkte entferntes Element dieses Raumes zu verstehen; die Klammern zeigen an, daß die der Ortszeit $t' - \frac{r}{c}$ entsprechenden Werte einzusetzen sind.

Im folgenden Kapitel wird der von gegebenen Elektronen im Äther erregte Zustand näher untersucht. Wir unterscheiden dabei immer die Fälle (zur Abkürzung mit den Ausdrücken „ruhendes System“ und „bewegtes System“ angedeutet), daß nur die Geschwindigkeiten $\mathfrak{u}$ vorkommen, und daß neben diesen noch die gemeinschaftliche Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ besteht. Jeden Fall wo $\mathfrak{u} = 0$, rechnen wir zur Elektrostatik; bei bewegten Systemen werden, wenn das Gegenteil nicht gesagt wird, die Gleichungen dieser Nummer zu Grunde gelegt.

II. Bestimmung des elektromagnetischen Feldes bei gegebener Lage und Bewegung der Elektronen.

11. Elektrostatisches Feld. a) *Ruhendes System.* Es ist

$$\mathfrak{a} = 0, \qquad \dot{\varphi} = 0,$$

und also

$$\text{(27)} \qquad \Delta\varphi = -\varrho,$$

$$\text{(28)} \qquad \mathfrak{d} = \mathfrak{f} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

Dies sind die gewöhnlichen Formeln der Elektrostatik, über die hier weiter nichts gesagt zu werden braucht. Es wird sich weiterhin empfehlen, die durch (27) bestimmte Funktion φ die zu der Dichte ϱ gehörende *Potentialfunktion* zu nennen. Diese Bezeichnung wenden wir auch im Fall einer Flächenladung an.

b) *Bewegtes System*[34]). Es ist leicht, das Feld für beliebige Werte des Verhältnisses $\frac{|\mathfrak{w}|}{c}$ zu bestimmen; daher wenden wir nicht die Formeln der letzten Nummer an, sondern gehen auf (VII) zurück. Es folgt daraus, wenn man ein mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ fortschreitendes Koordinatensystem einführt, die Zeit t aber ungeändert beibehält, und zur Vereinfachung die x-Achse in Richtung der Geschwindigkeit legt,

$$(29) \qquad \Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} - |\mathfrak{w}|\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \varphi = -\varrho,$$

also, da der Zustand in Bezug auf das neue Koordinatensystem stationär ist, wenn wir zur Abkürzung $\frac{|\mathfrak{w}|}{c} = \beta$ setzen,

$$(30) \qquad (1-\beta^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\varrho.$$

Weiter ist nach (VIII) $\mathfrak{a}_y = 0$, $\mathfrak{a}_z = 0$,

$$(31) \qquad (1-\beta^2)\frac{\partial^2\mathfrak{a}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathfrak{a}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathfrak{a}_x}{\partial z^2} = -\beta\varrho,$$

also

$$(32) \qquad \mathfrak{a}_x = \beta\varphi.$$

Ist $|\mathfrak{w}| < c$, so kann man die Gleichung (30) mittels der Substitution

$$(33) \qquad x = x'(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}$$

auf die Form (27) zurückführen. Man gelangt in dieser Weise dazu, dem bewegten System ein ruhendes zuzuordnen, welches durch Vergrößerung der der x-Achse parallelen Dimensionen im Verhältnis $(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ aus dem gegebenen System hervorgeht. Dabei wollen

---

34) Siehe *J. J. Thomson,* On the electric and magnetic effects produced by the motion of electrified bodies, Phil. Mag. (5) 11 (1881), p. 229; On the magnetic effects produced by motion in the electric field, Phil. Mag. (5) 28 (1889), p. 1; On the illustration of the properties of the electric field by means of tubes of electrostatic induction, Phil. Mag. (5) 31 (1891), p. 149; Recent researches, p. 16; *Heaviside,* On the electromagnetic effects due to the motion of electrification through a dielectric, Phil. Mag. (5) 27 (1889), p. 324; Electrical papers 2, p. 504; Electromagn. Theory 1, p. 269; *Lorentz,* Versuch u. s. w., § 22; *W. B. Morton,* Notes on the electromagnetic theory of moving charges, Phil. Mag. (5) 41 (1896), p. 488; *G. F. C. Searle,* Problems in electric convection, London Phil. Trans. A. 187 (1896), p. 675; On the steady motion of an electrified ellipsoid, Phil. Mag. (5) 44 (1897), p. 329; *Liénard,* l. c. (Anm. 18); *Th. Des Coudres,* Zur Theorie des Kraftfeldes elektrischer Ladungen, die sich mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen, Arch. néerl. (2) 5 (1900), p. 652; *Abraham,* l. c. (Anm. 24); *T. Levi-Civita,* Sur le champ électromagnétique engendré par la translation uniforme d'une charge électrique parallèlement à un plan conducteur infini, Toulouse Ann. de la Fac. d. Sc. (2) 4 (1902), p. 1.

wir immer die Zustandsgrößen in korrespondierenden Punkten ((x, y, z) im bewegten, (x', y, z) im ruhenden System) miteinander vergleichen. Die Dichte ϱ wird in beiden Fällen gleich genommen und der Index 0 bezieht sich auf das ruhende System. Bei der Rechnung hat man darauf zu achten, daß für jede Zustandsgröße χ in dem bewegten System $\dot{\chi} = -|\mathfrak{w}|\frac{\partial \chi}{\partial x}$ ist.

Es ergibt sich nun folgendes:

α) Aus $\varphi = \varphi_0$, $\mathfrak{a}_x = \beta\varphi_0$, $\mathfrak{a}_y = \mathfrak{a}_z = 0$ folgt für das elektrokinetische Potential von *Schwarzschild* (Nr. **6**)

$$\psi = (1 - \beta^2)\varphi_0.$$

Die Komponenten von $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{h}$ sind nach (IX) und (X)

$$\mathfrak{d}_x = -(1-\beta^2)\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mathfrak{d}_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \mathfrak{d}_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$(34) \qquad \mathfrak{h}_x = 0, \quad \mathfrak{h}_y = \beta\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \mathfrak{h}_z = -\beta\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

und die elektrische Kraft $\mathfrak{f}$, nach (VI) berechnet für eine Ladung, die an der Translation des Systems teilnimmt, bestimmt sich aus

$$(35) \qquad \mathfrak{f} = -(1-\beta^2)\,\mathrm{grad}\,\varphi = -\mathrm{grad}\,\psi.$$

Man ersieht hieraus, daß ψ dieselbe Funktion ist, wie das *Konvektionspotential* von *Searle.*

β) Es kommen weiter interessante Beziehungen zwischen der elektrischen Energie U, der magnetischen T, der *Lagrange*'schen Funktion L und der Bewegungsgröße $\mathfrak{G}_x^a$ in Richtung der Translation zum Vorschein. Da der Zustand stationär ist, so verschwinden in (6) und (17) die letzten Glieder und es wird (siehe (4) und (5))

$$U = \tfrac{1}{2}\int\left\{\varrho\varphi - \beta^2(1-\beta^2)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\right\}dS,$$

$$T = \tfrac{1}{2}\beta^2\int\left\{\varrho\varphi + (1-\beta^2)\varphi\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right\}dS = \tfrac{1}{2}\beta^2\int\left\{\varrho\varphi - (1-\beta^2)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\right\}dS,$$

$$(36) \quad L = -\tfrac{1}{2}(1-\beta^2)\int\varrho\varphi\,dS = -\tfrac{1}{2}\int\varrho\psi\,dS = -(1-\beta^2)^{1/2}\Omega,$$

wo Ω das Selbstpotential

$$\tfrac{1}{2}\int\varrho\varphi_0\,dS$$

für das ruhende System bedeutet,

$$\mathfrak{G}_x^a = \frac{\beta}{c}\int\left\{\varrho\varphi + (1-\beta^2)\varphi\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right\}dS = \frac{\beta}{c}\int\left\{\varrho\varphi - (1-\beta^2)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\right\}dS.$$

Es ist also

$$(37) \qquad \mathfrak{G}_x^a = \frac{2}{\beta c}T.$$

Wichtig ist auch der Wert von $\frac{dL}{d\beta}$, den man leicht erhält, wenn man von folgendem Satze der Potentialtheorie ausgeht:

Erleidet ein ruhendes System, dessen Potentialfunktion φ_0 ist, die unendlich kleine Dilatation x_x, während die Dichte ϱ konstant gehalten wird und also die Ladung im Verhältnis $1 + x_x$ zunimmt, dann ändert sich das Selbstpotential Ω um den Betrag

$$\left\{\Omega + \int \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\right)^2 dS\right\} x_x.$$

Setzt man nun $(1 - \beta^2)^{-1/2} = \gamma$, so entspricht einer Änderung $d\gamma$ eine Dilatation $\frac{d\gamma}{\gamma}$ des ruhenden Systems, dessen Dimensionen in der x-Richtung ja nach obigem das γ-fache von denen des bewegten Systems sein sollen. Man gewinnt daher aus dem angeführten Satz den Wert von $\frac{d\Omega}{d\gamma}$, woraus sich dann, weil nach (36) $L = -\gamma^{-3}\Omega$, die Werte von $\frac{dL}{d\gamma}$ und $\frac{dL}{d\beta}$ ableiten lassen. Es wird schließlich

$$\frac{1}{c}\frac{dL}{d\beta} = \frac{dL}{d|\mathfrak{w}|} = \mathfrak{G}_x^a, \tag{38}$$

und, nach der Formel (37),

$$T = \frac{1}{2}|\mathfrak{w}|\frac{dL}{d|\mathfrak{w}|}, \qquad U = -L + \frac{1}{2}|\mathfrak{w}|\frac{dL}{d|\mathfrak{w}|},$$

$$U + T = -L + |\mathfrak{w}|\frac{dL}{d|\mathfrak{w}|}. \tag{39}$$

Die Bestimmung aller dieser Größen für das bewegte System reduziert sich daher auf die Berechnung von Ω für das ruhende. Ist das bewegte System, wie wir das jetzt voraussetzen wollen, eine Kugel mit gleichförmig verteilter Flächenladung, so wird das ruhende ein verlängertes Rotationsellipsoid mit der bekannten Ladungsverteilung, die auf einem leitenden Körper von dieser Gestalt im Gleichgewicht ist, und man findet[35])

$$L = -\frac{e^2}{16\pi R}\cdot\frac{1-\beta^2}{\beta}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}, \tag{40}$$

$$\mathfrak{G}_x^a = \frac{e^2}{16\pi Rc}\left[\frac{1+\beta^2}{\beta^2}\log\frac{1+\beta}{1-\beta} - \frac{2}{\beta}\right], \tag{41}$$

$$U = \frac{e^2}{32\pi R}\left[\frac{3-\beta^2}{\beta}\log\frac{1+\beta}{1-\beta} - 2\right], \tag{42}$$

$$T = \frac{e^2}{32\pi R}\left[\frac{1+\beta^2}{\beta}\log\frac{1+\beta}{1-\beta} - 2\right]. \tag{43}$$

---

35) *Abraham,* l. c. (Anm. 24), p. 147, berechnet auch die Werte für eine Kugel mit gleichförmig verteilter Volumenladung.

Hier ist, wie immer wenn von einer geladenen Kugel die Rede sein wird, e die Ladung, R der Radius.

Vernachlässigt man $\frac{\mathfrak{w}^2}{c^2}$, so darf man allgemein sagen, daß ein elektrostatisches System, welches sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ verschiebt, das elektrische Feld, von dem es im Zustande der Ruhe umgeben sein würde, mit sich fortführt. Die Translation hat indes ein magnetisches Feld zur Folge, dessen Stärke der Größe $\frac{|\mathfrak{w}|}{c}$ proportional ist.

12. Zustand des Feldes, wenn die erregende Ladung in einem unendlich kleinen Raum liegt. Wir betrachten sofort ein bewegtes System und nehmen an, daß in einem Raum S, der, physikalisch gesprochen, als unendlich klein gelten kann, und der sich mit dem Koordinatensystem verschiebt, elektrische Ladungen in irgend welcher Verteilung vorhanden sind. Wir lassen beliebige Bewegungen dieser Ladungen zu, wobei sie jedoch die Grenzen des Raumes S, an welchen stets $\varrho = 0$ ist, nicht erreichen sollen. Einen beliebigen Punkt O von S („Mittelpunkt") wählen wir zum Koordinatenursprung, und bezeichnen mit $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ die Koordinaten eines Punktes Q des Raumes, mit x, y, z diejenigen eines äußeren Punktes P. Es seien die Entfernungen $OP = r$ und $QP = r'$ unendlich groß gegen $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, und es mögen in den folgenden Berechnungen die ersten Potenzen von $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ beibehalten, die höheren aber vernachlässigt werden. Wir berechnen — vgl. (XI') und (XII') — für den Punkt P und für die daselbst geltende Ortszeit t' das Integral

$$\int \frac{[q]}{r'}\, dS,$$

in welchem q irgend eine in jedem Punkte von S angebbare, ev. mit der Zeit veränderliche Größe, und $[q]$ den Wert dieser Größe in Q für die daselbst gültige Ortszeit $t' - \frac{r'}{c}$ bedeutet. In dem hierdurch bestimmten Augenblick ist die Ortszeit in O nach (XVIII),

$$t' - \frac{r'}{c} + \frac{1}{c^2}(\mathfrak{w}_x \mathbf{x} + \mathfrak{w}_y \mathbf{y} + \mathfrak{w}_z \mathbf{z}) = t' - \frac{r}{c} + \tau,$$

wo

$$\tau = \frac{1}{cr}(x\mathbf{x} + y\mathbf{y} + z\mathbf{z}) + \frac{1}{c^2}(\mathfrak{w}_x \mathbf{x} + \mathfrak{w}_y \mathbf{y} + \mathfrak{w}_z \mathbf{z}).$$

Man hat also, wenn man fernerhin die eingeklammerten Größen sich auf den Augenblick beziehen läßt, in welchem die zum Punkte O gehörende Ortszeit $t' - \frac{r}{c}$ ist, $[q]$ zu ersetzen durch $[q] + [\dot{q}]\tau$. Außerdem ist

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} - \mathbf{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) - \mathbf{y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) - \mathbf{z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right),$$

sodaß schließlich

$$(44) \quad \int\frac{[q]}{r'}\,dS = \frac{1}{r}\left[\int q\,dS\right] - \left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{[a_1]}{r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{[a_2]}{r} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{[a_3]}{r}\right\} + \\ + \frac{1}{c^2 r}\left\{\mathfrak{w}_x[\dot{a}_1] + \mathfrak{w}_y[\dot{a}_2] + \mathfrak{w}_z[\dot{a}_3]\right\},$$

wo

$$a_1 = \int q\mathbf{x}\,dS, \quad a_2 = \int q\mathbf{y}\,dS, \quad a_3 = \int q\mathbf{z}\,dS,$$

und wo zu bemerken ist, daß in dem Ausdrucke $\{\ \}$ auch die Zähler $[a_1]$, u. s. w. nach x, y, z zu differenzieren sind. Sie hängen von diesen Größen ab, weil die Ortszeit $t' - \frac{r}{c}$, auf welche sie sich beziehen, eine Funktion von x, y, z ist, und weil q (nicht $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$) von der Zeit abhängt.

Um die durch die Formeln (XI′) und (XII′) bestimmten Werte φ', $\mathfrak{a}_x'$, u. s. w. zu berechnen, hat man q durch $\frac{1}{4\pi}\varrho$, $\frac{1}{4\pi c}\varrho\mathfrak{u}_x$, u. s. w. zu ersetzen. Es treten dann die Integrale

$$(45) \quad \int\varrho\,dS;$$

$$(46) \quad \int\varrho\mathbf{x}\,dS, \quad \int\varrho\mathbf{y}\,dS, \quad \int\varrho\mathbf{z}\,dS;$$

$$(47) \quad \int\varrho\mathfrak{u}_x\,dS, \quad \int\varrho\mathfrak{u}_y\,dS, \quad \int\varrho\mathfrak{u}_z\,dS;$$

$$(48) \quad \int\varrho\mathfrak{u}_x\mathbf{x}\,dS, \quad \int\varrho\mathfrak{u}_x\mathbf{y}\,dS, \quad \int\varrho\mathfrak{u}_x\mathbf{z}\,dS$$

u. s. w.

auf.

Aus (44) läßt sich eine entsprechende Formel für ein ruhendes System ableiten.

13. Ein elektrisch polarisiertes Teilchen. Es mögen zunächst die Integrale (45) und (48) verschwinden, (46) und (47) aber von Null verschieden sein. Setzt man

$$(\mathrm{XXI}) \quad \int\varrho\mathfrak{r}\,dS = \mathfrak{p},$$

wo $\mathfrak{r}$ der von O aus gezogene Radiusvektor ist, so ist $\mathfrak{p}$ von der Wahl des Ursprungs O unabhängig, und es ist

$$\int\varrho\mathbf{x}\,dS = \mathfrak{p}_x, \text{ u. s. w.}, \quad \int\varrho\mathfrak{u}_x\,dS = \dot{\mathfrak{p}}_x, \text{ u. s. w.}$$

Wenn die soeben gemachten Voraussetzungen erfüllt sind, sprechen wir von einem *elektrisch polarisierten* Teilchen und nennen $\mathfrak{p}$ dessen *elektrisches Moment.* Die einfachste Entstehungsweise eines solchen

ist eine Verschiebung eines einzelnen in dem Teilchen liegenden Elektrons.

a) *Ruhendes System.* In dem umgebenden Felde ist

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{[\mathfrak{p}_x]}{r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{[\mathfrak{p}_y]}{r} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{[\mathfrak{p}_z]}{r}\right\}, \tag{49}$$

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{4\pi c r}[\dot{\mathfrak{p}}]. \tag{50}$$

Ist $\mathfrak{p}$ der Zeit nach konstant, so ist $\mathfrak{a} = 0$; man hat sodann zur Bestimmung des Feldes

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\left\{\mathfrak{p}_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + \mathfrak{p}_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + \mathfrak{p}_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}, \tag{51}$$

$$\mathfrak{d} = -\operatorname{grad}\varphi. \tag{52}$$

Zu diesen Formeln machen wir zwei Bemerkungen. Erstens daß für die unmittelbare Nähe des Teilchens in dem aus (49) und (50) folgenden Ausdrucke für $\mathfrak{d}$ die Glieder mit $1/r^3$ die mit $1/r$ und $1/r^2$ überwiegen, sodaß man annäherungsweise mit (51) und (52) rechnen darf, auch dann wenn $\mathfrak{p}$ variabel ist. Zweitens, daß wenn zwei polarisierte Teilchen a und b mit konstanten Momenten $\mathfrak{p}_a$ und $\mathfrak{p}_b$ zugleich im unendlich ausgedehnten Äther vorhanden sind, für den Teil der elektrischen Energie, der von diesem Umstande abhängt (Nr. 6),

$$U_{ab} = -(\mathfrak{p}_a \cdot \mathfrak{d}_{ba}) = -(\mathfrak{p}_b \cdot \mathfrak{d}_{ab}) \tag{53}$$

geschrieben werden kann. Hier bedeutet $\mathfrak{d}_{ba}$ die elektrische Erregung, die durch das zweite Teilchen an dem Ort des ersten hervorgebracht wird. Zum Beweise schreibe man zunächst für die gesuchte Größe das über den Raum S des ersten Teilchens erstreckte Integral $\int \varrho\varphi_b dS$, was nach (9) gestattet ist, und ersetze dann φ_b durch $\varphi_{b(o)} + \mathrm{x}\frac{\partial\varphi_b}{\partial x} +$ u. s. w.

b) *Bewegtes System.* Für dieses gilt

$$\varphi' = -\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{[\mathfrak{p}_x]}{r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{[\mathfrak{p}_y]}{r} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{[\mathfrak{p}_z]}{r}\right\} + \frac{1}{4\pi c^2 r}(\mathfrak{w}\cdot[\dot{\mathfrak{p}}]),$$

$$\mathfrak{a}' = \frac{1}{4\pi c r}[\dot{\mathfrak{p}}],$$

$$\mathfrak{d}' = -\frac{1}{4\pi c^2 r}[\ddot{\mathfrak{p}}] + \frac{1}{4\pi}\operatorname{grad}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{[\mathfrak{p}_x]}{r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{[\mathfrak{p}_y]}{r} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{[\mathfrak{p}_z]}{r}\right\}, \tag{54}$$

$$\mathfrak{h}' = \frac{1}{4\pi c}\operatorname{rot}\left\{\frac{1}{r}[\dot{\mathfrak{p}}]\right\}. \tag{55}$$

Auch hier gelten ähnliche Bemerkungen wie soeben für das ruhende System. Ist die Entfernung r so klein, daß das Moment $\mathfrak{p}$ sich in der Zeit r/c nur sehr wenig ändert, dann überwiegen in (54) wieder

die Glieder mit $1/r^3$; man darf, wenn man sich auf solche Glieder beschränkt, $\mathfrak{h}' = 0$ setzen, und $\mathfrak{d}'$, oder das dann damit zusammenfallende $\mathfrak{d}$, nach (51) und (52) berechnen. Das Feld in der unmittelbaren Nähe eines Teilchens mit variabelem Moment kann also immer als ein elektrostatisches Feld betrachtet werden. Daß dieser Satz, den wir mehrfach benutzen werden, auch im Fall einer Translation gilt, ist in Übereinstimmung mit der Schlußbemerkung der Nr. **11**. Aus dem dort Gesagten erhellt auch, daß die Formel (53) für zwei Teilchen mit gemeinschaftlicher Translation richtig bleibt.

14. Eine einfache Lichtquelle. Mit diesem Namen kann man ein elektrisch polarisiertes Teilchen bezeichnen, dessen Moment eine einfache periodische Funktion der Zeit ist, also etwa

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{b} \cos(nt + p),$$

wo der konstante Vektor $\mathfrak{b}$ Richtung und Amplitude der Schwingung, n die Frequenz und p die Phase bestimmt.

a) *Ruhendes System.* Es werden die Formeln sehr einfach für Punkte, deren Entfernung r von der Lichtquelle sehr groß gegen die Wellenlänge ist. Hat z. B. $\mathfrak{b}$ die Richtung der x-Achse und liegt die Quelle im Ursprung der Koordinaten, so wird in solchen Punkten[36])

$$(56)\quad \begin{cases} \mathfrak{d}_x = \dfrac{n^2|\mathfrak{b}|}{4\pi c^2 r}\,\dfrac{r^2 - x^2}{r^2}\cos\left[n\left(t - \dfrac{r}{c}\right) + p\right], \\ \mathfrak{d}_y = -\dfrac{n^2|\mathfrak{b}|}{4\pi c^2 r}\,\dfrac{xy}{r^2}\cos\left[n\left(t - \dfrac{r}{c}\right) + p\right], \\ \mathfrak{d}_z = -\dfrac{n^2|\mathfrak{b}|}{4\pi c^2 r}\,\dfrac{xz}{r^2}\cos\left[n\left(t - \dfrac{r}{c}\right) + p\right], \\ \mathfrak{h}_x = 0,\quad \mathfrak{h}_y = \dfrac{n^2|\mathfrak{b}|}{4\pi c^2 r}\cdot\dfrac{z}{r}\cos\left[n\left(t - \dfrac{r}{c}\right) + p\right], \\ \mathfrak{h}_z = -\dfrac{n^2|\mathfrak{b}|}{4\pi c^2 r}\cdot\dfrac{y}{r}\cos\left[n\left(t - \dfrac{r}{c}\right) + p\right]. \end{cases}$$

b) *Bewegtes System.* Es sei für eine in der Richtung der x-Achse sich bewegende Lichtquelle

$$\mathfrak{p}_x = |\mathfrak{b}| \cos(nt' + p),\quad \mathfrak{p}_y = 0,\quad \mathfrak{p}_z = 0.$$

Die dazu gehörigen Werte von $\mathfrak{d}_x'$, u. s. w., $\mathfrak{h}_x'$, u. s. w. erhält man aus (56), wenn man t durch t' ersetzt. Transformiert man dann die Formeln auf ein ruhendes Koordinatensystem und die allgemeine Zeit t, so erhält man die nach dem *Doppler*'schen Prinzip stattfindende Änderung der Schwingungsdauer[37]).

36) Vgl. *Hertz*, Die Kräfte elektrischer Schwingungen, behandelt nach der *Maxwell*'schen Theorie, Ann. Phys. Chem. 36 (1888), p. 1 (Untersuchungen u. s. w., p. 147).

37) *Lorentz*, Versuch u. s. w., § 37. Vgl. unten Nr. **58**.

Im allgemeinen ist noch zu bemerken, daß sich die von den verschiedenen Komponenten des elektrischen Momentes herrührenden Felder, also auch die von gleichzeitigen Schwingungen in verschiedenen Richtungen hervorgebrachten Lichtbewegungen einfach superponieren.

15. Ein magnetisiertes Teilchen. Es soll jetzt angenommen werden, daß die Integrale (46) und (47) verschwinden, einige von den Integralen (48) aber von Null verschiedene Werte haben. Dabei machen wir indes die Beschränkung, daß die Größen

$$\int \varrho \mathfrak{x}^2 dS, \quad \int \varrho \mathfrak{x}\mathfrak{y} dS, \quad \int \varrho \mathfrak{x}\mathfrak{z} dS, \text{ u. s. w.} \tag{57}$$

unabhängig von der Zeit sind, was der Fall sein wird wenn, trotz der Bewegungen, die Ladungsverteilung ungeändert bleibt. Es ist dann, wenn man den Vektor

$$\frac{1}{2c}\int \varrho\, [\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{u}]\, dS = \mathfrak{m} \tag{XXII}$$

einführt (der infolge der gemachten Annahmen unabhängig von der Lage des Koordinatenursprungs ist),

$$\int \varrho \mathfrak{u}_x \mathfrak{x} dS = 0, \quad \int \varrho \mathfrak{u}_x \mathfrak{y} dS = -c\mathfrak{m}_z, \quad \int \varrho \mathfrak{u}_x \mathfrak{z} dS = +c\mathfrak{m}_y, \tag{58}$$
u. s. w.

Nennt man für eine Ladung e, die sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegt, $e\mathfrak{v}$ die „Bewegungsgröße der Ladung", so kann man das Integral

$$\int \varrho\, [\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{v}]\, dS,$$

oder das in (XXII) vorkommende Integral, welches denselben Wert hat, weil die Größen (46) verschwinden, das Drehmoment der Bewegungsgröße der Ladung in Bezug auf den Ursprung nennen. Wenn dieses Moment von Null verschieden ist, sprechen wir von einem *magnetisierten Teilchen* und nennen $\mathfrak{m}$ das *magnetische Moment.* Dasselbe kann rotierenden oder umlaufenden Bewegungen der im Teilchen enthaltenen Ladungen seine Entstehung verdanken.

In den folgenden Formeln sehen wir ab von dem Teil des Feldes, der von der Gesamtladung (45) herrührt.

a) *Ruhendes System.* Hierfür gilt

$$\varphi = 0, \quad \mathfrak{a}_x = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\frac{[\mathfrak{m}_z]}{r} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{[\mathfrak{m}_y]}{r}\right\}, \text{ u. s. w.,}$$

$$\mathfrak{d}_x = -\frac{1}{4\pi c}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\frac{[\dot{\mathfrak{m}}_z]}{r} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{[\dot{\mathfrak{m}}_y]}{r}\right\}, \text{ u. s. w.,}$$

also, falls $\mathfrak{m}$ unabhängig von der Zeit ist,

$$\mathfrak{d} = 0,$$

$$\mathfrak{h} = -\operatorname{grad} \chi, \tag{59}$$

wo das magnetische Potential χ den Wert

$$\chi = -\frac{1}{4\pi}\left\{ \mathfrak{m}_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + \mathfrak{m}_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + \mathfrak{m}_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right\} \tag{60}$$

hat (vgl. den analogen Ausdruck (51)).

Wir erwähnen noch die Ausdrücke

$$T_{ab} = (\mathfrak{m}_a \cdot \mathfrak{h}_{ba}) = (\mathfrak{m}_b \cdot \mathfrak{h}_{ab}) \tag{61}$$

für den Teil der magnetischen Energie (Nr. **6**), der durch die gleichzeitige Existenz zweier unveränderlicher magnetischer Momente $\mathfrak{m}_a$ und $\mathfrak{m}_b$ bedingt wird. Man gelangt zu dieser Formel, in welcher $\mathfrak{h}_{ba}$ eine ähnliche Bedeutung wie $\mathfrak{d}_{ba}$ in (53) hat, wenn man zunächst aus (10) den Wert

$$T_{ab} = \frac{1}{c}\int \varrho\,(\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{a}_b)\, dS$$

ableitet, wo über den Raum des ersten Teilchens zu integrieren ist, und hier die Komponenten von $\mathfrak{a}_b$, ähnlich wie in Nr. **13** a) den Wert von φ_b, entwickelt. Schließlich hat man (58) zu benutzen.

b) *Bewegtes System.* Für dieses erhält man die Werte

$$\varphi' = 0,$$

$$\mathfrak{a}' = \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\left\{\frac{[\mathfrak{m}]}{r}\right\} - \frac{1}{4\pi c^2 r}\left[\mathfrak{w}\cdot[\dot{\mathfrak{m}}]\right], \tag{62}$$

$$\mathfrak{d}' = -\frac{1}{4\pi c}\operatorname{rot}\left\{\frac{[\dot{\mathfrak{m}}]}{r}\right\} + \frac{1}{4\pi c^3 r}\left[\mathfrak{w}\cdot[\ddot{\mathfrak{m}}]\right] + \frac{1}{4\pi c}\operatorname{grad}\left(\mathfrak{w}\cdot\operatorname{rot}\left\{\frac{[\mathfrak{m}]}{r}\right\}\right). \tag{63}$$

Ist $\mathfrak{m}$ wieder unabhängig von der Zeit, so reduziert sich $\mathfrak{d}'$ auf das letzte Glied, während

$$\mathfrak{h}' = -\operatorname{grad}\chi', \tag{64}$$

$$\chi' = -\frac{1}{4\pi}\left\{ \mathfrak{m}_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + \mathfrak{m}_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + \mathfrak{m}_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}. \tag{65}$$

Auch diese Ausdrücke vereinfachen sich, wenn r so klein ist, daß das Moment $\mathfrak{m}$ sich in der Zeit r/c nur sehr wenig ändert. Man kann sich dann in der Gleichung (63) auf das letzte Glied beschränken und zur Bestimmung des magnetischen Feldes (59) und (60) anwenden.

16. Rotierende geladene Kugeln. a) Ein einfaches Beispiel eines magnetisierten Teilchens ist eine symmetrisch geladene Kugel, die mit konstanter Geschwindigkeit $\mathfrak{g}$ um einen Durchmesser rotiert. Der Mittelpunkt möge in Ruhe bleiben und die Drehungsachse mit der

z-Achse zusammenfallen; es sei r die Entfernung vom Mittelpunkt. Das magnetische Moment hat die Richtung der z-Achse und die Größe

$$|\mathfrak{m}| = \frac{4\pi|\mathfrak{g}|}{3c}\int_0^R \varrho r^4 dr.$$

Setzt man weiter

$$k = \int_r^R \varrho r dr \text{ für } r < R,$$
$$k = 0 \qquad \text{,,} \quad r > R,$$

und bestimmt man eine Hilfsfunktion ζ aus der Gleichung

$$\Delta\zeta = -k,$$

dann ist sowohl außerhalb wie auch innerhalb der Kugel

$$\mathfrak{h}_x = \frac{|\mathfrak{g}|}{c}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x \partial z}, \quad \mathfrak{h}_y = \frac{|\mathfrak{g}|}{c}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y \partial z}, \quad \mathfrak{h}_z = -\frac{|\mathfrak{g}|}{c}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\zeta.$$

Die elektrische Energie ist unabhängig von der Rotation, die magnetische läßt sich durch

$$(66) \qquad \frac{1}{2}M\mathfrak{g}^2$$

darstellen, wo M von der Ladungsverteilung abhängt. Für eine unendlich dünne Kugelschale findet man

$$(67) \qquad M = \frac{e^2 R}{18\pi c^2}.$$

Im Inneren einer solchen besteht das homogene Feld

$$(68) \qquad \mathfrak{h}_x = 0, \quad \mathfrak{h}_y = 0, \quad \mathfrak{h}_z = \frac{|\mathfrak{g}|e}{6\pi c R}.$$

b) Wir wollen noch kurz andeuten, in welcher Weise die *Lagrange*'sche Funktion $L = T - U$ zu berechnen ist für eine symmetrisch geladene Kugel von beliebiger Größe, die eine konstante Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ in der x-Richtung hat, und zu gleicher Zeit, ebenfalls mit konstanter Geschwindigkeit, um einen Durchmesser rotiert. Man kann dabei verfahren[38]) wie in Nr. **11** b) (Koordinatenursprung im Mittelpunkt), und zwar bleibt die Gleichung (30) für das skalare Potential ungeändert, während auf der rechten Seite von (31) neue durch die Rotation bedingte Glieder auftreten und Gleichungen für $\mathfrak{a}_y$ und $\mathfrak{a}_z$ hinzukommen. Auf Grund der Symmetrieverhältnisse kann man schließen, daß der gesuchte Wert von L sich aus vier Teilen, die sich einfach zueinander addieren, aufbaut. Der erste Teil

38) *Abraham*, l. c. (Anm. 24), p. 131, behandelt auch die Transformation der Grundgleichungen auf Koordinatenachsen, die sowohl an der Rotation als auch an der Translation des Elektrons teilnehmen.

ist der bereits in Nr. **11** b, β) gefundene, die anderen entsprechen den Komponenten der Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{g}$ und können ohne viele Mühe bestimmt werden.

Betrachten wir beispielsweise die Rotation um die y-Achse und verstehen wir also unter $\mathfrak{a}$ bloß das daher rührende Vektorpotential. Die Gleichungen lauten dann: $\mathfrak{a}_y = 0$,

$$(1-\beta^2)\frac{\partial^2 \mathfrak{a}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{a}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{a}_x}{\partial z^2} = -\frac{\mathfrak{g}_y \varrho}{c} z,$$

$$(1-\beta^2)\frac{\partial^2 \mathfrak{a}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{a}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{a}_z}{\partial z^2} = +\frac{\mathfrak{g}_y \varrho}{c} x.$$

Für den entsprechenden Teil der *Lagrange*'schen Funktion erhält man aus der Gleichung (6), in der es jetzt nur auf den Teil

$$\frac{1}{2c}\int \varrho(\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{a})\, dS$$

des ersten Gliedes rechter Hand ankommt,

$$\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{g}_y}{c}\int \varrho z \mathfrak{a}_x dS - \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{g}_y}{c}\int \varrho x \mathfrak{a}_z dS.$$

Man benutze weiter die Substitution (33). Dadurch reduziert sich das Problem, Flächenladung der Kugel vorausgesetzt, auf die Bestimmung des Selbstpotentials eines Rotationsellipsoids, welches eine Flächenladung trägt, die sich, was die Dichte betrifft, von einer Ladung der in Nr. **11** b, β) genannten Art entweder durch den Faktor z oder durch den Faktor x unterscheidet. Es sind das gerade solche Flächenladungen, wie man sie erhält, wenn man von zwei Ellipsoiden mit gleichen und entgegengesetzten, gleichförmig verteilten Volumladungen, die sich ursprünglich decken, das eine in Richtung der z- oder x-Achse unendlich wenig gegen das andere verschiebt. Das entsprechende Selbstpotential läßt sich daher ziemlich leicht mittels bekannter Formeln[39]) berechnen. Man erhält schließlich für die totale *Lagrange*'sche Funktion

$$(69)\quad L = -\frac{e^2}{16\pi R}\cdot\frac{1-\beta^2}{\beta}\log\frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{e^2 R \mathfrak{g}_x^2}{24\pi c^2}\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1-\beta^2}{2\beta^3}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) + $$
$$+ \frac{e^2 R(\mathfrak{g}_y^2 + \mathfrak{g}_z^2)}{48\pi c^2}\left(-\frac{1}{\beta^2} + \frac{1+\beta^2}{2\beta^3}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right).$$

17. Das von einem Elektron mit beliebiger Bewegung erregte Feld. Will man, unter Zugrundelegung eines ruhenden Koordinatensystems, die Werte von φ und $\mathfrak{a}$ für innere und äußere Punkte bestimmen, so empfiehlt es sich die Gleichungen (XI) und (XII) derart umzuformen, daß man über den Raum, *den das Elektron zu einer be-*

39) Siehe z. B. *Maxwell,* Treatise 2, art. 437, 438.

stimmten Zeit einnimmt, zu integrieren hat. Es seien: t die Zeit, für welche man die Werte von φ und $\mathfrak{a}$ in einem Punkte P berechnen will, t_0 irgend ein anderer, beliebig gewählter Augenblick, x, y, z die Koordinaten eines substantiellen Punktes Q des Elektrons in diesem letzteren Augenblick. Unter den Lagen, die Q im Laufe der Bewegung einnimmt, gibt es eine, Q_1, welche dadurch ausgezeichnet ist daß, wenn sie zur Zeit $t_0 + \tau$ erreicht wird, die Entfernung $Q_1 P$ gerade den Wert $c(t - t_0 - \tau)$ hat. Bei festgesetzten Werten von t und t_0 lassen sich die Koordinaten x_1, y_1, z_1 von Q_1 in den Koordinaten x, y, z ausdrücken. Man ersetze nun in den Gleichungen (XI) und (XII) dS durch $D dx dy dz$, wo D die Funktionaldeterminante der x_1, y_1, z_1 nach den x, y, z ist, ϱ und $\varrho \mathfrak{v}$ durch ihre zur Zeit $t_0 + \tau$ in Q_1 bestehenden Werte, welche sich ebenso wie $r = Q_1 P$ in x, y, z ausdrücken lassen. Am Ende hat man dann nach x, y, z, d. h. über den zur Zeit t_0 vom Elektron eingenommenen Raum zu integrieren. Was die Wahl von t_0 betrifft, so kann man z. B. $t_0 = t$ setzen oder es so einrichten, daß für einen bestimmten Punkt des Elektrons $\tau = 0$ wird[40]).

Wir betrachten speziell ein Elektron, dessen Ladung an allen Stellen von gleichem Vorzeichen ist, und von welchem *ein* Punkt M sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegt, während die Geschwindigkeiten der anderen Punkte relativ zu M vernachlässigt werden dürfen. Man kann ein solches Elektron, was die Wirkung auf größere Entfernung hin betrifft, als einen „geladenen Punkt" betrachten, obgleich bei der Ableitung der Formeln für das Feld in der soeben angegebenen Weise zu verfahren ist. In der Voraussetzung, daß, wenn l eine Dimension des Elektrons ist, der Bewegungszustand sich in der Zeit l/c nur sehr wenig ändert, und bei Vernachlässigung von Gliedern, die, neben der Ladung e, eine Dimension l als Faktor enthalten, erhält[41]) man für eine Zeit t und einen um r entfernten Punkt P

$$(70) \qquad \varphi = \frac{e}{4\pi\left[r\left(1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right)\right]}, \quad \mathfrak{a} = \frac{e[\mathfrak{v}]}{4\pi c\left[r\left(1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right)\right]}.$$

Die eingeklammerten Größen sind für denjenigen Augenblick zu nehmen, in welchem ein mit der Geschwindigkeit c fortschreitender

---

40) Nach der hier geschilderten Methode lassen sich auch die in Nr. **11** und **16** für das Feld abgeleiteten Resultate gewinnen, und bestätigt es sich, daß ein von $t = -\infty$ ab in konstanter Translation begriffenes Elektron sein Feld mitführt, daß also eine solche Translation in der Bezeichnungsweise von *Abraham* zu den „ausgezeichneten Bewegungen" gehört.

41) *Liénard,* l. c. (Anm. 18); *Wiechert,* l. c. (Anm. 18).

Punkt von M aus, in der dann erreichten Lage M', abgehen müßte, um gerade zur Zeit t in P anzulangen. Es ist $r = M'P$ und $\mathfrak{v}_r$ die Komponente von $\mathfrak{v}$ nach der Richtung $M'P$.

Für die Ableitung der Formeln möge folgende Andeutung genügen. Man wähle M' zum Ursprung der Koordinaten, und nehme den Augenblick, in dem M diese Lage einnimmt, für die im Anfang dieser Nummer mit t_0 bezeichnete Zeit. Sind dann weiter, wie an jener Stelle, x, y, z die Koordinaten irgend eines Punktes des Elektrons zur Zeit t_0, x', y', z' aber die des entfernten Punktes P, so hat man zur Bestimmung der jetzt äußerst kurzen Zeit τ die Gleichung

$$(x' - x - \mathfrak{v}_x \tau)^2 + \text{u. s. w.} = c^2(t - t_0 - \tau)^2,$$

also, da $c(t - t_0) = r$, während $x, y, z, c\tau, |\mathfrak{v}|\tau$ als unendlich klein betrachtet werden dürfen,

$$\tau = \frac{x'x + y'y + z'z}{(c - \mathfrak{v}_r)r}.$$

Die Verbindung dieser Gleichung mit $x_1 = x + \mathfrak{v}_x \tau$ u. s. w. führt dann auf den Wert

$$D = \frac{c}{c - \mathfrak{v}_r}$$

der obengenannten Funktionaldeterminante. Schließlich kann man unter x, y, z wieder die Koordinaten von P in Bezug auf das ursprüngliche Achsenkreuz verstehen.

18. Ausstrahlung von Energie. Um aus (70) die Werte von $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{h}$ abzuleiten, hat man nach x, y, z, t zu differenzieren. Dabei können, wenn r sehr groß ist, die Glieder mit $1/r^2$ vernachlässigt werden; man darf also das r im Nenner als konstant ansehen. Überdies hat man im Auge zu behalten, daß, wenn man φ und $\mathfrak{a}$ in dem entfernten Punkte P einmal für die Zeit t und dann für die Zeit $t + dt$ berechnen will, die Augenblicke, auf welche sich die eingeklammerten Werte beziehen, nicht um dt, sondern um $c/(c - \mathfrak{v}_r)\,dt$ auseinanderliegen. Es kommt schließlich, wenn $\mathfrak{j}$ die Beschleunigung des Elektrons ist,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{e}{4\pi c}\left[\frac{\mathfrak{j}_r}{r\left(1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right)^3}\right],$$

$$\frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial t} = \frac{e}{4\pi c}\left[\frac{\mathfrak{j}_x}{r\left(1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right)^2}\right] + \frac{e}{4\pi c^2}\left[\frac{\mathfrak{v}_x \mathfrak{j}_r}{r\left(1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right)^3}\right], \text{ u. s. w.},$$

während

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{c}[\cos(r, x)]\frac{\partial \varphi}{\partial t},$$
$$\frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial x} = -\frac{1}{c}[\cos(r, x)]\frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial t}, \text{ u. s. w.}$$

gesetzt werden darf. Beschränkt man sich nun in den hieraus folgenden Werten von $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{h}$ auf die in Bezug auf $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{j}$ linearen Anteile, so lassen sich die Vektoren leicht angeben. Es bedeute $\mathfrak{j}_p$ die Komponente der Beschleunigung $\mathfrak{j}$, senkrecht zu der Verbindungslinie $M'P$. Die elektrische Erregung in P hat dann die Richtung von $\mathfrak{j}_p$ und die Größe

$$-\frac{e}{4\pi c^2}\left[\frac{\mathfrak{j}_p}{r}\right].$$

Die magnetische Kraft hat den gleichen numerischen Betrag. Sie steht senkrecht auf der durch $\mathfrak{j}$ und r gelegten Ebene, und zwar hat sie solche Richtung, daß der Energiefluß von M' fortgerichtet ist.

Eine unendlich große um den Mittelpunkt M' gelegte Kugel wird in der Richtung nach außen von einer Energiemenge durchflossen, die pro Zeiteinheit

$$\frac{e^2[\mathfrak{j}^2]}{6\pi c^3}$$

beträgt[42]).

Während also eine gleichförmig geradlinige Bewegung des Elektrons von keiner Ausstrahlung von Energie begleitet ist, tritt eine solche ein, sobald sich die Geschwindigkeit nach Größe oder Richtung ändert.

19. Entstehung von Röntgenstrahlen. Ein kugelförmiges Elektron bewege sich bis zur Zeit $t = 0$ mit der konstanten Geschwindigkeit v nach O hin, wobei sein Mittelpunkt auf der negativen x-Achse fortschreite; in dem Augenblicke $t = 0$, wo der Mittelpunkt den Koordinatenursprung erreicht hat, wird es plötzlich festgehalten. Ein Punkt P liege um r von O entfernt, und es bilde OP mit OX den Winkel α. Beschränkt man sich wieder auf die Glieder mit $\frac{1}{r}$, so ist in diesem Punkte zur Zeit $\frac{r}{c} + \tau \left(-\frac{R}{c} < \tau < +\frac{R}{c}\right)$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi r}\left(e + \frac{v\cos\alpha}{c - v\cos\alpha}\, e_h\right),$$
$$\mathfrak{a}_x = \frac{1}{4\pi r}\cdot\frac{v}{c - v\cos\alpha}\, e_h, \quad \mathfrak{a}_y = 0, \quad \mathfrak{a}_z = 0,$$

---

42) *Larmor,* On the theory of the magnetic influence on spectra; and on the radiation from moving ions, Phil. Mag. (5) 44 (1897), p. 503; Aether and matter, hap. XIV.

wo e_h die in einem Kugelsegmente von der Höhe

$$h = R - c\tau$$

liegende Ladung ist. In dem genannten Zeitintervall besteht in P eine elektrische Erregung

$$\frac{1}{4\pi r} \frac{v \sin \alpha}{c - v \cos \alpha} \cdot \frac{de_h}{dh},$$

deren Richtung in der Ebene POX senkrecht zu OP steht, und eine magnetische Kraft von gleicher Größe, senkrecht zu POX. Das plötzliche Vernichten der Geschwindigkeit v bringt demnach eine sphärische Welle hervor, deren Dicke dem Durchmesser des Elektrons gleich ist, und in der sich eine gewisse Energiemenge ausbreitet. *J. J. Thomson*[43]) hat in dieser Weise die Entstehung der *Röntgen*strahlen erklärt, indem er sich der Auffassung[44]) von *Wiechert* und *Stokes* anschloß, der zufolge diese Strahlen in kurzen unregelmäßig nacheinander folgenden Impulsen bestehen.

Obige Betrachtung läßt sich dahin abändern, daß man das Elektron nicht gerade zur Ruhe kommen läßt, sondern nur eine plötzliche Änderung der Geschwindigkeit, vielleicht ein Umschlagen in die entgegengesetzte Richtung voraussetzt. Findet die Änderung nicht momentan, sondern in einer Zeit ϑ statt, so bleibt, wenn diese $< 2R/c$ ist, die Dicke der ausgesandten Welle von derselben Größenordnung wie oben; ist aber $\vartheta > 2R/c$, so wird die Dicke von der Ordnung $c\vartheta$.

III. Freie Elektronen. Bestimmung der Bewegung bei gegebenem äußeren Felde.

20. Rückwirkung des Äthers auf ein langsam bewegtes Elektron von beliebiger Gestalt. Widerstand gegen die Bewegung. Während in dem letzten Kapitel das von Elektronen mit gegebener Bewegung erzeugte Feld Gegenstand der Untersuchung war, wenden wir uns jetzt den auf ein Elektron wirkenden Kräften und der Bestimmung seiner Bewegung zu. Dieses Problem, das *Abraham* in der schon mehrfach citierten Arbeit ausführlich behandelt hat, kompliziert sich durch den Umstand, daß ein Elektron nicht nur

43) *J. J. Thomson,* A theory of the connexion between cathode and *Röntgen* rays, Phil. Mag. (5) 45 (1898), p. 172.

44) *E. Wiechert,* Die Theorie der Elektrodynamik und die Röntgen'sche Entdeckung, l. c. (Anm. 9); Über die Grundlagen der Elektrodynamik, Ann. Phys. Chem. 59 (1896), p. 283; *G. G. Stokes,* On the nature of the Röntgen rays, Manch. Memoirs 41 (1897), Mem. 15.

infolge des von anderen Teilchen erregten Feldes, sondern auch wegen des eigenen Feldes eine Kraftwirkung erleidet. Diese wollen wir zunächst betrachten. Dabei können wir ganz allgemein in der Weise verfahren, daß wir nach der in Nr. 17 dargelegten Methode das Feld bestimmen und dann (VI) anwenden. Jetzt, da es sich um die Bestimmung von φ und $\mathfrak{a}$ in einem Raumpunkte $P(x', y', z')$ handelt, der zu der betrachteten Zeit im Inneren des Elektrons liegt, empfiehlt es sich für den in Nr. 17 mit t_0 bezeichneten Zeitpunkt den Augenblick t selbst zu wählen, sodaß $\tau = -r/c$ wird. Setzt man weiter $x_1 = x + \xi$ u. s. w., indem man wie früher unter x, y, z, bez. x_1, y_1, z_1 die Koordinaten ein und desselben substantiellen Punktes zu den Zeiten t_0 und $t_0 + \tau$ versteht, so ist, reine Translation vorausgesetzt,

$$\xi = -\frac{\mathfrak{v}_x}{c} r + \frac{1}{2} \frac{\dot{\mathfrak{v}}_x}{c^2} r^2 - \frac{1}{6} \frac{\ddot{\mathfrak{v}}_x}{c^3} r^3 + \cdots, \text{ u. s. w.,} \tag{71}$$

wenn $\mathfrak{v}_x, \dot{\mathfrak{v}}_x, \ddot{\mathfrak{v}}_x \ldots$ die zur Zeit t bestehenden Werte sind. Diesen Ausdrücken für ξ, η, ζ entsprechen am Ende der Rechnung ähnliche Reihenentwickelungen für die Komponenten der Gesamtkraft $\mathfrak{F}$, mit welcher der Äther auf das Elektron wirkt, und es sollen bereits jetzt die Reihen in der Weise abgebrochen werden, daß in dem Endresultate keine Glieder erscheinen, die neben dem Quadrate der Ladung e noch eine Dimension des Elektrons als Faktor enthalten. Setzen wir außerdem $\mathfrak{v}, \dot{\mathfrak{v}}$, u. s. w. als so klein voraus, daß man nur die in Bezug auf diese Größen linearen Glieder beizubehalten braucht, dann darf man in (71) unter r die Entfernung QP verstehen, während, wenn man das tut, in der Formel (XI) der Faktor $\frac{1}{r}$ $\left(\text{d. h. } \frac{1}{Q_1 P}\right)$ durch

$$\frac{1}{r} + \xi \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + \eta \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + \zeta \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{72}$$

zu ersetzen ist. Was die in Nr. 17 erwähnte Funktionaldeterminante D anbelangt, so hat diese den Wert $1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$; für das Produkt derselben mit dem Ausdrucke (72) läßt sich daher schreiben

$$\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\xi}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\eta}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\zeta}{r}\right).$$

Der Wert von φ ist demnach

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int \varrho \left\{ \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\xi}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\eta}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\zeta}{r}\right) \right\} dS,$$

wo nach Einsetzung der Werte (71) über den Raum, den das Elektron zur Zeit t einnimmt, zu integrieren ist.

Andererseits darf man in der Gleichung (XII) für das Vektorpotential, weil hier ein Faktor $[\mathfrak{v}]$ steht, unter r ohne weiteres die Länge von QP verstehen; jener Faktor ist aber jetzt zu ersetzen durch

$$\mathfrak{v} - \frac{\dot{\mathfrak{v}}}{c} r,$$

sodaß

$$\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{v}}{4\pi c}\int \frac{\varrho\, dS}{r} - \frac{\dot{\mathfrak{v}}}{4\pi c^2}\int \varrho\, dS = \frac{\mathfrak{v}}{4\pi c}\int \frac{\varrho\, dS}{r} - \frac{e\dot{\mathfrak{v}}}{4\pi c^2}$$

wird. Ist nun schließlich dS' ein am Punkte (x', y', z') liegendes Element des Elektrons, und ϱ' die in demselben bestehende Dichte, so erhält man

$$\mathfrak{F}_x = -\int \varrho' \frac{\partial \varphi}{\partial x'} dS' - \frac{1}{c}\int \varrho' \dot{\mathfrak{a}}_x dS', \text{ u. s. w.},$$

oder nach Ausführung aller Rechnungen

$$(73)\quad \mathfrak{F}_x = -\frac{\dot{\mathfrak{v}}_x}{4\pi c^2}\iint \frac{\varrho\varrho' \{r^2 + (x'-x)^2\}}{r^3}\, dS\, dS' -$$
$$- \frac{\dot{\mathfrak{v}}_y}{4\pi c^2}\iint \frac{\varrho\varrho' (x'-x)(y'-y)}{r^3}\, dS\, dS' -$$
$$- \frac{\dot{\mathfrak{v}}_z}{4\pi c^2}\iint \frac{\varrho\varrho' (x'-x)(z'-z)}{r^3}\, dS\, dS' + \frac{e^2}{6\pi c^3}\ddot{\mathfrak{v}}_x, \text{ u. s. w.}$$

In den Integralen ist hier jede Kombination zweier Elemente nur einmal zu nehmen.

Die Kraft

$$(74)\qquad \frac{e^2}{6\pi c^3}\ddot{\mathfrak{v}}$$

kann man als einen Widerstand betrachten[45]). Sie hängt mit der in Nr. 18 erwähnten Ausstrahlung von Energie zusammen.

21. Elektromagnetische Masse der Elektronen. Die letzten Glieder in den Formeln (73) sind, im Vergleich zu den ersten Gliedern, klein von der Ordnung

$$\frac{|\ddot{\mathfrak{v}}|}{|\dot{\mathfrak{v}}|}\cdot\frac{l}{c},$$

wo l eine der Dimensionen des Elektrons ist; man darf sie daher vernachlässigen, wenn $\dot{\mathfrak{v}}$ sich in der Zeit $\frac{l}{c}$ nur wenig ändert. Die dann übrig bleibenden ersten Glieder können nun in einfacherer Weise, und zwar für beliebig rasche Bewegungen berechnet werden, wenn man seine Aufmerksamkeit auf die (für den unendlichen Raum genommene) elektromagnetische Bewegungsgröße $\mathfrak{G}^a$ richtet. Kennt

45) *Lorentz,* La théorie électromagnétique etc., § 120. Hier hat sich indes ein Rechenfehler eingeschlichen. Die beiden Glieder des Ausdrucks (111) sind mit dem Faktor $\frac{4}{3}$ zu multiplizieren.

man nämlich die letztere für jede Zeit, dann folgt (Nr. 7) die resultierende Kraft sofort aus

$$\mathfrak{F} = -\frac{d\mathfrak{G}^a}{dt}, \tag{75}$$

während sich auch ein eventuell vorhandenes Kräftepaar $\mathfrak{N}$ leicht aus einer in Nr. 7 angeführten Gleichung ableiten läßt.

a) Ein Elektron von beliebiger Gestalt habe eine reine Translation, deren Geschwindigkeit von $t = -\infty$ an konstant war, sodaß sich der in Nr. **11** b) untersuchte stationäre Zustand eingestellt hat. Es ist dann $\mathfrak{G}^a$ konstant, $\mathfrak{F} = 0$, d. h., um die Geschwindigkeit konstant zu erhalten, ist keine äußere Kraft erforderlich. Im allgemeinen muß aber ein äußeres Drehmoment wirken, wenn das Elektron auch seine Orientierung fortwährend behalten soll. Es folgt ja aus der Formel (16) für $\mathfrak{N}_2$, welche Größe, wenn die Integration über den ganzen Raum erstreckt wird, mit $\mathfrak{N}$ selbst identisch ist (vgl. Nr. 7), daß die Wirkung des Äthers ein resultierendes Drehmoment $\mathfrak{N} = [\mathfrak{G}^a \cdot \mathfrak{v}]$ liefert. Man gelangt zu diesem Ausdruck, wenn man unter $\mathfrak{r}$ den von einem bestimmten Punkte des Elektrons nach dem feststehenden Raumelemente dS gezogenen Radiusvektor versteht und beachtet, daß

$$\frac{d}{dt}\int [\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{S}]\, dS = 0,$$

und also

$$-\frac{1}{c^2}\int [\mathfrak{r} \cdot \dot{\mathfrak{s}}]\, dS = \frac{1}{c^2}\int [\dot{\mathfrak{r}} \cdot \mathfrak{s}]\, dS = -\frac{1}{c^2}\int [\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{s}]\, dS = -[\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{G}^a].$$

Für eine symmetrisch geladene Kugel ist das Drehmoment natürlich Null, für Elektronen von anderer Gestalt aber verschwindet es nur bei gewissen bestimmten Orientierungen, unter welchen dann noch stabile und labile zu unterscheiden sind. Sobald nämlich das Elektron aus einer Lage, für welche $\mathfrak{N} = 0$, um einen kleinen Winkel gedreht wird, tritt ein Drehmoment auf, welches das Teilchen entweder nach der ursprünglichen Lage zurücktreiben, oder weiter von derselben entfernen wird. Für ellipsoidische Elektronen hat *Abraham* diesen Punkt untersucht.

b) Ein kugelförmiges Elektron habe eine Translation mit der veränderlichen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, und es sei, für die Zeit t, $\mathfrak{G}_1^a$ die elektromagnetische Bewegungsgröße, die bestehen würde, wenn die dann vorhandene Geschwindigkeit seit $t = -\infty$ mit konstanter Richtung und Größe bestanden hätte, $\mathfrak{G}^a = \mathfrak{G}_1^a + \mathfrak{G}_2^a$ aber die wirkliche Bewegungsgröße, sodaß $\mathfrak{G}_2^a$ den von der Änderung der Bewegung herrührenden Anteil bedeutet. Die resultierende Kraft ist

$$\mathfrak{F} = -\frac{d\mathfrak{G}_1^a}{dt} - \frac{d\mathfrak{G}_2^a}{dt}.$$

Je langsamer sich nun der Bewegungszustand ändert, um so mehr tritt $\mathfrak{G}_2^a$ hinter $\mathfrak{G}_1^a$, und ebenso $\frac{d\mathfrak{G}_2^a}{dt}$ hinter $\frac{d\mathfrak{G}_1^a}{dt}$ zurück; im Falle sehr langsam veränderlicher Zustände („quasi-stationärer" Bewegungen, wie *Abraham* sie nennt) darf man daher in (75) unter $\mathfrak{G}^a$ den Vektor $\mathfrak{G}_1^a$ verstehen.

Es seien $\mathfrak{j}'$ und $\mathfrak{j}''$ die Tangential- bez. Normalbeschleunigung, α das Verhältnis $\frac{|\mathfrak{G}^a|}{|\mathfrak{v}|}$. Dann ist, mit Rücksicht darauf, daß $\mathfrak{j}'$ und $\mathfrak{G}^a$ die Richtung von $\mathfrak{v}$ haben,

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{j}' + \mathfrak{j}'', \quad \frac{d|\mathfrak{v}|}{dt} = |\mathfrak{j}'|, \quad |\mathfrak{j}'|\mathfrak{v} = |\mathfrak{v}|\mathfrak{j}',$$

$$\mathfrak{G}^a = \alpha\mathfrak{v}.$$

Diese letztere Gleichung liefert, wenn man sie nach t differenziert,

$$\mathfrak{F} = -m'\mathfrak{j}' - m''\mathfrak{j}'',$$

wo

$$(76) \qquad m' = |\mathfrak{v}|\frac{d\alpha}{d|\mathfrak{v}|} + \alpha = \frac{d|\mathfrak{G}^a|}{d|\mathfrak{v}|}, \quad m'' = \alpha = \frac{|\mathfrak{G}^a|}{|\mathfrak{v}|}.$$

Wir nennen m die materielle Masse des Elektrons, $\mathfrak{F}^e$ eine äußere auf dasselbe wirkende Kraft. Die Bewegungsgleichung lautet dann

$$\mathfrak{F}^e + \mathfrak{F} = m(\mathfrak{j}' + \mathfrak{j}''),$$

oder

$$\mathfrak{F}^e = (m + m')\mathfrak{j}' + (m + m'')\mathfrak{j}''.$$

Der Einfluß des eigenen Feldes läßt sich demnach als eine scheinbare Vergrößerung der Masse beschreiben, und zwar beträgt diese Vergrößerung, was die Beschleunigung in Richtung der Bahn betrifft, m', und was die Normalbeschleunigung anbelangt, m''.

Für eine Kugelschale sind nach (76) und (41) die für die beiden Beschleunigungskomponenten in Betracht kommenden „scheinbaren" oder „elektromagnetischen" Massen[46])

$$(77) \quad m' = \frac{e^2}{8\pi R\beta^3c^2}\left[\frac{2\beta}{1-\beta^2} - \log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right],$$

$$(78) \quad m'' = \frac{e^2}{16\pi R\beta^3c^2}\left[-2\beta + (1+\beta^2)\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right],$$

oder

$$m' = \frac{e^2}{4\pi Rc^2}\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\beta^2 + \frac{6}{7}\beta^4 + \cdots\right),$$

$$m'' = \frac{e^2}{8\pi Rc^2}\left[\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)\beta^2 + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right)\beta^4 + \cdots\right].$$

---

46) Diese Werte wurden von *Abraham*, l. c. (Anm. 24), p. 152 angegeben.

Für kleine Geschwindigkeiten ist

$$(79) \qquad m' = m'' = \frac{e^2}{6\pi R c^2};$$

im allgemeinen aber

$$m' > m''.$$

Es ist noch zu bemerken, daß für die Bestimmung von m' schon das Energiegesetz ausreicht; dieses führt zu dem mit (76) identischen Resultat (vgl. (38) und (39))

$$m' = \frac{1}{|\mathfrak{v}|}\,\frac{d(U+T)}{d|\mathfrak{v}|}.$$

c) Was die Grenzen betrifft, innerhalb welcher die oben für quasi-stationäre Zustände abgeleiteten Resultate gelten, so ergeben sich diese am leichtesten, wenn man das Problem nach der in Nr. **20** angegebenen Methode behandelt. Die Gültigkeitsbedingung besteht darin, daß, wenn l eine Dimension des Elektrons ist, in der Zeit $l/(c - |\mathfrak{v}|)$ der Bewegungszustand (d. h. nicht bloß die Geschwindigkeit, sondern auch die Beschleunigung) sich nur in geringem Maße ändern soll.

22. Quasi-stationäre Bewegungen im allgemeinen. Rückwirkung des Äthers auf ein rotierendes Elektron. Wir betrachten noch kurz ein Elektron von beliebiger Gestalt und mit irgend welcher Ladungsverteilung, dessen Lage wir durch die (*Lagrange*'schen) Koordinaten p bestimmen. Wir setzen voraus, daß zu jeder Zeit das eigene Feld mit genügender Annäherung als durch die augenblickliche Lage und Geschwindigkeit bestimmt angesehen werden darf, und daß man also die *Lagrange*'sche Funktion $L = T - U$ als Funktion der p und der $\dot{p}$ behandeln kann. Es soll die der Koordinate p entsprechende Kraftkomponente P, insofern sie vom eigenen Felde herrührt, berechnet werden. Zu diesem Zwecke gehen wir auf (25) zurück, und zwar wollen wir uns die virtuellen Verrückungen $\mathfrak{q}$ des Elektrons mit solchen Variationen $\delta\mathfrak{d}$ kombiniert denken, daß das variierte Feld eben dasjenige ist, welches bestehen würde, wenn das Elektron die variierte Bewegung wirklich ausführte. Für die variierte Bewegung ist dann, ebensogut wie für die ursprüngliche, L Funktion der p und der $\dot{p}$.

Wir integrieren die Gleichung (25) von t_1 bis t_2 und nehmen zur Vereinfachung an, daß für diese Zeitpunkte $\delta p = 0$ und $\delta\dot{p} = 0$, was nach dem Gesagten für $t = t_1$ oder $t = t_2$ auf $\delta' T = 0$ führt. Also

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta E \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L \cdot dt = \sum \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial p}\,\delta p + \frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\,\delta\dot{p}\right) dt =$$

$$= \sum \int_{t_1}^{t_2} \left\{\frac{\partial L}{\partial p} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\right)\right\} \delta p \cdot dt,$$

und, da $\delta E = \sum P \delta p$,

$$P = \frac{\partial L}{\partial p} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\right). \tag{80}$$

Von dieser Gleichung ausgehend, gelangt man leicht zu den Ergebnissen der vorigen Nummer. Auch könnten wir mittels derselben untersuchen, inwiefern das Gefundene gültig bleibt, wenn zugleich mit der Translation auch eine Rotation stattfindet[47]). Wir hätten dann für L den Wert (69) einzusetzen. Doch wollen wir das nicht weiter ausführen und uns, was rotierende Elektronen betrifft, auf den Fall beschränken, daß, wie auch in Nr. **16** a) vorausgesetzt wurde, keine Translation besteht.

Ist die Rotationsgeschwindigkeit $\mathfrak{g}$ der dort betrachteten Kugel mit der Zeit langsam veränderlich, so wirkt der Äther auf dieselbe mit einem Drehmoment $-M\dot{\mathfrak{g}}$ um die z-Achse. Ebenso wie oben von einer elektromagnetischen Masse, kann man daher von einem scheinbaren oder elektromagnetischen Trägheitsmomente M reden.

Auf die Berechnung des Widerstandes, den ein Elektron mit variabler Rotation im allgemeinen erleidet, und der mit der Kraft (74) zu vergleichen ist, soll hier nicht eingegangen werden.

23. Wirkung eines äußeren Feldes. a) Die auf den kleinen Raum S (Nr. **12**) beschränkte geladene Materie befinde sich in einem konstanten und homogenen Felde $\mathfrak{d}, \mathfrak{h}$. Es sei $\mathfrak{v}_0$ die absolute Geschwindigkeit des Punktes O, $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + \mathfrak{v}'$ die Geschwindigkeit irgend eines andern Punktes, und, indem wir unter $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ die Koordinaten in Bezug auf drei durch O gelegte und sich mit diesem Punkte verschiebende Koordinatenaxen verstehen,

$$\int \varrho\, dS = e, \quad \int \varrho \mathbf{x}\, dS = \mathfrak{p}_x, \text{ u. s. w.}, \qquad \int \varrho \mathfrak{v}'_x dS = \dot{\mathfrak{p}}_x, \text{ u. s. w.}$$

Aus (VI) ergibt sich für die resultierende Kraft

$$\mathfrak{F} = e\mathfrak{d} + \frac{e}{c}[\mathfrak{v}_0 \cdot \mathfrak{h}] + \frac{1}{c}[\dot{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{h}]. \tag{81}$$

Bei der Berechnung des Drehmomentes $\mathfrak{N}$ in Bezug auf O nehmen wir an (vgl. Nr. **15**), daß von der Änderung der Größen (57) abgesehen werden kann, sodaß wir setzen dürfen

$$\int \varrho \mathfrak{v}'_x \mathbf{x}\, dS = 0, \quad \int \varrho \mathfrak{v}'_x \mathbf{y}\, dS = -c\mathfrak{m}_z, \quad \int \varrho \mathfrak{v}'_x \mathbf{z}\, dS = +c\mathfrak{m}_y, \text{ u. s. w.},$$

---

47) Die Arbeit von *Schwarzschild,* Über die Bewegung des Elektrons, Gött. Nachr. math.-phys. Kl. 1903, p. 245, in welcher der Einfluß der Rotation ausführlich untersucht wird, konnte ich nicht mehr berücksichtigen.

wenn

$$\frac{1}{2c}\int \varrho[\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{v}']\,dS = \mathfrak{m},$$

in welcher Formel $\mathfrak{r}$ den von O nach dem Elemente dS gezogenen Radiusvektor bedeutet.

Man erhält dann

$$\mathfrak{N} = [\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{d}] + \frac{1}{c}(\mathfrak{h}\cdot\mathfrak{p})\mathfrak{v}_0 - \frac{1}{c}(\mathfrak{v}_0\cdot\mathfrak{p})\,\mathfrak{h} + [\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{h}]. \tag{82}$$

b) Für den Fall, daß die Ladung symmetrisch in Bezug auf drei durch O gelegte Koordinatenebenen verteilt ist, und daß die geladene Materie sich nur wie ein starrer Körper bewegen kann, wollen wir auch die Formeln für die Wirkung eines nicht homogenen und variablen Feldes anführen. Es sei $\mathfrak{g}$ die Winkelgeschwindigkeit um eine durch O gehende Achse, also, wenn $\mathfrak{r}$ der von O aus gezogene Radiusvektor ist,

$$\mathfrak{v}' = [\mathfrak{g}\cdot\mathfrak{r}];$$

weiter

$$\int\varrho\mathrm{x}^2 dS = Q_1,\quad \int\varrho\mathrm{y}^2 dS = Q_2,\quad \int\varrho\mathrm{z}^2 dS = Q_3.$$

Unter

$$\mathfrak{d}_x,\ \mathfrak{h}_x,\ \frac{\partial\mathfrak{d}_x}{\partial x},\ \text{u. s. w.}$$

sollen jetzt die Werte in O verstanden werden, sodaß für die Werte in anderen Punkten zu setzen ist:

$$\mathfrak{d}_x + \mathrm{x}\frac{\partial\mathfrak{d}_x}{\partial x} + \mathrm{y}\frac{\partial\mathfrak{d}_x}{\partial y} + \mathrm{z}\frac{\partial\mathfrak{d}_x}{\partial z},\ \text{u. s. w.} \tag{83}$$

Beachtet man auch, daß jetzt

$$\mathfrak{p} = 0,\ \int\varrho\mathrm{xy}\,dS = 0,\ \text{u. s. w.},$$

so findet man

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_x = e\mathfrak{d}_x &+ \frac{e}{c}(\mathfrak{v}_{0y}\mathfrak{h}_z - \mathfrak{v}_{0z}\mathfrak{h}_y) + \\ &+ \frac{1}{c}\left\{Q_1\left(\mathfrak{g}_y\frac{\partial\mathfrak{h}_y}{\partial x} + \mathfrak{g}_z\frac{\partial\mathfrak{h}_z}{\partial x}\right) - Q_2\mathfrak{g}_x\frac{\partial\mathfrak{h}_y}{\partial y} - Q_3\mathfrak{g}_x\frac{\partial\mathfrak{h}_z}{\partial z}\right\},\ \text{u. s. w.}\end{aligned} \tag{84}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}_x = Q_2\frac{\partial\mathfrak{d}_z}{\partial y} &- Q_3\frac{\partial\mathfrak{d}_y}{\partial z} + \\ &+ \frac{1}{c}\left\{\mathfrak{v}_{0x}\left(Q_2\frac{\partial\mathfrak{h}_y}{\partial y} + Q_3\frac{\partial\mathfrak{h}_z}{\partial z}\right) - \mathfrak{v}_{0y}Q_2\frac{\partial\mathfrak{h}_x}{\partial y} - \mathfrak{v}_{0z}Q_3\frac{\partial\mathfrak{h}_x}{\partial z}\right\} + \\ &+ \frac{1}{c}(Q_3\mathfrak{g}_y\mathfrak{h}_z - Q_2\mathfrak{g}_z\mathfrak{h}_y),\ \text{u. s. w.}\end{aligned} \tag{85}$$

c) Für ein sphärisches Elektron ist $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$, $\mathfrak{m} = \frac{1}{c}Q\mathfrak{g}$. Man erhält dann mit Rücksicht auf (IV) und (V)

$$\mathfrak{N} = -\frac{1}{c}Q\frac{d\mathfrak{h}}{dt} + [\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{h}],$$

wo sich $\frac{d\mathfrak{h}}{dt}$ auf die Änderung von $\mathfrak{h}$ im Mittelpunkte der fortschreitenden Kugel bezieht. Besteht kein weiteres Kräftepaar, und ist zu einer Zeit, da $\mathfrak{h} = 0$ war, $\mathfrak{g} = 0$, $\mathfrak{m} = 0$ gewesen, dann ist für alle späteren Zeiten

$$\mathfrak{g} = -\frac{1}{c}\frac{Q}{M}\mathfrak{h}, \quad \mathfrak{m} = -\frac{1}{c^2}\frac{Q^2}{M}\mathfrak{h},$$

wenn M das Trägheitsmoment in Bezug auf einen Durchmesser ist. Es gilt dieses Resultat sowohl wenn in dem Raume, wo ein nicht fortschreitendes Elektron liegt, ein magnetisches Feld entsteht, wie auch, wenn das Elektron in ein bereits vorhandenes Feld hineinfliegt.

Besonders einfach gestaltet sich das Resultat für eine Kugelschale (Nr. **16**). Hier ist $Q = \frac{1}{3} eR^2$, also, wenn kein wirkliches Trägheitsmoment neben dem elektromagnetischen besteht, sodaß für M die Formel (67) gilt,

$$\mathfrak{g} = -\frac{6\pi c R}{e}\mathfrak{h}, \quad \mathfrak{m} = -2\pi R^3 \mathfrak{h}. \tag{86}$$

In Verbindung mit (66)—(68) zeigt dieses, daß das Elektron gerade in so rasche Rotation gesetzt wird, daß im Inneren das magnetische Feld aufgehoben wird und daß die von der Rotation herrührende magnetische Energie den Wert

$$-\frac{1}{2}(\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{h}) \tag{87}$$

hat.

d) Wir betrachten schließlich, und zwar nur insofern sie sich in einer resultierenden Kraft $\mathfrak{F}$ äußert, die Wirkung eines beliebigen Feldes auf ein polarisiertes Teilchen, dessen Moment variabel ist. Wir lassen dabei den Punkt O (Nr. **12**) des Teilchens in Ruhe bleiben und behandeln nicht nur die Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, sondern auch die in dem Teilchen vorkommenden Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ als unendlich klein. Indem wir nun wieder $\mathfrak{d}_x$ u. s. w. durch die Ausdrücke (83) ersetzen, erhalten wir

$$\mathfrak{F}_x = \mathfrak{p}_x \frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial x} + \mathfrak{p}_y \frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial y} + \mathfrak{p}_z \frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial z} + \frac{1}{c}[\dot{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{h}]_x, \text{ u. s. w.,} \tag{88}$$

oder, da nach der Hauptgleichung (IV)

$$\frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{d}_y}{\partial x} + \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{h}}_z, \quad \frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{d}_z}{\partial x} - \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{h}}_y, \text{ u. s. w.}$$

$$\mathfrak{F}_x = \mathfrak{p}_x \frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial x} + \mathfrak{p}_y \frac{\partial \mathfrak{d}_y}{\partial x} + \mathfrak{p}_z \frac{\partial \mathfrak{d}_z}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{d}{dt}[\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{h}]_x, \text{ u. s. w.}$$

e) Eine ähnliche Gleichung gilt für ein magnetisiertes Teilchen, das sich in einem nicht homogenen magnetischen Felde befindet, und

dessen Mittelpunkt in Ruhe bleibt. Ersetzt man nämlich in dem zweiten Teile der elektrischen Kraft (VI) $\mathfrak{h}_x$ durch $\mathfrak{h}_x + \mathrm{x}\frac{\partial \mathfrak{h}_x}{\partial x} + \mathrm{y}\frac{\partial \mathfrak{h}_x}{\partial y} + \mathrm{z}\frac{\partial \mathfrak{h}_x}{\partial z}$, u. s. w., wo sich jetzt $\mathfrak{h}_x$, $\frac{\partial \mathfrak{h}_x}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathfrak{h}_x}{\partial y}$, $\frac{\partial \mathfrak{h}_x}{\partial z}$, u. s. w. auf den Mittelpunkt beziehen, und nimmt man an, daß die Gesamtladung (45) Null ist, dann erhält man mit Rücksicht auf (58), wo jetzt $\mathfrak{v}$ statt $\mathfrak{u}$ geschrieben werden darf, für die resultierende Kraft

$$\mathfrak{F}_x = \mathfrak{m}_x \frac{\partial \mathfrak{h}_x}{\partial x} + \mathfrak{m}_y \frac{\partial \mathfrak{h}_y}{\partial x} + \mathfrak{m}_z \frac{\partial \mathfrak{h}_z}{\partial x}.$$

f) Es ist bemerkenswert, daß man die Wirkung eines gegebenen äußeren Feldes auf ein Elektron mit beliebiger Ladungsverteilung ganz allgemein in einer der Gleichung (80) entsprechenden Form darstellen kann. Wir bezeichnen wieder, wie in Nr. 22, die *Lagrange*'schen Koordinaten des Teilchens mit p, verstehen aber jetzt unter P die zu der Koordinate p gehörende vom äußeren Felde herrührende Kraftkomponente; demgemäß soll in der Gleichung (25), von der wir ausgehen wollen, δE bloß die virtuelle Arbeit dieser äußeren Kräfte bedeuten. Das äußere Feld möge das *zweite*, das zum Elektron selbst gehörende das *erste* Feld genannt werden. Nur dieses letztere Feld $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{h}_1$ wollen wir variieren, und zwar denken wir uns, daß sich zu den Verrückungen $\mathfrak{q}$ der Ladungen solche Variationen von $\mathfrak{d}_1$ gesellen, daß das Elektron in seiner variierten Bewegung gerade von demjenigen Felde begleitet wird, welches es hervorrufen würde, wenn die variierte Bewegung eine wirkliche wäre. Was nun die Variation von $L = T - U$ betrifft, so kommt es jetzt offenbar nur auf die Änderung des früher (Nr. 6) mit L_{12} bezeichneten Teiles an; desgleichen brauchen wir nur auf das letzte Glied in dem Werte

$$\delta' T = \frac{1}{c}\int(\mathfrak{a}_1 \cdot \delta'\mathfrak{c})\,dS + \frac{1}{c}\int(\mathfrak{a}_2 \cdot \delta'\mathfrak{c})\,dS,$$

wo der Verrückungsstrom $\delta'\mathfrak{c} = \delta\mathfrak{d}_1 + \varrho_1\mathfrak{q}$ ist, Rücksicht zu nehmen. Aus der Verbindung der Gleichungen (25) und (11) folgt daher, wenn man

$$\mathbf{L} = -\int \varrho_1 \psi_{21}\,dS \tag{89}$$

setzt,

$$\delta E = \delta \mathbf{L} - \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int(\mathfrak{a}_2 \cdot \varrho_1\mathfrak{q})\,dS,$$

mithin, wenn für $t = t_1$ und $t = t_2$ die Verrückungen $\mathfrak{q}$ verschwinden,

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta E\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathbf{L}\,dt.$$

Da nun, wie aus (12) erhellt, der Wert von $\mathbf{L}$ außer von φ_2 und $\mathfrak{a}_2$ nur von den Koordinaten p und den Geschwindigkeiten $\dot{p}$ des Elektrons abhängt, so finden wir[48])

$$(90) \qquad P = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial p} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{p}}\right).$$

24. Bewegung eines Elektrons in einem gegebenen Felde. Die durch die Gleichungen (84) mit Fortlassung der letzten Glieder bestimmte Kraft reicht vollständig hin zur Erklärung der gekrümmten Bahn, welche Kathodenstrahlen in elektrischen und magnetischen Feldern zeigen; auch die Beobachtungen über das Potentialgefälle, dem die in diesen Strahlen fortfliegenden Elektronen ihre Geschwindigkeit zu verdanken haben, sowie über die Änderung der Geschwindigkeit durch in der Bewegungsrichtung wirkende elektrische Kräfte sind mit der Theorie in befriedigender Übereinstimmung. Was die magnetische Ablenkbarkeit betrifft, so ist zu bemerken, daß dieselbe unabhängig ist von der Rotation, welche die Elektronen in dem magnetischen Felde annehmen können. In einem homogenen Magnetfelde ist die Bahn eine auf einem Kreiszylinder liegende Spirale; die Achse des Zylinders hat die Richtung des Feldes und der Radius ist

$$r = \frac{mc\,|\mathfrak{v}|\,\sin(\mathfrak{v}, \mathfrak{h})}{e\,|\mathfrak{h}|},$$

wo unter m die Summe der elektromagnetischen Masse m'' (Nr. **21**), und einer eventuellen wirklichen Masse zu verstehen ist. Für ein beliebiges magnetisches Feld hat man die Bahn noch nicht bestimmen können. *Poincaré*[49]) hat indes die Bewegungsgleichungen integriert für ein Magnetfeld, dessen Kraftlinien nach einem Punkte hin konvergieren, und *Riecke*[50]) für den Fall der Superposition eines homogenen magnetischen und eines ebenfalls homogenen elektrischen Feldes. Die Feldrichtungen können dabei in beliebiger Weise zueinander geneigt sein.

Ähnliches wie von den Kathodenstrahlen gilt auch von den *Becquerel*strahlen. Im allgemeinen lassen sich bei diesen Phänomenen durch geeignete Kombination verschiedener Beobachtungen das Verhältnis $\frac{e}{m}$

48) Vgl. *Schwarzschild,* l. c. (Anm. 21).

49) *Poincaré,* Remarques sur une expérience de *Birkeland,* Par. C. R. 123 (1896), p. 530.

50) *E. Riecke,* Bewegung eines elektrischen Teilchens in einem Felde elektrostatischer und elektromagnetischer Kraft, Ann. Phys. 4 (1901), p. 378; Zur Bewegung eines elektrischen Teilchens in einem konstanten elektromagnetischen Felde, Ann. Phys. 7 (1902), p. 401.

und der Wert von $|\mathfrak{v}|$ bestimmen. Bei den Untersuchungen von *Kaufmann*[51]) über *Becquerel*strahlen wurden hohe Werte für die Geschwindigkeit — bis über $0{,}95\,c$ — gefunden, und es zeigte sich, daß $\frac{e}{m}$ bei den verschiedenen Geschwindigkeiten nicht den gleichen Wert hat. Dies beweist, daß jedenfalls die elektromagnetische Masse von derselben Größenordnung wie die wirkliche Masse ist; es sind sogar die Messungen mit der Auffassung, daß letztere gar nicht existiert, sehr gut verträglich. *Abraham* ist bei seiner Behandlung der Dynamik des Elektrons von dieser Auffassung ausgegangen.

Ist n der Wert, den die Beobachtungen für das Verhältnis $\frac{e}{m}$ ergeben, so ist

$$m'' \leqq \frac{e}{n};$$

also, wenn man es mit nicht zu großen Geschwindigkeiten zu tun hat und die Elektronen als geladene Kugelschalen betrachtet, nach (79)

$$R \geqq \frac{n e}{6\pi c^2}.$$

Da man nun zuverlässige Schätzungen über den Wert von e gemacht hat, so kann man eine untere Grenze für den Radius R festsetzen. Nach der Auffassung von *Abraham* müssen in den letzten Formeln die Ungleichheitszeichen fortbleiben.

25. Wechselwirkung zweier Elektronen[52]). Kombiniert man die Formeln für das von einem Elektron erregte Feld mit dem, was über die Wirkung des Feldes gesagt wurde, so gelangt man zu der Wirkung, welche das eine Elektron unter Vermittelung des Äthers auf das andere ausübt. Es soll hier nur erwähnt werden, was für diesen Fall aus den Gleichungen von Nr. **23** f) wird, wenn wir die Dimensionen der Elektronen e_1 und e_2 als äußerst klein gegen ihren Abstand betrachten. Aus (90) folgt für die rechtwinkligen Komponenten der auf e_1 wirkenden Kraft

$$(91) \qquad \mathfrak{F}_x = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{x}_1}\right), \text{ u. s. w.,}$$

wo nach (89)

$$\mathbf{L} = - e_1 \psi_{21}$$

51) *W. Kaufmann*, Die magnetische und elektrische Ablenkbarkeit der *Becquerel*strahlen und die scheinbare Masse der Elektronen. Gött. Nachr., math.-phys. Kl. 1901, p. 143; Über die elektromagnetische Masse der Elektronen, ibid. 1903, p. 90.

52) Vgl. *Wiechert,* Elektrodynamische Elementargesetze, Arch. néerl. (2) 5 (1900), p. 549; *Schwarzschild,* Die elementare elektrodynamische Kraft, Gött. Nachr., math.-phys. Kl. 1903, p. 132.

ist. Substituiert man hier für ψ_{21} den Wert (12), und für φ_2 und $\mathfrak{a}_2$ die aus (70) folgenden Werte, dann erhält man

$$(92) \qquad \mathbf{L} = -\frac{e_1 e_2}{4\pi\left[r\left(1-\frac{\mathfrak{v}_{2r}}{c}\right)\right]}\left\{1-\frac{1}{c^2}(\mathfrak{v}_1\cdot[\mathfrak{v}_2])\right\}.$$

Es ist vielleicht nicht überflüssig, an die Bedeutung der hier auftretenden Symbole zu erinnern. Man fasse die wirkliche Bewegung von e_2 und eine bestimmte Zeit t ins Auge, gebe aber zunächst dem Elektron e_1 eine beliebige Lage C_1 mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1 und eine beliebige Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ mit den Komponenten $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1$. Unter den aufeinander folgenden Lagen von e_2 suche man weiter diejenige, wir wollen sagen zur Zeit $t-\tau$ erreichte Lage C_2 auf, die der Bedingung genügt, daß $C_2 C_1$ gerade die Länge $c\tau$ hat. Wenn man dann mit dem Werte $r = C_2 C_1$ und der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_2$, welche e_2 in der Lage C_2 hat, und deren Komponente nach der Richtung $C_2 C_1$ für $\mathfrak{v}_{2r}$ zu nehmen ist, die Größe $\mathbf{L}$ berechnet, erhält man diese als Funktion von $t, x_1, y_1, z_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1$. Man differenziere diese Funktion, bei konstant gehaltenem t, nach $x_1, \dot{x}_1$, u. s. w. und lege in dem Resultat diesen Größen die Werte bei, die sie zur Zeit t in Wirklichkeit haben. In dieser Weise gelangt man zu den in der Gleichung (91) vorkommenden Werten von $\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial \mathbf{L}_1}{\partial \dot{x}_1}$, deren letzter dann noch total nach t zu differenzieren ist.

Das gefundene Resultat läßt das Verhältnis der Elektronentheorie zum *Clausius*'schen Gesetze[53]) deutlich erkennen. Man kann nämlich auch nach diesem die Kraftkomponenten mit Hilfe der Formeln (91) bestimmen; nur hat man statt (92) die ähnlich gebaute Größe

$$\mathbf{L} = -\frac{e_1 e_2}{4\pi r}\left\{1-\frac{1}{c^2}(\mathfrak{v}_1\cdot\mathfrak{v}_2)\right\},$$

wo sich alles auf dieselbe Zeit t bezieht, zu nehmen.

IV. Elektromagnetische Vorgänge in ponderablen Körpern.

26. Die Elektronen in den ponderablen Körpern[54]). Zur Unterscheidung mögen die Elektronen, die in einem Leitungsstrome über größere Strecken hin fortwandern, gleichviel ob sie vollkommen

53) Vgl. den Artikel V 12 von *Reiff* und *Sommerfeld*, Nr. 9.

54) Vgl. zu diesen und den nächstfolgenden Nummern *Larmor,* Aether and matter; *Walker*, Aberration etc.; *Lorentz,* De grondvergelijkingen voor electromagnetische verschijnselen in ponderabele lichamen, afgeleid uit de electronentheorie, Amsterdam Zittingsverslag Akad. v. Wet. 11 (1902), p. 305 (Amsterdam Proceedings 1902—1903, p. 254).

frei (Metalle), oder an Atome oder Atomgruppen gebunden (Elektrolyte) sind, *Leitungselektronen* heißen, dagegen die Teilchen, welche im Inneren eines Atoms oder Moleküls aus ihrer Gleichgewichtslage verschoben werden können, sodaß das Atom oder das Molekül elektrisch polarisiert wird, wie man das für nichtleitende Körper im elektrischen Felde anzunehmen hat, *Polarisationselektronen*, und schließlich die Teilchen, deren rotierende oder umlaufende Bewegungen sich uns als eine Magnetisierung bemerklich machen, *Magnetisierungselektronen*. Finden die verschiedenen Vorgänge zu gleicher Zeit in demselben Körper statt, so soll angenommen werden, daß die drei verschiedenen Klassen nebeneinander vorhanden sind und in den Betrachtungen scharf voneinander getrennt werden können, obgleich das vielleicht kein getreues Bild der Wirklichkeit ist.

27. Mittelwerte. Die Grundgleichungen (I) bis (V) sind in jedem Punkte des Raumes in aller Strenge erfüllt, und würden es ermöglichen, bei vollständiger Kenntnis der Lagerung und der Bewegungen der Elektronen den Zustand bis in alle Einzelheiten zu überblicken und das elektromagnetische Feld mit allen den raschen und oft höchst unregelmäßigen Änderungen, die von Punkt zu Punkt in demselben bestehen müssen, genau kennen zu lernen. Offenbar ist aber an eine derartige Behandlungsweise nicht zu denken. Für das Verständnis mancher Tatsachen kann man sich indes mit weniger tiefgehenden Betrachtungen zufrieden stellen; es sind ja auch nicht die Vorgänge in den einzelnen Elektronen, Atomen und Molekülen, die sich dem Beobachter zeigen; was man wahrnimmt ist vielmehr immer durch die Mitwirkung unzählig vieler Teilchen bedingt und hängt von den Mittelwerten der über gewisse Räume verbreiteten Zustandsgrößen ab.

„Physikalisch unendlich klein“, im Gegensatz zu „mathematisch unendlich klein“ soll eine Länge l heißen, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt. Erstens sollen in zwei Punkten, die um die Strecke l voneinander entfernt sind, die der Beobachtung zugänglichen Zustandsgrößen keinen bemerkbaren Unterschied zeigen, mit andern Worten, wenn, für irgend eine solche Größe φ, der Wert von grad φ von der Ordnung φ/l_1 ist, so soll l_1/l eine sehr große Zahl sein. Zu gleicher Zeit sollen die Entfernungen zwischen einem Körperteilchen und den nächstbenachbarten, welche Entfernungen von der Größenordnung l_2 sein mögen, äußerst kleine Bruchteile von l sein.

In einigen Fällen werden wir uns vorstellen, daß zwischen l_1 und l_2 zwei oder sogar drei Größen, etwa l, l', l'' eingeschaltet werden können, derart, daß die Verhältnisse l_1/l, l/l', l'/l'', l''/l_2 sämtlich sehr

große Zahlen sind. Wir können dann l, l', l'' als physikalisch unendlich kleine Längen verschiedener Ordnung, und zwar l als die Länge der niedrigsten Ordnung bezeichnen.

Den Mittelwert irgend einer skalaren oder Vektorgröße A im Punkte P definieren wir durch die Gleichung

$$\overline{\mathsf{A}} = \frac{1}{S}\int \mathsf{A}\, dS, \tag{93}$$

in welcher S die Größe eines den Punkt P enthaltenden physikalisch unendlich kleinen Raumes bedeutet und die Integration sich über diesen Raum erstreckt. Wenn nötig, sind dabei über Gestalt, Größe und Lage der Grenzfläche σ von S nähere Festsetzungen zu treffen. Hat man das für einen Punkt P getan, so soll bei der Berechnung der Mittelwerte für irgend einen anderen Punkt P' der Raum S' gewählt werden, den man erhält, wenn man den Raum S um die Strecke PP' verschiebt. Bei bestimmter Wahl der Fläche σ ist der Mittelwert $\overline{\mathsf{A}}$ eine Funktion der Zeit und der Koordinaten des Punktes P. Es kann und soll die Fläche σ so gewählt werden, daß die von dem molekularen Gefüge des Körpers herrührenden raschen und unregelmäßigen Änderungen der Größe A aus dem Mittelwerte verschwunden sind. Man sieht leicht, daß diese Bedingung genügt, um die Definition des Mittelwertes von jeder Unbestimmtheit zu befreien und daß es auf die Gestalt und Größe des Raumes S, vorausgesetzt daß die Dimensionen physikalisch unendlich klein bleiben, weiter nicht ankommt; ebenso daß man setzen darf[55])

$$\frac{\partial \overline{\mathsf{A}}}{\partial x} = \overline{\frac{\partial \mathsf{A}}{\partial x}}, \text{ u. s. w.,} \quad \frac{\partial \overline{\mathsf{A}}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial \mathsf{A}}{\partial t}}. \tag{94}$$

Das Operieren mit solchen Mittelwerten hat zur Folge, daß eine scharfe Abgrenzung zwischen zwei Körpern, vorausgesetzt, daß eine solche in Wirklichkeit existierte, gleichsam verwischt wird. Darin liegt jedoch kein Nachteil, da eine Übergangsschicht von unendlich kleiner Dicke sich doch jeder Beobachtung entziehen würde.

Es kommt nun zunächst auf die Mittelwerte $\overline{\varrho}$ und $\overline{\varrho \mathfrak{v}}$ an. Wir nehmen an, daß die ponderable Materie eine sichtbare Bewegung mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ habe, die sich in beliebiger Weise langsam

---

55) In dem Differentialquotienten eines Mittelwertes, wie $\frac{\partial \overline{\mathsf{A}}}{\partial x}$, darf man unter dem Nenner nach Belieben einen mathematisch oder, was besser in den Gedankengang, der uns zu den Mittelwerten führte, paßt, einen physikalisch unendlich kleinen Zuwachs von x verstehen. Dagegen hat man es in $\frac{\partial \mathsf{A}}{\partial x}$ notwendig mit mathematisch unendlich kleinen Größen zu tun.

und kontinuierlich von Punkt zu Punkt ändern möge. Die Geschwindigkeit der elektrischen Ladung bezeichnen wir weiterhin mit $\mathfrak{w} + \mathfrak{u}$. Demgemäß ersetzen wir $\overline{\varrho \mathfrak{v}}$ durch $\overline{\varrho \mathfrak{w}} + \overline{\varrho \mathfrak{u}}$, sodaß sich nach (1) für den Mittelwert des Stroms der Ausdruck

$$\bar{\mathfrak{c}} = \dot{\bar{\mathfrak{d}}} + \overline{\varrho \mathfrak{w}} + \overline{\varrho \mathfrak{u}} \tag{95}$$

ergibt.

28. Hilfssätze für die Berechnung der Mittelwerte. a) In einem Raum liegen zahlreiche Punkte P, in ähnlicher Weise geordnet oder zerstreut wie die kleinsten Teilchen eines ponderablen Körpers; die Anzahl N pro Volumeneinheit sei von derselben Größenordnung, wie die Anzahl dieser Teilchen. Von allen diesen Punkten aus ziehe man gleiche und gleichgerichtete Vektoren $PQ = \mathfrak{r}$. Es sei weiter $d\sigma$ ein physikalisch unendlich kleiner Flächenteil mit der Normale n, und es soll angegeben werden, wie viele der Linien PQ von diesem Element durchschnitten werden, und zwar soll diese Zahl mit positivem oder negativem Vorzeichen genommen werden, je nachdem die Endpunkte Q der durchschnittenen Linien auf der positiven oder der negativen Seite von $d\sigma$ liegen.

Setzt man zunächst eine homogene Verteilung der Punkte P voraus, und nimmt man an, daß gleiche und gleichgerichtete Elemente $d\sigma$ alle gleich viel Strecken $\mathfrak{r}$ durchschneiden[56]), so erhält man für die gesuchte Zahl

$$N \mathfrak{r}_n d\sigma. \tag{96}$$

Wir werden nur Fälle zu betrachten haben, wo die Länge der Strecken $\mathfrak{r}$ nicht erheblich größer als die Dimensionen des Elementes $d\sigma$ ist. Dann kommt es bei der gestellten Frage nur auf diejenigen Strecken an, deren Anfangspunkte in der unmittelbaren Nähe des Elementes liegen; der gefundene Ausdruck bleibt demzufolge auch dann anwendbar, wenn die Häufigkeitszahl N sich langsam, d. h. in „beobachtbarer“ Weise von Punkt zu Punkt ändert. Auch dürfen wir

56) Dies darf ohne weiteres angenommen werden, wenn die Punkte P unregelmäßig zerstreut liegen. Bei regelmäßiger Anordnung und kleiner Länge von PQ könnte man gewisse Ebenen so durch das System legen, daß sie keine einzige der Linien PQ durchschneiden, während andere Ebenen von derselben Richtung eine große Anzahl von Linien treffen würden. Um diese Schwierigkeit zu vermeiden, stelle man sich $d\sigma$ nicht eben, sondern in geeigneter Weise gefaltet vor, so jedoch, daß die Höhe und Tiefe der Falten sehr klein gegen die Dimensionen des Elements sind. Unter n ist dann eine mittlere Richtung der Normale zu verstehen.

uns vorstellen, daß eine ähnliche langsame Änderung in der Richtung und der Größe der Vektoren $\mathfrak{r}$ besteht.

b) Ein Raum enthalte sehr viele materielle Teilchen und es sei q eine skalare Größe von irgend welcher physikalischen Bedeutung, die in vereinzelten Punkten, etwa $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jedes Teilchens die Werte $q_1, q_2, \ldots, q_n$ hat. Dabei sei für jedes Teilchen $\Sigma q = 0$. Man denke sich weiter eine geschlossene Fläche σ, deren Elemente $d\sigma$ physikalisch unendlich klein sind; die Dimensionen von σ selbst mögen entweder endlich oder gegenüber denen von $d\sigma$ physikalisch unendlich klein niedrigerer Ordnung sein. Es soll $Q = \Sigma q$ für alle innerhalb dieser Fläche liegenden Punkte A bestimmt werden. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Fläche eine gewisse Anzahl von Teilchen durchschneidet, und zwar in solcher Weise, daß gleiche und gleichgerichtete nahe beieinander liegende physikalisch unendlich kleine Teile $d\sigma$ das in derselben Weise tun (vgl. oben a)). Wir schließen also den Fall aus, daß alle Punkte der Fläche σ in dem Raum zwischen den Teilchen liegen, in welchem Falle $Q = 0$ wäre.

In jedem Teilchen wählen wir einen Ursprung O, den wir als n-fachen Punkt $O_1, O_2, \ldots, O_n$ betrachten. Den Punkten $O_1, O_2, \ldots, O_n$ legen wir die Werte $-q_1, -q_2, \ldots, -q_n$ bei, und rechnen dann diese Punkte mit zu den Punkten A. Die Summe Q wird hierdurch nicht geändert, da $-q_1 - q_2 - \cdots - q_n = 0$.

Für alle Teilchen in der Nähe eines Elementes $d\sigma$ mögen die Lagen der Punkte A und O und die Werte q die gleichen sein. Ist nun N die Anzahl der Teilchen pro Volumeneinheit, und $O_1 A_1 = \mathfrak{r}_1$, $O_2 A_2 = \mathfrak{r}_2$, u. s. w., so ist nach dem oben Gefundenen der Anteil, den die Punkte $O_1 A_1$ zu Q liefern,

$$-\int N q_1 \mathfrak{r}_{1n} \, d\sigma.$$

Indem man in derselben Weise die übrigen Punktpaare $O_2 A_2$, $O_3 A_3$ u. s. w. berücksichtigt, gelangt man zu folgendem Resultat:

Setzt man für *ein* Teilchen:

$$\mathfrak{q} = \sum q \mathfrak{r}, \tag{97}$$

wo sich die Summe auf alle in demselben vorkommenden Werte von q bezieht (es wird diese Summe unabhängig von der Wahl von O), und weiter

$$\mathfrak{Q} = N \mathfrak{q}, \tag{98}$$

so ist

$$Q = -\int \mathfrak{Q}_n \, d\sigma. \tag{99}$$

Man kann nun auch leicht zu dem Fall übergehen, daß die Größe

q nicht blos in vereinzelten Punkten, sondern an jeder Stelle eines Teilchens besteht. Statt der Summe der zu jenen Punkten gehörenden Werte q, wollen wir dann die Summe der von den Volumelementen dS herrührenden Werte $q dS$ betrachten. Die Größe Q, um die es sich jetzt handelt, ist das Integral $\int q dS$ über den von der Fläche σ umschlossenen Raum ausgedehnt. Dieselbe wird noch immer durch (98) und (99) bestimmt; nur ist jetzt (97) durch das jedesmal für *ein* Teilchen berechnete Integral

$$\mathfrak{q} = \int q \mathfrak{r} dS \tag{100}$$

zu ersetzen. Bedingung für die Anwendbarkeit von (99) ist in diesem Falle, daß für jedes Teilchen

$$\int q dS = 0.$$

Mit einer kleinen Abänderung bleiben obige Formeln auch gültig, wenn zwischen den zahllosen Teilchen eines physikalischen Raumelementes, was die Verteilung der Werte von q betrifft, Verschiedenheiten bestehen. Die für den Raum S berechnete Summe $Q = \int q dS$ läßt sich noch immer durch (99) darstellen und für jedes Teilchen kann die Gleichung (100) zur Bestimmung des Vektors $\mathfrak{q}$ dienen. Die Gleichung (98) aber ist zu ersetzen durch die allgemeinere Definition von $\mathfrak{Q}$ als die für die Volumeneinheit berechnete Summe aller $\mathfrak{q}$. M. a. W., man berechnet $\mathfrak{Q}$, wenn man einen physikalisch unendlich kleinen Raum S wählt, dessen Oberfläche kein einziges Teilchen durchschneidet, unter $\mathfrak{r}$ den von einem beliebigen festen Punkte aus gezogenen Radiusvektor versteht, das Integral $\int q \mathfrak{r} dS$ für den Raum S berechnet und schließlich durch S dividiert.

Um den Mittelwert $\overline{q}$ zu erhalten, hat man (99) auf einen physikalisch unendlich kleinen Raum anzuwenden und durch die Größe desselben zu dividieren. So ergibt sich

$$\overline{q} = -\operatorname{div} \mathfrak{Q}. \tag{101}$$

c) Es läßt sich die Summe Q für alle innerhalb einer Fläche σ liegenden Punkte A auch dann angeben, wenn für jedes Teilchen Σq $\left(\text{oder } \int q dS\right)$ von Null verschieden, etwa $= \mathsf{q}$ ist. In diesem Falle ist der Ausdruck (99) um $\Sigma \mathsf{q}$ zu vermehren, wenn man die Summe auf alle Teilchen bezieht, deren Mittelpunkte O innerhalb der Fläche liegen. So lange nun q nicht ganz nahe an Null kommt, genauer gesagt, so lange q von der Größenordnung $|\mathfrak{q}|/|\mathfrak{r}|$ bleibt, wo $|\mathfrak{r}|$ die Größenordnung der in (97) oder (100) vorkommenden $\mathfrak{r}$ angibt (wir

werden das in ähnlichen Fällen stillschweigend voraussetzen), tritt (99) weit hinter $\Sigma \mathfrak{q}$ zurück, und darf als Mittelwert

$$\bar{q} = N\mathfrak{q}$$

angenommen werden.

Es ist bemerkenswert, daß es in diesem Falle bei der Berechnung des Mittelwertes nach der Vorschrift von Nr. 27 einerlei ist, ob die Fläche σ Teilchen durchneidet oder nicht, während in dem unter b) behandelten Fall ein derartiges Durchschneiden notwendige Voraussetzung ist.

29. Mittelwerte, die von den Leitungselektronen herrühren. Den Mittelwert

$$\varrho_1 = \bar{\varrho},$$

bloß für diese Elektronen berechnet, nennen wir weiterhin die (beobachtbare) *Dichte der elektrischen Ladung.* Wir nehmen an, daß ϱ in allen Punkten eines Leitungselektrons dasselbe Vorzeichen hat, und daß für ein solches Teilchen die Ausdrücke (46) und (48) verschwinden. Sind nun verschiedene Arten von Leitungselektronen vorhanden, deren Ladungen e, e', e'', u. s. w., und deren Anzahlen pro Volumeneinheit N, N', N'', u. s. w. sind, so ist

$$\varrho_1 = Ne + N'e' + N''e'' + \text{u. s. w.}$$

Das für die Leitungselektronen berechnete vorletzte Glied der Gleichung (95) nennen wir den *Konvektionsstrom*

$$\mathfrak{K} = \varrho_1 \mathfrak{w}, \tag{XXIII}$$

und das letzte Glied den *Leitungsstrom*

$$\mathfrak{J} = \overline{\varrho \mathfrak{u}}, \tag{XXIV}$$

oder, wenn die Elektronen der verschiedenen soeben genannten Gruppen die Geschwindigkeiten $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{u}''$, u. s. w. haben,

$$\mathfrak{J} = Ne\mathfrak{u} + N'e'\mathfrak{u}' + N''e''\mathfrak{u}'' + \text{u. s. w.} \tag{XXIVa}$$

30. Mittelwerte, die von den Polarisationselektronen herrühren. Es mögen sich in dem Körper zahllose elektrisch polarisierte Teilchen (Nr. 13) befinden; es sei $\mathfrak{p}$ das elektrische Moment eines einzelnen Teilchens, $\mathfrak{P}$ das elektrische Moment der Volumeneinheit, oder die *elektrische Polarisation* des Körpers.

a) Für den Mittelwert von ϱ, insofern derselbe von den Polarisationselektronen herrührt, erhält man nach (101)

$$\varrho_2 = -\operatorname{div} \mathfrak{P}.$$

b) Wir nehmen an, daß die „Mittelpunkte" der Teilchen (Nr. 12) keine andere Bewegung haben als die, welche die Materie im Ganzen

besitzt, und daß also die Geschwindigkeiten dieser Mittelpunkte durch die Werte von $\mathfrak{w}$ an den betreffenden Stellen gegeben sind. Die Ladungen eines Teilchens können sich nun aber relativ zum Mittelpunkte bewegen. Die Geschwindigkeit dieser Bewegung bezeichnen wir mit $\mathfrak{u}$, die volle Geschwindigkeit der Ladungen also mit $\mathfrak{w} + \mathfrak{u}$. Da infolge dieser Festsetzung für *ein* Teilchen $\int \varrho \mathfrak{w} dS = 0$, so kann man die Mittelwerte $\overline{\varrho \mathfrak{w}_x}$, $\overline{\varrho \mathfrak{w}_y}$, $\overline{\varrho \mathfrak{w}_z}$ nach der Formel (101) berechnen. Man findet dabei

$$\overline{\varrho \mathfrak{w}_x} = -\operatorname{div}(\mathfrak{w}_x \mathfrak{P}), \text{ u. s. w.} \tag{102}$$

c) Für ein einzelnes Teilchen ist

$$\int \varrho \mathfrak{u} dS = \frac{d\mathfrak{p}}{dt};$$

da dieses von Null verschieden ist, so kann man bei der Berechnung des Mittelwertes von $\varrho\mathfrak{u}$ eine Fläche σ wählen, die kein einziges Teilchen durchschneidet (vgl. Nr. 28 c)). Man erhält, wenn man sich vorstellt, daß die Fläche an der Bewegung mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ teilnimmt,

$$\overline{\varrho \mathfrak{u}} = \frac{1}{S}\frac{d}{dt}(S\mathfrak{P}) = \dot{\mathfrak{P}} + \mathfrak{w}_x \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} + \mathfrak{w}_y \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} + \mathfrak{w}_z \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z} + \operatorname{div} \mathfrak{w} \cdot \mathfrak{P}. \tag{103}$$

Alles zusammengenommen ergibt sich aus (102) und (103) für den Mittelwert des elektrischen Stroms, insofern derselbe von den Polarisationselektronen herrührt,

$$\dot{\mathfrak{P}} + \operatorname{rot}[\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{w}].$$

31. Mittelwerte, die von den Magnetisierungselektronen herrühren. Der Körper möge auch magnetisierte Teilchen, wie die in Nr. **15** betrachteten, enthalten. Solche Teilchen liefern, wenn für jedes die Gesamtladung (45) verschwindet, nur zu $\overline{\varrho\mathfrak{u}}$ einen Beitrag, und man kann diesen mittels der Gleichung (101) berechnen, da für jedes Teilchen die Größen (47) verschwinden. Ersetzt man z. B. in den Formeln von Nr. 28 b) die Größe q durch $\varrho\mathfrak{u}_x$, so wird nach (100) und 58)

$$\mathfrak{q}_x = 0, \quad \mathfrak{q}_y = -c\mathfrak{m}_z, \quad \mathfrak{q}_z = +c\mathfrak{m}_y,$$

folglich, wenn $\mathfrak{M}$ das magnetische Moment pro Volumeneinheit oder die *Magnetisierung* ist,

$$\mathfrak{Q}_x = 0, \quad \mathfrak{Q}_y = -c\mathfrak{M}_z, \quad \mathfrak{Q}_z = +c\mathfrak{M}_y,$$

$$\overline{\varrho \mathfrak{u}_x} = c\left(\frac{\partial \mathfrak{M}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{M}_y}{\partial z}\right).$$

Also

$$\overline{\varrho \mathfrak{u}} = c \operatorname{rot} \mathfrak{M}.$$

32. Die verschiedenen Teile des elektrischen Stroms[57]. Es können jetzt die verschiedenen für die rechte Seite von (95) gefundenen Beiträge zusammengefaßt werden. Setzt man

$$\text{(XXV)} \qquad \mathfrak{D} = \bar{\mathfrak{d}} + \mathfrak{P},$$

$$\text{(XXVI)} \qquad \mathfrak{V} = \dot{\mathfrak{D}},$$

und

$$\text{(XXVII)} \qquad \mathfrak{R} = \text{rot}\,[\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{w}],$$

welche Größen man *elektrische Erregung, Verschiebungsstrom* und *Röntgenstrom* nennen kann, so wird der Gesamtstrom

$$(104) \qquad \mathfrak{V} + \mathfrak{J} + \mathfrak{K} + \mathfrak{R} + c\,\text{rot}\,\mathfrak{M}.$$

Die Übereinstimmung dieses Resultats mit der Zerlegung des Stroms in der *Hertz*'schen Theorie (V 13, Nr. **17**) springt in die Augen. Es besteht indessen in zweifacher Hinsicht ein Unterschied. Erstens, was die Formel (37) von V 13, Nr. **17** und die jetzige Formel (XXVII) für den *Röntgen*strom betrifft. Dieser Unterschied hängt damit zusammen, daß die elektrische Erregung in (XXV) als aus zwei Teilen zusammengesetzt erscheint, von welchen nur der zweite an der bewegten Materie haftet.

Zweitens tritt jetzt auch ein von der Magnetisierung abhängiges Glied in dem Ausdruck für den Gesamtstrom auf; man könnte dieses „den die Magnetisierung ersetzenden Strom“ nennen.

Dem allgemeinen Gebrauch gemäß soll indes im folgenden nur der Vektor

$$\text{(XXVIII)} \qquad \mathfrak{C} = \mathfrak{V} + \mathfrak{J} + \mathfrak{K} + \mathfrak{R}$$

als „elektrischer Strom“ bezeichnet werden; man hat dann aber als Mittelwert von $\mathfrak{c}$ in den Grundgleichungen

$$(105) \qquad \bar{\mathfrak{c}} = \mathfrak{C} + c\,\text{rot}\,\mathfrak{M}$$

zu setzen.

33. Die Grundgleichungen für die Mittelwerte[58]. Um auch weiter die Bezeichnungen und Benennungen denen der *Hertz*'schen Theorie möglichst anzupassen, setzen wir

$$\text{(XXIX)} \qquad \bar{\mathfrak{h}} = \mathfrak{B},$$

$$\text{(XXX)} \qquad \bar{\mathfrak{h}} - \mathfrak{M} = \mathfrak{B} - \mathfrak{M} = \mathfrak{H},$$

und nennen diese Vektoren die *magnetische Erregung* und die *magnetische Kraft.* Außerdem führen wir ein

57) Vgl. *Poincaré,* Électricité et optique, 2e édit., §§ 360, 384.

58) *Lorentz,* l. c. (Anm. 54).

(XXXI) $$\overline{\mathfrak{d}} = \mathfrak{E},$$

(XXXI′) $$\overline{\mathfrak{d}} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\cdot\overline{\mathfrak{h}}] = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{B}] = \mathfrak{E}',$$

oder (vgl. (XIX))

(XXXI′a) $$\overline{\mathfrak{d}}' = \mathfrak{E}'.$$

Den ersten dieser beiden Vektoren kann man die „mittlere *elektrische Kraft* für ruhende Ladungen" nennen, während der zweite die mittlere Wirkung des Feldes auf Elektronen, welche die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ haben, bestimmt.

Für die Differenz schreiben wir

(106) $$\mathfrak{E}' - \mathfrak{E} = \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{B}] = \mathfrak{E}^b,$$

wo der Index b anzeigen soll, daß man es hier mit einer von der Bewegung abhängigen Größe zu tun hat.

Ähnlich wie wir hier $\mathfrak{E}'$ einführten, stellen wir der magnetischen Kraft $\mathfrak{H}$ den Vektor

(XXX′) $$\mathfrak{H} - \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{E}] = \mathfrak{H}'$$

an die Seite. Zu bemerken ist dabei, daß dieser nicht mit dem Mittelwerte des früheren $\mathfrak{h}'$ (Nr. **10**) zusammenfällt; dieser Mittelwert ist

$$\mathfrak{B} - \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{E}].$$

Indem man nun in den Hauptgleichungen (I a), (II), (III), (IV) und (V) beiderseits die Mittelwerte nimmt, und statt ϱ_1 (Nr. **29**) einfach ϱ schreibt, gelangt man nach einiger Umformung zu folgenden Gleichungen:

(I″) $$\operatorname{div}\mathfrak{D} = \varrho,$$

(II″) $$\operatorname{div}\mathfrak{C} = 0,$$

(III″) $$\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\mathfrak{C},$$

(IV″) $$\operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{B}},$$

(V″) $$\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0.$$

Dazu kommen noch zwei Formeln. Erstens die aus (XXXI′) und (IV″) folgende Beziehung (vgl. V 13, Nr. 4, Gl. 14)

(IV″a) $$\operatorname{rot}\mathfrak{E}' = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{B}} + \frac{1}{c}\operatorname{rot}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{B}] = -\frac{1}{c}\underline{\dot{\mathfrak{B}}}$$

und zweitens die analoge Gleichung

(III″a) $$\operatorname{rot}\mathfrak{H}' = \frac{1}{c}(\mathfrak{J} + \underline{\dot{\mathfrak{D}}}),$$

die aus (XXX'), (III''), (XXVIII), (XXVI), (XXIII), (XXVII), (I''), (XXV) und (XXXI) hervorgeht.

Die Gleichungen stimmen jetzt der Form nach fast vollkommen mit denen der *Hertz*'schen Theorie überein; nur fehlt, wie bereits gesagt, in $\mathfrak{C}$ ein Teil des früheren *Röntgen*stroms. Auch ist zu bemerken, daß in einem Leiter, der keine Polarisationselektronen enthält, $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$ ist, während man in der Theorie von *Hertz* für einen solchen Körper $\mathfrak{D} = 0$ setzen darf.

Aus den Formeln (IV''a) und (III''a) folgt, daß an der Grenzfläche zweier Körper die tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$ stetig sind. Ebenso schließen wir aus (II'') und (V'') auf Kontinuität der normalen Komponenten von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}$.

Bemerkenswert sind auch die Gleichungen für die Mittelwerte, die sich aus (VII) bis (X) ergeben. Setzt man

$$\text{(XXXII)} \qquad \bar{\varphi} = \Phi, \quad \bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{A},$$

und versteht man unter ϱ dasselbe wie in (I'') (mittlere von den Leitungselektronen herrührende Dichte), so erhält man

$$\text{(VII'')} \qquad \Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\ddot{\Phi} = -\varrho + \operatorname{div}\mathfrak{P},$$

$$\text{(VIII'')} \quad \Delta\mathfrak{A} - \frac{1}{c^2}\ddot{\mathfrak{A}} = -\frac{1}{c}(\mathfrak{J} + \varrho\mathfrak{w} + \dot{\mathfrak{P}} + \operatorname{rot}[\mathfrak{P}.\mathfrak{w}] + c\operatorname{rot}\mathfrak{M}),$$

$$\text{(IX'')} \qquad \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{A}} - \operatorname{grad}\Phi,$$

$$\text{(X'')} \qquad \mathfrak{B} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}.$$

In allen diesen Gleichungen ist ein ruhendes Koordinatensystem vorausgesetzt. Sie gelten für beliebige Größe der Geschwindigkeiten $\mathfrak{w}$.

34. Versuche von Eichenwald. Dank dem Umstande, daß der Röntgenstrom jetzt durch $\operatorname{rot}[\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{w}]$ und nicht, wie in der Theorie von *Hertz*, durch $\operatorname{rot}[\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{w}]$ dargestellt wird, ist die Elektronentheorie imstande, von dem Ergebnisse der in V 13, Nr. **17** erwähnten Versuche mit einem rotierenden Kondensator Rechenschaft zu geben. Macht man dieselben Annahmen, wie am Schluß jener Nummer, so findet man wieder, daß an jeder Kondensatorplatte zwei Flächenströme vorhanden sind. Der eine, der Röntgenstrom, hat für die a. a. O. betrachtete Platte die Größe $\mathfrak{P}_z \cdot |\mathfrak{w}|$ und ist der Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ entgegengesetzt gerichtet; der andere, der Konvektionsstrom, hat die Richtung von $\mathfrak{w}$ und, wenn ω die Flächendichte der Ladung auf der Platte ist, die Größe $\omega|\mathfrak{w}| = \mathfrak{D}_z \cdot |\mathfrak{w}|$ (vgl. (I'')). Die Ströme heben sich also nicht mehr auf; zusammen mit den ent-

sprechenden Strömen an der anderen Platte bringen sie ein magnetisches Feld hervor, das man mittels (III″) und (V″) bestimmen kann.

Die Differenz der beiden Ströme ist, nach (XXV) und (XXXI), $\mathfrak{E}_z \cdot |\mathfrak{w}|$. Es folgt weiter aus (IX″), wo jetzt, weil der Zustand als stationär vorausgesetzt wird, $\dot{\mathfrak{A}} = 0$, daß $\mathfrak{E}_z$ dem Gefälle des Potentials Φ zwischen den Platten gleich ist. In dieser Weise erklärt es sich, daß, wie *Eichenwald* beobachtet hat, der magnetische Effekt lediglich von der Potentialdifferenz der Belegungen, nicht aber von der Natur des Dielektrikums abhängt.

35. Das elektromagnetische Feld im Inneren verschieden gestalteter Höhlungen. a) Wir benutzen die Gleichungen (VII″) und (VIII″) zur Bestimmung des Feldes im Inneren einer Kugel *B*, insofern dasselbe von den Teilchen herrührt, deren Mittelpunkte in dem betrachteten Augenblick in dieser Kugel liegen („innere“ Teilchen); der Index 1 soll sich auf diesen Teil des Feldes beziehen. Wir vernachlässigen Grössen mit $\mathfrak{w}^2$ und wählen den Radius *R* der Kugel physikalisch unendlich klein, obgleich von niedrigerer Ordnung als die Dimensionen des in der Definition der Mittelwerte (Nr. 27) vorausgesetzten Raumes *S*. Indem wir demgemäß in den Endformeln die Glieder, welche *R* oder eine Länge von derselben Größenordnung als Faktor enthalten, fortlassen, finden wir für die Zustandsgrößen in allen Punkten des kugelförmigen Raumes dieselben Werte; das Feld darf somit als homogen angesehen werden. Dies näher zu entwickeln würde uns zu weit führen, und es soll auch nicht von allen Vereinfachungen, die wegen unserer die Größe von *R* betreffenden Annahme erlaubt sind, Rechenschaft gegeben werden.

Wollte man von diesen Vereinfachungen zunächst absehen, so hätte man ähnlich wie in Nr. 20 zu verfahren. Dabei dürfte nicht aus dem Auge verloren werden, daß die Grenzfläche des Raumes *B*, wenn sie an der Bewegung mit den Geschwindigkeiten $\mathfrak{w}$ teilnimmt und also fortwährend dieselben polarisierten und magnetisierten Teilchen umschließt, ihre Gestalt allmählich ändert, und daß eine gewisse Zahl von Leitungselektronen diese Grenzfläche überschreitet.

Wir berechnen für ein beliebiges System die Komponenten von $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{B}_1$ und außerdem für einen ruhenden, keine anderen als Polarisationselektronen enthaltenden Körper die Größen $\frac{\partial \mathfrak{E}_{1x}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathfrak{E}_{1x}}{\partial y}$, u. s. w.

Der Koordinatenursprung liege im Mittelpunkte der Kugel und es mögen die rechten Seiten von (VII″) und (VIII″) mit $-\varrho'$ und $-\mathfrak{Q}$ bezeichnet werden. Für jeden inneren Punkt dürfen dann Φ, $\mathfrak{A}_x$, u. s. w. als die zu den Dichten ϱ', $\mathfrak{Q}_x$, u. s. w. gehörenden Po-

tentialfunktionen (Nr. **11** a)) aufgefaßt werden. Nur ist zu beachten, daß jetzt, da wir von allen äußeren Teilchen abstrahieren, $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$ an der Kugelfläche unstetig sind; den Teilen

$$-\operatorname{div}\mathfrak{P},\ \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{P}}_x+\frac{1}{c}\operatorname{rot}_x[\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{w}]+\operatorname{rot}_x\mathfrak{M},\ \text{u. s. w.}$$

in den Werten von ϱ', $\mathfrak{Q}_x$, u. s. w. entsprechen infolgedessen die Flächendichten

$$\mathfrak{P}_n,\ \frac{1}{c}\mathfrak{w}_x\mathfrak{P}_n+\frac{z}{R}\mathfrak{M}_y-\frac{y}{R}\mathfrak{M}_z,\ \text{u. s. w.},$$

die gleichfalls bei der Bestimmung der Potentialfunktionen Φ, $\mathfrak{A}_x$, u. s. w. zu berücksichtigen sind. In dem ersten Ausdruck haben wir $\mathfrak{P}_x$, u. s. w. durch

$$\mathfrak{P}_x+x\frac{\partial\mathfrak{P}_x}{\partial x}+y\frac{\partial\mathfrak{P}_x}{\partial y}+z\frac{\partial\mathfrak{P}_x}{\partial z},\ \text{u. s. w.}$$

zu ersetzen, wenn wir unter $\mathfrak{P}_x$, $\frac{\partial\mathfrak{P}_x}{\partial x}$, $\cdots$ speziell die Werte im Mittelpunkte verstehen wollen. Dagegen braucht der Veränderlichkeit von $\mathfrak{M}_x$, u. s. w. längs der Fläche und von ϱ', $\mathfrak{Q}_x$, u. s. w. im Inneren der Kugel nicht Rechnung getragen zu werden; ebensowenig der Veränderlichkeit von $\mathfrak{w}$. So gelangt man zu folgender Vorschrift für die Bestimmung von $\dot{\mathfrak{A}}_x$, u. s. w. in Gl. (IX''): Man ermittle zunächst für die Zeit t die Werte von $\mathfrak{A}_x$, u. s. w. in einem Punkte (x, y, z), und dann für die Zeit $t+dt$ die Werte, welche die um $dt\cdot\mathfrak{w}$ verschobene Kugel mit der dann bestehenden Polarisation $\mathfrak{P}$ und Magnetisierung $\mathfrak{M}$ an derselben Stelle des Raumes hervorbringt, also in einem Punkte, dessen Koordinaten in Bezug auf den Mittelpunkt $x-\mathfrak{w}_x dt$, u. s. w. sind.

Indem wir nun die in Betracht kommenden Potentialfunktionen entweder durch direkte Integration oder mit Hilfe der Theorie der Kugelfunktionen berechnen, ergibt sich folgendes:

Zu der Raumdichte ϱ' gehört als Potentialfunktion

$$\{\tfrac{1}{2}R^2-\tfrac{1}{6}(x^2+y^2+z^2)\}(\varrho-\operatorname{div}\mathfrak{P}),$$

und ähnliche Ausdrücke ergeben sich für die Potentialfunktionen, welche den Raumdichten $\mathfrak{Q}_x$, u. s. w. entsprechen. Ferner gehört zu der Flächendichte $\mathfrak{P}_n$ die Potentialfunktion

$$\tfrac{1}{3}(x\mathfrak{P}_x+\text{u. s. w.})+\tfrac{1}{5}\left\{x^2\frac{\partial\mathfrak{P}_x}{\partial x}+\text{u. s. w.}+xy\left(\frac{\partial\mathfrak{P}_x}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{P}_y}{\partial x}\right)+\text{u. s. w.}\right\}$$
$$+\tfrac{1}{15}\{5R^2-(x^2+y^2+z^2)\}\operatorname{div}\mathfrak{P},$$

während wir uns, was die Flächendichten $\frac{1}{c}\mathfrak{w}_x\mathfrak{P}_n$ und $\frac{z}{R}\mathfrak{M}_y-\frac{y}{R}\mathfrak{M}_z$

betrifft, auf die Werte $\frac{1}{3c}\mathfrak{w}_x(x\mathfrak{P}_x + y\mathfrak{P}_y + z\mathfrak{P}_z)$ und $\frac{1}{3}(z\mathfrak{M}_y - y\mathfrak{M}_z)$ beschränken dürfen.

Jetzt stellen wir die Werte von Φ, $\mathfrak{A}_x$, u. s. w. zusammen; wir erhalten schließlich

$$\mathfrak{E}_1 = -\frac{1}{3}\mathfrak{P} - \frac{1}{3c}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{M}], \tag{107}$$

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{2}{3}\mathfrak{M} - \frac{1}{3c}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{P}], \tag{108}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_{1x}}{\partial x} = -\frac{1}{5}\operatorname{div}\mathfrak{P} - \frac{2}{5}\frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial x}, \text{ u. s. w.},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_{1x}}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{E}_{1y}}{\partial x} = -\frac{1}{5}\left(\frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{P}_y}{\partial x}\right), \text{ u. s. w.}$$

Wie bereits gesagt, gelten die letzten Formeln nur für ruhende nicht magnetisierte Nichtleiter.

Damit jeder Zweifel an der Richtigkeit dieser Resultate gehoben werde, bemerken wir noch folgendes. Man sieht leicht, daß $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ lineare und homogene Funktionen von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{M}$ und deren Differentialquotienten nach x, y, z, t sein müssen; auch können, weil wir Glieder mit $\mathfrak{w}^2$ vernachlässigen, die Differentialquotienten von $\mathfrak{w}$ nur linear auftreten. Da nun die Ausdrücke neben diesen verschiedenen Größen nur noch den Kugelradius R und die Lichtgeschwindigkeit c enthalten können, und die verschiedenen Teile, aus welchen sich $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ zusammensetzen, unter sich homogen sein müssen, so tritt zugleich mit einem Differentialquotienten nach x, y oder z notwendig ein Faktor R und zugleich mit einem Differentialquotienten nach t ein Faktor R/c auf. Somit dürfen wir, wenn wir die Kugel hinreichend klein wählen, von allen Gliedern mit jenen Differentialquotienten absehen, und uns bei der Berechnung von $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ vorstellen, es seien $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$ unabhängig von x, y, z, t und es verschiebe sich die ganze Kugel mit der konstanten Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$. In diesem Falle empfiehlt es sich, fest mit der Kugel verbundene Koordinatenachsen einzuführen (vgl. Nr. **11** b)). Dann reduzieren sich die linken Seiten von (VII″) und (VIII″) auf $\Delta\Phi$ und $\Delta\mathfrak{A}$. Die rechten Seiten verschwinden für das Innere der Kugel, wenn wir von den Gliedern mit ϱ und $\mathfrak{J}$, deren Einfluß schon hinreichend erledigt wurde, absehen; folglich sind Φ, $\mathfrak{A}_x$, u. s. w. die den oben angegebenen Flächendichten entsprechenden Potentialfunktionen. Daraus erhält man leicht für jeden inneren Punkt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{3}\mathfrak{P}_x,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} = \frac{1}{3c}\mathfrak{w}_x\mathfrak{P}_x, \quad \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y} = \frac{1}{3c}\mathfrak{w}_x\mathfrak{P}_y - \frac{1}{3}\mathfrak{M}_z, \quad \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} = \frac{1}{3c}\mathfrak{w}_x\mathfrak{P}_z + \frac{1}{3}\mathfrak{M}_y,$$

u. s. w.;

man gelangt von da aus zu den Formeln (107) und (108), wenn man berücksichtigt, daß

$$\dot{\mathfrak{A}} = -\left(\mathfrak{w}_x \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x} + \mathfrak{w}_y \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial y} + \mathfrak{w}_z \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial z}\right).$$

Was die Werte von $\frac{\partial \mathfrak{E}_{1x}}{\partial x}$, u. s. w. anbelangt, so kann man sich bei diesen von vornherein auf einen ruhenden nicht magnetisierten Nichtleiter beschränken. Man hat es dann mit einer ruhenden Kugel zu tun, was die gegebene Ableitung einigermaßen vereinfacht.

b) Subtrahiert man die gefundenen Werte von den entsprechenden in Wirklichkeit bestehenden $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}$, u. s. w., so erhält man Ausdrücke für denjenigen Teil des Feldes, der von den Teilchen außerhalb der Kugel herrührt, oder, wie man auch sagen kann, für das Feld im Inneren einer kugelförmigen, nur Äther enthaltenden Höhlung. Wir versehen diese Ausdrücke mit dem Index 2, also:

$$\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E} + \frac{1}{3}\mathfrak{P} + \frac{1}{3c}[\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{M}], \tag{109}$$

$$\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B} - \frac{2}{3}\mathfrak{M} + \frac{1}{3c}[\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{P}] = \mathfrak{H} + \frac{1}{3}\mathfrak{M} + \frac{1}{3c}[\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{P}], \tag{110}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_{2x}}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{1}{5}\operatorname{div}\mathfrak{P} + \frac{2}{5}\frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial x}, \text{ u. s. w.}, \tag{111}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_{2x}}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} + \frac{1}{5}\left(\frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{P}_y}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_{2y}}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} + \frac{1}{5}\left(\frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{P}_y}{\partial x}\right) \text{ u. s. w.} \tag{112}$$

Da die Höhlung nur Äther enthält, so kann man statt $\mathfrak{B}_2$ auch $\mathfrak{H}_2$ schreiben.

c) Interessant ist auch der Fall einer spaltenförmigen Höhlung, bei dessen Besprechung wir uns indes auf nichtleitende Körper beschränken wollen. Wir denken uns die Höhlung als einen physikalisch unendlich kleinen Zylinder, dessen Höhe von höherer Ordnung unendlich klein als die Dimensionen der Grundfläche ist. Um das innere Feld zu bestimmen, kann man wie oben verfahren. Es ist jedoch einfacher, zunächst nachzuweisen, daß das äußere Feld (mit Ausnahme von Punkten in der unmittelbaren Nähe des Zylinderumfanges) nicht geändert wird, wenn man die Materie aus dem Zylinder entfernt, und dann die in Nr. **33** erwähnten Stetigkeitsbedingungen anzuwenden.

Das Resultat ist, daß die nach einer beliebigen der Grundfläche parallelen Richtung genommenen Komponenten von $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$, und ebenso die senkrecht zur Grundfläche gerichteten Komponenten von $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$ in der Höhlung dieselben Werte haben, wie sie an der betrachteten Stelle bestehen würden, wenn man keine Materie entfernt hätte.

36. Die auf die Elektronen und die Teilchen wirkenden Kräfte. In der Elektronentheorie kann man versuchen die Beziehungen zwischen $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$, sowie zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ aus Betrachtungen über den molekularen Bau und die Eigenschaften der Teilchen der Materie abzuleiten, wobei man freilich auf manche Schwierigkeit stößt. Ausgangspunkt bei diesen Bestrebungen ist die Vorstellung, daß der auf ein Leitungselektron wirkende Bewegungsantrieb, sowie das elektrische oder magnetische Moment eines Teilchens bestimmt wird durch das Feld, welches im Inneren des Elektrons oder des Teilchens besteht, und zwar insofern es nicht von dem Zustande des Teilchens selbst abhängt (vgl. jedoch den Schluß von a) unten). Dieses „fremde Feld *in* einem Teilchen“ entsteht aus der Zusammensetzung der Felder, welche die übrigen Elektronen hervorbringen, und deren jedes mit Hilfe der Formeln (XI), (XII), (IX) und (X) bestimmt werden könnte. Hier soll angenommen werden, daß jedes partielle Feld, und also auch das resultierende fremde Feld in einem Teilchen homogen ist, obgleich diese Voraussetzung zu Fehlern führen kann, sobald die Dimensionen der Teilchen nicht sehr klein sind im Vergleich zu den Entfernungen aller, auch der nächstliegenden Teilchen.

Es handelt sich nun um die Werte von $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{h}$, welche das Feld in einem Teilchen charakterisieren und welche $\mathfrak{d}_i$ und $\mathfrak{h}_i$ heißen mögen, oder vielmehr — wenigstens bei vielen Fragen — um die Mittelwerte von $\mathfrak{d}_i$ und $\mathfrak{h}_i$ für sämtliche Teilchen einer bestimmten Art in einem physikalisch unendlich kleinen Raum S. Diese Mittelwerte dürfen nicht ohne weiteres den früher betrachteten $\bar{\mathfrak{d}}$ und $\bar{\mathfrak{h}}$ gleich gesetzt werden, und sollen daher mit $\bar{\bar{\mathfrak{d}}}_i$ und $\bar{\bar{\mathfrak{h}}}_i$ bezeichnet werden. Doppelstriche über den Buchstaben sollen nämlich benutzt werden, wenn es sich um die Mittelwerte von Größen handelt, von welchen nur in vereinzelten Punkten die Rede ist.

Um zu $\bar{\bar{\mathfrak{d}}}_i$ und $\bar{\bar{\mathfrak{h}}}_i$ zu gelangen, gehen wir auf Nr. **35**b) zurück. Das daselbst bestimmte Feld $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{H}_2$ dürfen wir für die ganze Ausdehnung des Kugelraumes B als homogen betrachten. Ist weiter für irgend ein Teilchen dieses Raumes $\mathfrak{d}_{i1}$, $\mathfrak{h}_{i1}$ das Feld, das von allen anderen Teilchen der Kugel hervorgebracht wird, dann ist

$$\mathfrak{d}_i = \mathfrak{E}_2 + \mathfrak{d}_{i1}, \quad \mathfrak{h}_i = \mathfrak{H}_2 + \mathfrak{h}_{i1};$$

folglich mit Rücksicht auf (109) und (110), wenn $\bar{\bar{\mathfrak{d}}}_{i1}$ und $\bar{\bar{\mathfrak{h}}}_{i1}$ die für alle Teilchen des Raumes B berechneten Mittelwerte sind,

$$\bar{\bar{\mathfrak{d}}}_i = \mathfrak{E} + \frac{1}{3}\mathfrak{P} + \frac{1}{3c}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{M}] + \bar{\bar{\mathfrak{d}}}_{i1}, \tag{113}$$

$$\bar{\bar{\mathfrak{h}}}_i = \mathfrak{H} + \frac{1}{3}\mathfrak{M} + \frac{1}{3c}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{P}] + \bar{\bar{\mathfrak{h}}}_{i1}. \tag{114}$$

Oft hängt der Zustand oder die Bewegung eines Teilchens nicht von $\mathfrak{d}_i$, sondern von der elektrischen Kraft

$$\mathfrak{d}_i' = \mathfrak{d}_i + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{h}_i]$$

(vgl. (VI) und (XIX)) ab. Der Mittelwert derselben ist

$$\overline{\overline{\mathfrak{d}}}_i' = \overline{\overline{\mathfrak{d}}}_i + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\cdot\overline{\overline{\mathfrak{h}}}_i],$$

also nach (113) und (114), wenn man Glieder mit $\mathfrak{w}^2$ vernachlässigt,

$$\overline{\overline{\mathfrak{d}}}_i' = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{H}] + \frac{1}{3}\mathfrak{P} + \frac{2}{3c}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{M}] + \overline{\overline{\mathfrak{d}}}_{i1}', \tag{115}$$

wo die Bedeutung des letzten Gliedes ohne weiteres klar ist.

Wir betrachten jetzt einige spezielle Fälle. a) Der Körper enthalte bloß verschiedene Gruppen von Leitungselektronen (Nr. 29). Die Teilchen, welche zu einer dieser Gruppen gehören, haben erstens die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ der Materie, zweitens eine gemeinsame Geschwindigkeit $\mathfrak{u}_1$, vermöge welcher sie einen Anteil zu dem Leitungsstrom liefern, und drittens eine unregelmäßige Wärmebewegung, deren Geschwindigkeiten $\mathfrak{u}_2$ seien. Man sieht leicht, daß bei Vernachlässigung von Gliedern, welche in Bezug auf diese Geschwindigkeiten zweiter Ordnung sind, die nach allen Seiten gleichmäßig gerichteten Geschwindigkeiten $\mathfrak{u}_2$ in die Mittelwerte der auf die Elektronen wirkenden Kräfte nicht eingehen können; für eine bestimmte Gruppe von Elektronen ist also der Mittelwert der auf dieselben wirkenden elektrischen Kraft nach (VI)

$$\overline{\overline{\mathfrak{d}}}_i + \frac{1}{c}[\{\mathfrak{w} + \mathfrak{u}_1\}\cdot\overline{\overline{\mathfrak{h}}}_i].$$

Was nun den Teil dieser Kraft betrifft, der von den inneren Wirkungen in der Kugel B (Nr. **35**) herrührt, so erinnern wir erstens daran, daß (vgl. Nr. **21** a)) für eine Gruppe von Teilchen, die sich mit einer gemeinschaftlichen konstanten Geschwindigkeit bewegen, das eigene Feld keine resultierende Kraft hervorbringt; der in Nr. **21** a) gezogene Schluß gilt nämlich nicht nur für ein einziges Elektron, sondern für jedes sich verschiebende System. Zweitens bemerken wir, daß zwar die Wirkungen zwischen verschiedenartigen Elektronen einen von Null verschiedenen Beitrag zu dem Mittelwerte der Kräfte für eine bestimmte Gruppe liefern können, weil die verschiedenen Gruppen ungleiche Strömungsgeschwindigkeiten $\mathfrak{u}_1$ haben, daß man aber diese Wirkung, die von dem Durcheinanderströmen der ungleichartigen Elektronen herrührt, zu dem später zu betrachtenden Widerstand rechnen kann. Hier sehen wir von derselben ab. Da weiter nach unserer Voraussetzung an der betrachteten Stelle weder eine elek-

trische Polarisation noch eine Magnetisierung besteht, so darf man als Mittelwert der auf Leitungselektronen einer bestimmten Art wirkenden elektrischen Kraft nach (109) und (110) den Ausdruck

$$\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{H}] + \frac{1}{c}[\mathfrak{u}_1 \cdot \mathfrak{H}] \tag{116}$$

einführen.

Während der von $\mathfrak{w}$ abhängige Teil dieser elektrischen Kraft die Induktionsströme bedingt, die bei Bewegung eines Leiters in einem magnetischen Felde entstehen (vgl. Nr. **42**), führt der letzte Teil zu einer Erklärung der auf einen stromführenden Leiter von einem äußeren magnetischen Felde ausgeübten ponderomotorischen Kraft. Summiert man nämlich jenes Glied über sämtliche in dem Leiter vorhandenen Elektronen (Nr. **29**), dann erhält man für die pro Volumeneinheit wirkende Kraft

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{c}[\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{H}].$$

Andererseits hat man in der Ungleichheit der Werte, welche das letzte Glied in (116) für die verschiedenen Arten von Elektronen annimmt, die Ursache des *Hall*-Effektes zu erblicken.

Zu der Formel (116) möge übrigens bemerkt werden, daß bei ihrer Ableitung nur von den Kräften die Rede war, welche die Elektronen, jedes infolge des in demselben bestehenden „fremden" Feldes erleiden. In Fällen veränderlicher Bewegung kommt noch die der Beschleunigung proportionale Wirkung des eigenen Feldes (Nr. **21** b)) hinzu. Dieselbe ist jedoch in allen genauer untersuchten speziellen Fällen so gering, daß wir von dieser Komplikation absehen dürfen.

b) Es seien keine anderen als elektrisch polarisierte Teilchen vorhanden; jedem derselben als Ganzem schreiben wir nur die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ des betrachteten Volumenelementes zu. Da wir annehmen dürfen, daß in der Zeit, die zum Durchlaufen der Kugel S mit Lichtgeschwindigkeit erforderlich ist, die elektrischen Momente sich nicht merklich ändern, so darf man bei der Berechnung der Wirkung, die *ein* Teilchen auf ein benachbartes ausübt, die Gleichung (54) ersetzen durch

$$\mathfrak{d}' = -\operatorname{grad} \varphi, \tag{117}$$

wo φ den Wert (51) hat. Lägen nun die Teilchen in den Punkten eines kubischen Raumnetzes, dann hätten alle in S vorhandenen Teilchen gleiche Momente, und man hätte, wie aus (117) und (51) folgt,

$$\overline{\overline{\mathfrak{d}'_{i1}}} = 0. \tag{118}$$

Für andere isotrope Anordnungen ist zu setzen

$$\overline{\overline{\mathfrak{d}'_{i1}}} = s\mathfrak{P}, \tag{119}$$

wo s eine durch die Natur und die Dichte des Körpers bestimmte, von der Bewegung aber unabhängige Konstante ist; desgleichen für beliebige anisotrope Anordnung (vgl. wegen der Bezeichnung der linearen Vektorfunktion V 13, Nr. **3**)

$$\overline{\overline{\mathfrak{d}}}_{i1} = (s)\mathfrak{P}. \tag{120}$$

c) Wenn der Raum nur magnetisierte Teilchen enthält, so kommt es auf den Wert von $\overline{\overline{\mathfrak{h}}}_{i1}$ an; es liegt ja nahe sich vorzustellen, daß das magnetische Moment eines Teilchens von dem magnetischen Felde, in dem es liegt, abhängt. Es dürfen jetzt die Gleichungen (59) und (60) angewandt werden, aus welchen man ähnliche Folgerungen zieht, wie soeben aus (117) und (51). Also ist bei kubischer Anordnung der magnetisierten Teilchen

$$\overline{\overline{\mathfrak{h}}}_{i1} = 0,$$

für einen beliebigen isotropen Körper

$$\overline{\overline{\mathfrak{h}}}_{i1} = g\mathfrak{M}, \tag{121}$$

und für einen anisotropen

$$\overline{\overline{\mathfrak{h}}}_{i1} = (g)\mathfrak{M}. \tag{122}$$

37. Leitfähigkeit. In einem ruhenden homogenen und isotropen Körper, in dem sich ev. mehrere Arten von Leitungselektronen (Nr. **29**), aber weder Polarisations- noch Magnetisierungselektronen befinden, habe der Vektor $\mathfrak{E}$ an allen Stellen dieselbe Größe und Richtung. Man fasse die Elektronen der ersten Art, die sich zu einer bestimmten Zeit in einem Raume S befinden, ins Auge. Vernachlässigt man das letzte Glied in dem Ausdrucke (116), so erhält man für die gesamte auf diese Elektronen wirkende Kraft

$$NeS\mathfrak{E}.$$

Dieselbe muß, wenn der Zustand stationär sein soll, von einem „Widerstande" aufgehoben werden. Wir sehen von der Wechselwirkung der Elektronen verschiedener Arten (Nr. **36** a)) ab, und nehmen also an, daß die Widerstandskraft nur von den ungeladenen Teilchen des Körpers herrühre. Es liegt nahe, dieselbe der Strömungsgeschwindigkeit $\mathfrak{u}_1$ proportional, und dieser entgegengesetzt gerichtet, vorauszusetzen, sie also mit

$$-NkS\mathfrak{u}_1 \tag{123}$$

zu bezeichnen.

Daraus ergibt sich

$$k\mathfrak{u}_1 = e\mathfrak{E},$$

und, wenn man die übrigen Elektronenarten in gleicher Weise be-

handelt, zufolge der Gleichung (XXIVa), in der jetzt $\mathfrak{u}, \mathfrak{u}', \mathfrak{u}'', \ldots$ durch $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_1', \mathfrak{u}_1'', \ldots$ zu ersetzen sind (vgl. Nr. **36** a)),

$$\text{(XXXIII)} \qquad \mathfrak{J} = \sigma \mathfrak{E},$$

wo die Leitfähigkeit σ den Wert hat

$$(124) \qquad \sigma = \frac{Ne^2}{k} + \frac{N'e'^2}{k'} + \frac{N''e''^2}{k''} + \text{u. s. w.}$$

Ähnliche Betrachtungen könnten für anisotrope Körper zu der Gleichung

$$\text{(XXXIII')} \qquad \mathfrak{J} = (\sigma)\mathfrak{E}$$

führen. Von einer Korrektion, die man streng genommen an obigen Formeln anbringen müßte, sobald der Strom variabel ist, und die darin besteht, daß man für eine bestimmte Gruppe von Elektronen, Bewegungsantrieb und Widerstand nicht als gleich betrachtet, sondern die Differenz dieser Kräfte dem Produkte von Masse und Beschleunigung gleichsetzt, dürfen wir in allen beobachteten Fällen absehen.

Von dem Ausdrucke (124) für die Leitfähigkeit kann man sich mittels molekulartheoretischer Betrachtungen Rechenschaft geben. Zu diesem Zwecke kann man von der Vorstellung ausgehen, daß die Elektronen an der Wärmebewegung der Materie teilnehmen, und dabei durch rasch aufeinanderfolgende „Zusammenstöße“ mit ungeladenen Teilchen jedesmal eine andere Bewegungsrichtung erhalten. Die in dem Intervall zwischen zwei Stößen a und b durch die Kraft $\mathfrak{E}$ einem Elektron mitgeteilte Geschwindigkeit geht bei dem Stoß b ganz oder zum Teil wieder verloren, und es muß daher die mittlere Geschwindigkeit $\mathfrak{u}_1$ (Nr. **36** a), welche die Elektronen einer bestimmten Art durch die Wirkung der Kraft $\mathfrak{E}$ annehmen, von dem mittleren Zeitintervall zwischen zwei Stößen, also von der „Molekulargeschwindigkeit“ $\mathfrak{u}_2$ der Elektronen und von der mittleren Länge ihres freien Weges abhängen. Diese Größen bestimmen also die Werte der Koeffizienten k, k', k'', u. s. w.

Elektromotorische Kräfte kann man in der Weise in Rechnung bringen, daß man in (XXXIII) und (XXXIII′) $\mathfrak{E}$ durch $\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^{el}$ ersetzt. Die Elektronentheorie kann hierbei jedoch nicht stehen bleiben; es liegt ihr ob, durch nähere Betrachtung der stromerregenden Vorgänge von dem Gliede $\mathfrak{E}^{el}$ Rechenschaft zu geben.

38. Elektrizitätsbewegung in Elektrolyten. Man stellt sich vor, daß in den Elektrolyten die Elektronen mit chemischen Atomen oder Atomgruppen zu „Ionen“ vereinigt sind, deren es in einem einfachen Elektrolyten zwei Arten gibt. Diese, die positiven und die negativen Ionen, sind zum Teil miteinander zu Molekülen verbunden, zum Teil

frei, und zwar schreitet bei wachsender Verdünnung der Lösung eines Elektrolyts die Dissoziation immer weiter fort, so daß bei sehr großer Verdünnung sämtliche Ionen als frei betrachtet werden dürfen[59]). Von diesen freien Ionen, mit welchen allein man bei vielen Fragen zu rechnen hat, gilt alles, was oben von den Leitungselektronen gesagt wurde, so daß die Leitfähigkeit auch hier durch (124) bestimmt wird.

Von der Annahme ausgehend, daß die kinetische Energie der Wärmebewegung im Mittel für ein Ion ebenso groß sei, wie für das Molekül eines Gases bei derselben Temperatur, haben namentlich *Nernst*[60]) und *Planck*[61]) eine weitgehende Theorie der bei Elektrolyten beobachteten Erscheinungen entwickelt. Bei vielen dieser Erscheinungen ändern sich die Konzentrationen der Ionen von Punkt zu Punkt. Man kann, wenn das der Fall ist, seine Aufmerksamkeit richten auf die Bewegungsgröße der Ionen der einen oder anderen Art, die zu einer bestimmten Zeit in irgend einem Raume liegen, und speziell auf die Ursachen, wodurch sich diese Bewegungsgröße im Laufe der Zeit ändern kann. Es kommt dann, neben den elektrischen Kräften und den Widerständen, die Bewegungsgröße in Betracht, welche den Raum verläßt oder in denselben hineintritt, d. h. die Bewegungsgröße derjenigen Ionen, welche die Grenzfläche des Raumes nach der einen oder der anderen Seite hin durchsetzen. Hierbei findet folgender Satz aus der kinetischen Molekulartheorie Anwendung:

Wenn sich eine große Anzahl von Teilchen irgend welcher Art in ungeordneter, gleichmäßig nach allen Seiten gerichteter Bewegung (Wärmebewegung) befinden, dann ist die nach der Normale n zerlegte Bewegungsgröße, welche ein physikalisches Flächenelement $d\sigma$ in der Zeiteinheit mehr in positiver als in negativer Richtung durchsetzt („osmotischer Druck"), $\frac{2}{3}K d\sigma$, wo K die kinetische Energie der Teilchen pro Volumeneinheit bedeutet.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man Rechenschaft geben von dem Zusammenhange zwischen Leitfähigkeit und Diffusionsgeschwindigkeit, von den Potentialdifferenzen zwischen ungleich konzentrierten Schichten einer und derselben Lösung oder zwischen verschiedenen Lösungen und sogar, unter Einführung einer Auffassung, auf die hier nicht näher

59) *Sv. Arrhenius*, Über die Dissoziation der in Wasser gelösten Stoffe, Zeitschr. f. phys. Chemie 1 (1887), p. 631.

60) *W. Nernst,* Zur Kinetik der in Lösung befindlichen Körper, Zeitschr. f. phys. Chemie 2 (1888), p. 613; Die elektromotorische Wirksamkeit der Ionen, ibid. 4 (1889), p. 129.

61) *M. Planck,* Über die Erregung von Elektrizität und Wärme in Elektrolyten, Ann. Phys. Chem. 39 (1890), p. 161; Über die Potentialdifferenz zwischen zwei verdünnten Lösungen binärer Elektrolyte, ibid. 40 (1890), p. 561.

eingegangen werden kann, von der Potentialdifferenz zwischen einem Elektrolyt und gewissen festen Elektroden.

39. Gasionen. Analogie mit diesen Erklärungen hat die theoretische Behandlung des Leitungsvermögens, welches gasförmige Körper zeigen, wenn sie von Kathodenstrahlen, *Röntgen*strahlen, oder *Becquerel*strahlen getroffen werden. Man nimmt an, daß unter der Wirkung dieser Einflüsse freie Ionen durch Dissoziation von Molekülen oder Atomen entstehen. Charakteristisch für diese Fälle ist, daß man auf die beschränkte, von der Intensität der wirksamen Strahlung abhängige Bildungsgeschwindigkeit der freien Ionen Rücksicht zu nehmen hat[62]).

40. Elektrizitätsbewegung in Metallen. Die neuere Theorie der in den Metallen auftretenden Erscheinungen schließt sich der Theorie der Elektrolyte aufs engste an. Auch hier gibt es Fälle, wo für eine bestimmte Art von Elektronen die kinetische Energie pro Volumeneinheit nicht an allen Stellen denselben Wert hat, und wo also die in einem bestimmten Raum enthaltene, diesen Teilchen zukommende Bewegungsgröße sich infolge des Hinein- und Hinausfliegens von Elektronen ändert. *Riecke*[63]), *Drude*[64]) und *J. J. Thomson*[65]) verdankt man ausführliche Betrachtungen über die Elektronenbewegungen in Metallen, welche zum Teil auf der Voraussetzung beruhen, daß auch die mittlere kinetische Energie eines Elektrons denselben Wert hat, wie die eines Gasmoleküls bei derselben Temperatur[66]). Die ge-

---

62) Aus der umfangreichen Literatur erwähne ich nur *J. J. Thomson,* On the theory of the conduction of electricity through gases by charged ions, Phil. Mag. (5) 47 (1899), p. 253, sowie die zusammenfassenden Darstellungen in *J. J. Thomson,* Conduction of electricity through gases, Cambridge 1903; *J. Stark,* Die Elektrizität in Gasen, Leipzig 1902 und *P. Langevin,* Recherches sur les gaz ionisés, Thèse, Paris 1902.

63) *Riecke*, Zur Theorie des Galvanismus und der Wärme, Ann. Phys. Chem. 66 (1898), p. 353, 545 u. 1199; Über das Verhältnis der Leitfähigkeiten der Metalle für Wärme und für Elektrizität, Ann. Phys. 2 (1900), p. 835.

64) *P. Drude,* Zur Elektronentheorie der Metalle, Ann. Phys. 1 (1900), p. 566; 3 (1900), p. 369.

65) *J. J. Thomson*, Indications relatives à la constitution de la matière fournies par les recherches récentes sur le passage de l'électricité à travers les gaz, Rapports du Congrès de physique de 1900, Paris, 3, p. 138.

66) Infolge der Geschwindigkeitsänderungen bei den Zusammenstößen mit Atomen strahlen die Elektronen eine gewisse Energiemenge aus (Nr. **18**). Hiervon ausgehend, habe ich die Strahlung der Metalle, speziell was die langen Wellen des Spektrums betrifft, behandelt und gezeigt, daß man aus den Beobachtungsdaten die mittlere kinetische Energie eines Elektrons, und also auch die eines Gasmoleküls, dem absoluten Werte nach ableiten kann. Das Resultat stimmt

nannten Physiker erklären die Wärmeleitung der Metalle aus der Wärmebewegung der Elektronen und zeigen, daß, wie die Wahrnehmung es lehrt, die besten Wärmeleiter auch die besten Elektrizitätsleiter sein müssen. Auch die Potentialsprünge an der Grenze zweier Metalle, die thermo-elektrischen Ströme, der *Peltier*- und der *Thomson*-Effekt, wurden in den Kreis der Betrachtungen gezogen[67]).

41. Halleffekt und verwandte Erscheinungen. Bis jetzt war von dem Teil $\frac{1}{c}[\mathfrak{u}_1 \cdot \mathfrak{H}]$ der elektrischen Kraft (116) nicht die Rede. Der Einfluß dieses Teils macht sich in starken magnetischen Feldern dadurch bemerklich, daß eine senkrecht zu den Kraftlinien gestellte Metallplatte, die in der einen Richtung von einem elektrischen Strom oder einem Wärmestrom durchlaufen wird, in einer dazu senkrechten Richtung eine Potentialdifferenz und auch eine Temperaturdifferenz zeigt. Die Theorie dieser Erscheinungen folgt dem in der vorhergehenden Nummer angedeuteten Wege und hat immer wieder auf die verschiedenen Arten von Elektronen Rücksicht zu nehmen[68]).

Es bleibt auf diesem Gebiete noch viel zu tun übrig. Z. B. tritt die Frage in den Vordergrund, was geschehen wird, wenn zwei Elektronen mit entgegengesetzten Ladungen sich vereinigen, und in welcher Weise ein stationärer Zustand sich einstellt, wenn, wie es mitunter angenommen werden muß, ein die Berührungsstelle zweier Stäbe aus verschiedenen Metallen A und B durchfließender Strom sowohl die positiven wie auch die negativen freien Elektronen in größerer Zahl nach dieser Stelle hin als von derselben hinwegführt, oder umgekehrt.

Die beim Wismut beobachtete Änderung der Leitfähigkeit in einem magnetischen Felde hat man aus dem Einfluß des Feldes auf die Bahnen der Elektronen abzuleiten versucht[69]).

---

mit den Schlüssen überein, zu welchen *Planck* auf ganz anderem Wege gekommen ist. Siehe *Lorentz,* Het emissie- en het absorptievermogen der metalen, in het geval van groote golflengten, Amsterdam Zittingsverslag Akad. v. Wet. 11 (1903), p. 787 (Amsterdam Proceedings 1902—1903, p. 666); *Planck,* Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspektrum, Ann. Phys. 4 (1901), p. 553; Über die Elementarquanta der Materie und der Elektrizität, ibid., p. 564.

67) Vgl. hierzu Art. *Diesselhorst* V 18.

68) *C. H. Wind,* Etude théorique des phénomènes magnéto-optiques et du phénomène de *Hall,* Arch. néerl. (2) 1 (1898), p. 119; *Riecke,* l. c. (Anm. 63); *Drude,* l. c. (Anm. 64); *E. van Everdingen,* Quelques remarques sur l'application de la théorie des électrons à l'augmentation de la résistance électrique dans un champ magnétique et au phénomène de *Hall,* Arch. néerl. (2) 6 (1901), p. 294.

69) *J. J. Thomson,* l. c. (Anm. 65), p. 143; *E. van Everdingen,* Über eine Erklärung der Widerstandszunahme im Magnetfelde und verwandter Erscheinungen in Wismuth, Arch. néerl. (2) 5 (1900), p. 453; l. c. (Anm. 68).

42. Induktion in bewegten Leitern. Die Erscheinungen in einem bewegten, nicht-magnetisierbaren Leiter hängen nach (116) in derselben Weise von dem Vektor $\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{H}]$, oder, da hier $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}$ ist, von dem Vektor $\mathfrak{E}'$ (Nr. **33**) ab, wie die Vorgänge in dem ruhenden Körper von dem Vektor $\mathfrak{E}$, sodaß allgemein

$$\text{(XXXIII}'') \qquad \mathfrak{J} = (\sigma)\mathfrak{E}'$$

zu setzen ist.

Es sei s eine geschlossene Linie, in deren Punkten $\mathfrak{M} = 0$ ist, womit jedoch nicht ausgeschlossen sein soll, daß in anderen Teilen einer von ihr begrenzten Fläche σ eine Magnetisierung vorhanden sein kann. Für das Linienintegral der in den Punkten von s wirksamen elektrischen Kraft ergibt sich aus (IV$''$a), wenn man s als substantielle Linie und σ als substantielle Fläche betrachtet (vgl. V 13, Nr. **4** h)),

$$\text{(125)} \qquad \int \mathfrak{E}'_s \, ds = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \mathfrak{B}_n \, d\sigma.$$

In diesem Resultat, welches in Übereinstimmung ist mit einer der Hauptgleichungen der *Hertz*'schen Theorie, liegt die Erklärung der bei Änderung des magnetischen Feldes und bei Bewegung der Leiter stattfindenden Induktionswirkungen. Von hieraus gelangt man leicht zu dem bekannten Zusammenhange zwischen diesen Wirkungen und den elektromagnetischen bezw. elektrodynamischen Kräften (Nr. **36** a)).

43. Polarisierte Dielektrika. a) Enthält ein ponderables Teilchen, dessen Ladung im Gleichgewichtszustande so verteilt ist, daß kein elektrisches Moment besteht, ein einzelnes aus seiner Gleichgewichtslage verschiebbares Elektron e, und wird dieses nach einer Verrückung $\mathfrak{q}$ durch eine elastische Kraft $-a\mathfrak{q}$ nach der Gleichgewichtslage hin zurückgetrieben, so wird eine konstante elektrische Kraft $\mathfrak{f}$ eine Verschiebung

$$\text{(126)} \qquad \mathfrak{q} = \frac{e}{a}\mathfrak{f}$$

und ein Moment

$$\mathfrak{p} = \frac{e^2}{a}\mathfrak{f}$$

hervorbringen. Diese Formeln bleiben anwendbar im Falle einer variabelen Kraft, so lange die Veränderung so langsam erfolgt, daß während einer Periode der Schwingungen, deren das Elektron vermöge der elastischen Kraft fähig ist, $\mathfrak{f}$ als konstant gelten kann (vgl. Nr. **57**).

Auch bei komplizierterem, jedoch isotropem Bau eines Teilchens kann man von der Beziehung

(127) $$\mathfrak{p} = p\mathfrak{f}$$

mit einem konstanten Koeffizienten p ausgehen.

b) Wenn in einem isotropen Nichtleiter sehr viele gleiche, jedes für sich isotrop gebaute Teilchen vorhanden sind, dann ist nach (127), wenn N die Anzahl pro Volumeneinheit ist, (mit der in Nr. **36** erklärten Bezeichnungsweise)

$$\mathfrak{P} = Np\overline{\overline{\mathfrak{f}}}.$$

Hier ist nun, falls der Körper ruht, auf Grund von (113) und (119) zu setzen

$$\overline{\overline{\mathfrak{f}}} = \mathfrak{E} + (\tfrac{1}{3} + s)\mathfrak{P}.$$

Man erhält demnach

(XXXIV) $$\mathfrak{P} = \eta\mathfrak{E},$$

wo

$$\eta = \frac{Np}{1 - Np(\frac{1}{3} + s)},$$

und mit Rücksicht auf (XXV) und (XXXI)

(XXXV) $$\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E},$$

in welcher Formel die „Dielektrizitätskonstante“ ε den Wert[70])

(128) $$\varepsilon = 1 + \eta = \frac{1 + Np(\frac{2}{3} - s)}{1 - Np(\frac{1}{3} + s)}$$

hat.

c) Man sieht leicht, daß eine Gleichung wie (XXXV) auch dann noch gilt, wenn zwar die einzelnen Teilchen nicht isotrop sind, dem Körper im ganzen aber, wegen der ungeordneten Orientierung der Teilchen, diese Eigenschaft zukommt. Nur kann man dann die Bedeutung von ε nicht in so einfacher Weise angeben.

d) Wir denken uns schließlich ein Teilchen von beliebiger Struktur, in welchem durch unendlich kleine Verrückungen seiner Punkte elastische Kräfte geweckt werden; trägt ein solches elektrische Ladungen in irgend welcher Anordnung, so wird ein elektrisches Feld (das wir hier als homogen und unveränderlich voraussetzen) eine Deformation verursachen, der zufolge das Teilchen ein elektrisches Moment erhält.

Wir bezeichnen mit h allgemeine, die Konfiguration des Teilchens bestimmende Koordinaten, die wir so wählen, daß sie in der Gleichgewichtslage alle Null sind, und daß für jede andere Lage die den elastischen Kräften entsprechende potentielle Energie in der Form

$$u = \tfrac{1}{2}\sum a h^2$$

dargestellt werden kann. Für das elektrische Moment lässt sich dann schreiben

70) *Lorentz*, La théorie électromagnétique etc., § 107.

$$\mathfrak{p} = \sum h\mathfrak{k},$$

wo zu jeder Koordinate h ein bestimmter konstanter Vektor $\mathfrak{k}$ gehört.

Die Gleichgewichtsbedingung besteht darin, daß für jede unendlich kleine Variation der Koordinaten h die Arbeit der elektrischen Kraft $\mathfrak{f}$ der Zunahme δu gleich ist. Bezeichnet man nun mit $\delta\mathfrak{r}$ (vgl. Nr. **13**) die unendlich kleine Verrückung der Ladung $\varrho\, dS$, so erhält man für jene Arbeit $\int \varrho(\mathfrak{f}\cdot\delta\mathfrak{r})dS$ oder (vgl. (XXI)) $(\mathfrak{f}\cdot\delta\mathfrak{p})$. Man erhält also für jedes h

$$ah = (\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{k})$$

und

$$\mathfrak{p} = \sum \frac{1}{a}(\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{k})\mathfrak{k},$$

oder

$$\mathfrak{p} = (p)\mathfrak{f}, \tag{129}$$

wo

$$p_{11} = \sum \frac{1}{a}\mathfrak{k}_x^2, \quad p_{12} = \sum \frac{1}{a}\mathfrak{k}_x\mathfrak{k}_y, \text{ u. s. w.} \tag{130}$$

ist. Für die potentielle Energie findet man leicht den Wert

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{f}), \tag{131}$$

wobei noch zu bemerken ist, daß die oben als „elastisch" bezeichneten Kräfte zum Teil elektrischen Ursprungs sein können, und daß in diesem Falle in (131) eine gewisse elektrische Energie steckt.

Besteht nun ein Körper aus regelmäßig gelagerten Teilchen der betrachteten Art — wie man das für Krystalle anzunehmen hat —, dann gelangt man unter Berücksichtigung ihrer Wechselwirkungen zu den allgemeinen Formeln

$$\mathfrak{P} = (\eta)\mathfrak{E}, \tag{XXXIV'}$$

$$\mathfrak{D} = (\varepsilon)\mathfrak{E}. \tag{XXXV'}$$

Nach (130) ist $p_{12} = p_{21}$, u. s. w. und es läßt sich nachweisen, daß die entsprechenden Beziehungen auch zwischen den Koeffizienten bestehen, die durch die Symbole (η) und (ε) zusammengefaßt werden (vgl. Nr. **50** und **51**).

44. Statische Zustände in einem ruhenden System von Leitern und isotropen Nichtleitern. a) Die Gleichung (IV'') oder (IX'') zeigt, daß die elektrische Kraft $\mathfrak{E}$ in diesem Falle von einem Potential Φ abhängt; dieses muß in allen Punkten eines Leiters konstant sein, da sonst der Leitungsstrom $\mathfrak{J}$ (XXXIII) nicht verschwinden könnte. In den Nichtleitern ist $\varrho = 0$, also nach (I'') und (XXXV)

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} \Phi) = 0.$$

Nachdem man Φ aus diesen Bedingungen abgeleitet hat, dient zur Bestimmung der Dichte der Ladung an der Oberfläche eines Konduktors die aus (I″) hervorgehende Gleichung

$$\omega = \mathfrak{D}_n, \tag{132}$$

oder

$$\omega = -\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n}.$$

Diese Ergebnisse stimmen mit denen der *Hertz*'schen Theorie überein.

b) Eine in einem Leiter wirkende elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}^{el}$ läßt sich in der Weise in Rechnung ziehen, daß man für diesen Körper

$$\operatorname{grad} \Phi + \mathfrak{E}^{el} = 0$$

setzt, während die übrigen Bedingungen für das Potential ungeändert bleiben. Gleichgewicht ist jetzt offenbar nur bei wirbelfreier Verteilung von $\mathfrak{E}^{el}$ möglich.

c) Stehen dagegen die Elektronen des Dielektrikums unter dem Einfluß einer der Ladung proportionalen äußeren Kraft, die für die Einheit der Ladung $\mathfrak{E}^{ev}$ ist, so hat man statt (XXXIV)

$$\mathfrak{P} = \eta(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^{ev}), \tag{XXXIV″}$$

und statt (XXXV), wie aus (XXV) und (XXXI) hervorgeht,

$$\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E} + \eta\mathfrak{E}^{ev} = \varepsilon\mathfrak{E} + (\varepsilon - 1)\mathfrak{E}^{ev}.$$

Das Potential, von dem $\mathfrak{E}$ abhängt, ist jetzt wieder in jedem Konduktor konstant, genügt aber in dem Dielektrikum der Bedingung

$$\operatorname{div}\{-\varepsilon \operatorname{grad} \Phi + (\varepsilon - 1)\mathfrak{E}^{ev}\} = 0.$$

Zur Bestimmung von ω dient schließlich die Formel (132).

d) Ein einfaches Beispiel hiefür liefert ein aus zwei parallelen Platten bestehender, durch einen Leitungsdraht geschlossener Kondensator, auf dessen Dielektrikum eine an allen Stellen gleiche Kraft $\mathfrak{E}^{ev}$ senkrecht zu den Platten wirkt. Es ist dann $\Phi = 0$, $\mathfrak{D} = (\varepsilon - 1)\mathfrak{E}^{ev}$, mithin für die eine Platte

$$\omega = +(\varepsilon - 1)|\mathfrak{E}^{ev}|,$$

und für die andere

$$\omega = -(\varepsilon - 1)|\mathfrak{E}^{ev}|.$$

45. Induktion in einem bewegten Dielektrikum. Wenn der Körper nicht magnetisiert ist, kommt nach (115) neben der Kraft, von der schon in Nr. 43 die Rede war, noch eine auf die Elektronen wirkende Kraft

$$\mathfrak{E}^b = \frac{1}{c}[\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{H}]$$

(vgl. Nr. **33**, Gl. (106)) in Betracht. Für die unter ihrem Einfluß stattfindenden Erscheinungen gelten die Formeln der vorhergehenden Nummer, wenn man $\mathfrak{E}^{ev}$ durch $\mathfrak{E}^{b}$ ersetzt.

Allgemein ist für ein unmagnetisiertes Dielektrikum

$$\text{(XXXIV}''') \qquad \mathfrak{P} = (\eta)\mathfrak{E}'.$$

Wir beschränken uns auf die Anordnung des *Blondlot*'schen Versuches (V 13, Nr. **20**). Hier steht $\mathfrak{E}^{b}$ senkrecht auf den Kondensatorplatten, und ist (vgl. wegen der Vorzeichen die angeführte Stelle)

$$|\mathfrak{E}^{b}| = \pm \frac{1}{c} |\mathfrak{H}| \, |\mathfrak{w}|,$$

sodaß man für die Dichten der elektrischen Ladungen die Werte

$$\pm \frac{\varepsilon - 1}{c} |\mathfrak{H}| \, |\mathfrak{w}| \text{ und } \mp \frac{\varepsilon - 1}{c} |\mathfrak{H}| \, |\mathfrak{w}|$$

erhält. Diese sind kleiner, als die aus der *Hertz*'schen Theorie abgeleiteten Werte. Ebenso ergibt sich die Stärke des Stromes, der, während die Ladungen entstehen, in dem Verbindungsdraht fließt, wenn man die nach der *Hertz*'schen Theorie berechnete Stärke mit $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$ multipliziert. Für Luft ist ε nur wenig von 1 verschieden; es ist also, wie *Blondlot* hervorhebt, das negative Resultat seines Versuchs mit der jetzt entwickelten Theórie in Übereinstimmung.

46. Deformation eines Dielektrikums. Im Anschluß an die in Nr. **36** und **43** mitgeteilten Betrachtungen wollen wir auch den Einfluß unendlich kleiner, von Punkt zu Punkt veränderlicher Verrückungen auf die Eigenschaften eines Nichtleiters untersuchen. Dabei beschränken wir uns auf einen ruhenden Körper, der aus gleichen Teilchen besteht, die ursprünglich gleichgerichtet und in einem (anisotropen) parallelepipedischen Netze angeordnet sind; es gewährt dies den Vorteil, daß benachbarte Teilchen gleiche Momente haben und daß die früher durch Doppelstriche bezeichneten Mittelwerte mit den individuellen Werten zusammenfallen. Außerdem soll angenommen werden, daß jedes Teilchen seine Eigenschaften und, wenn es anisotrop ist, auch seine Richtung behält.

Wir stellen nun zunächst die Frage: welche Änderung muß die elektrische Kraft $\mathfrak{E}$ erleiden, damit trotz der Deformation das Moment $\mathfrak{p}$ jedes Teilchens ungeändert bleibe? Offenbar ist hierzu erforderlich, daß $\mathfrak{d}_i$ (Nr. **36**) sich nicht ändere. Da nun nach unserer Voraussetzung $\delta \mathfrak{P} = -\operatorname{div} \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{P}$, so erhalten wir aus (113)

$$(133) \qquad \delta \mathfrak{E} = \tfrac{1}{3} \operatorname{div} \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{P} - \delta \mathfrak{d}_{i1}\,.$$

Um weiter für ein bestimmtes Teilchen A das ursprüngliche und das

neue $\mathfrak{d}_{i1}$ zu berechnen, denken wir uns sowohl um die Anfangs- wie auch um die Endlage die in Nr. **35** betrachtete Kugel gelegt, und zwar in beiden Fällen mit demselben Radius. Es lassen sich dann zwei Ursachen unterscheiden, die an der Variation von $\mathfrak{d}_{i1}$ beteiligt sind. Erstens kommen die ursprünglich in der Kugel liegenden Teilchen in andere Lagen gegen A. Zweitens treten bei der Deformation neue Teilchen in den Kugelraum, während andere diesen verlassen. Die entsprechenden Änderungen von $\mathfrak{d}_{i1}$ mögen $\delta_1 \mathfrak{d}_{i1}$ und $\delta_2 \mathfrak{d}_{i1}$ heißen.

Der Wert der zweiten Änderung ergibt sich aus der Bemerkung, daß die relativen Koordinaten in Bezug auf A für ein ursprünglich auf der Kugelfläche liegendes Teilchen die Änderungen

$$R\left\{\cos(n,x)\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial x} + \cos(n,y)\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial y} + \cos(n,z)\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial z}\right\}, \text{ u. s. w.}$$

erleiden, und daß also die Teilchen, welche die Kugelfläche durchsetzt haben, in einer Schicht von der Dicke

$$\nu = R\left\{\cos^2(n,x)\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial x} + \text{u.s.w.} + \cos(n,y)\cos(n,y)\left(\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{q}_y}{\partial x}\right) + \text{u.s.w.}\right\}$$

zu liegen kommen, und zwar hat dieser Ausdruck das positive oder das negative Vorzeichen, je nachdem die Schicht von austretenden oder eintretenden Teilchen gebildet wird. Denken wir uns nun, daß dieses ν noch immer viel größer ist als die gegenseitigen Entfernungen der Teilchen, so dürfen wir annehmen, daß in der genannten Schicht die ursprüngliche, überall gleiche Polarisation $\mathfrak{P}$ besteht. Für die Komponenten von $\delta_2 \mathfrak{d}_{i1}$ ergibt sich dann, wenn man unter χ die Potentialfunktion (Nr. **11** a)) versteht, welche im Inneren der Kugel durch die Flächendichte ν hervorgerufen wird,

$$-\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}\mathfrak{P}_x + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}\mathfrak{P}_y + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z}\mathfrak{P}_z\right), \text{ u. s. w.,}$$

oder, nach Ausführung der Rechnung,

$$(134) \quad -\frac{2}{5}\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial x}\mathfrak{P}_x + \frac{2}{15}\operatorname{div}\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{P}_x - \frac{1}{5}\left(\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{q}_y}{\partial x}\right)\mathfrak{P}_y$$
$$- \frac{1}{5}\left(\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{q}_z}{\partial x}\right)\mathfrak{P}_z, \text{ u. s. w.}$$

Es erübrigt noch, $\delta_1 \mathfrak{d}_{i1}$ zu ermitteln. Es seien x, y, z die Koordinaten des Teilchens A im Kugelmittelpunkt, x', y', z' die eines beliebigen anderen Teilchens A' in der Kugel, und ψ die Potentialfunktion, welche A' vermöge seines elektrischen Momentes an der Stelle (x, y, z) hervorbringt. Dann sind die Komponenten des Beitrags, den A' zu $\mathfrak{d}_{i1}$ für das Teilchen A liefert,

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x}, \text{ u. s. w.}$$

und die Variationen dieser Komponenten

$$(135)\begin{cases} -\left\{(x'-x)\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial x}+(y'-y)\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial y}+(z'-z)\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial z}\right\}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial x'} \\ -\left\{(x'-x)\frac{\partial \mathfrak{q}_y}{\partial x}+(y'-y)\frac{\partial \mathfrak{q}_y}{\partial y}+(z'-z)\frac{\partial \mathfrak{q}_y}{\partial z}\right\}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y'} \\ -\left\{(x'-x)\frac{\partial \mathfrak{q}_z}{\partial x}+(y'-y)\frac{\partial \mathfrak{q}_z}{\partial y}+(z'-z)\frac{\partial \mathfrak{q}_z}{\partial z}\right\}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z'},\ \text{u. s. w.}\end{cases}$$

Diese Ausdrücke ergeben sich aus der Bemerkung, daß die Koordinatendifferenzen $x'-x$, u. s. w. diejenigen Änderungen erleiden, die durch die eingeklammerten Größen dargestellt werden.

Nachdem in dieser Weise das letzte Glied in der Gleichung (133) bestimmt worden ist, wollen wir die Gleichung noch dahin abändern, daß wir uns bei der Deformation nicht $\mathfrak{p}$, sondern $\mathfrak{P}$ konstant gehalten denken. Da sich $\mathfrak{P}$ vorher um $-\operatorname{div}\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{P}$ geändert hatte, haben wir jetzt (133) noch zu vermehren um die Variation von $\mathfrak{E}$, die, bei konstanter Lage der Teilchen, dem Zuwachse $\operatorname{div}\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{P}$ der Polarisation entspricht. Diese Variation ist $\operatorname{div}\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{E}$, da $\mathfrak{E}$ eine homogene und lineare Funktion von $\mathfrak{P}$ ist. Also

$$(136)\qquad \delta\mathfrak{E}_{(\delta\mathfrak{P}=0)}=\operatorname{div}\mathfrak{q}\,(\mathfrak{E}+\tfrac{1}{3}\mathfrak{P})-\delta_1\mathfrak{d}_{i1}-\delta_2\mathfrak{d}_{i1}.$$

47. Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante und des Brechungsexponenten von Dichte und Zusammensetzung der Körper. Dürfte man die für Systeme mit kubischer Anordnung der Teilchen geltende Gleichung (118) allgemein auf isotrope Körper anwenden, dann wäre in (128) $s=0$, und also, wenn bei Änderung der Dichte des Körpers die Eigenschaften der einzelnen Teilchen ungeändert blieben, das Verhältnis

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}$$

der Zahl N, d. h. der Körperdichte proportional[71]). Indem man weiter die Gleichung (118) auch für eine isotrope Mischung zweier oder mehrerer Stoffe zu Grunde legt, erhält man für deren Dielektrizitätskonstante die Formel

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}=\frac{d_1}{D_1}\cdot\frac{\varepsilon_1-1}{\varepsilon_1+2}+\frac{d_2}{D_2}\cdot\frac{\varepsilon_2-1}{\varepsilon_2+2}+\text{ u. s. w.}$$

Hier sind ε_1, ε_2, u. s. w. die Konstanten, welche den Bestandteilen im freien Zustande bei den Dichten D_1, D_2, u. s. w. zukommen, d_1, d_2, u. s. w. aber die partiellen Dichten dieser Bestandteile in der Mischung.

---

71) Vgl. *R. Clausius,* Die mechanische Wärmetheorie, 2, 2. Aufl., 1879, p. 94.

Diesen Regeln entsprechen ähnliche Gleichungen, in welchen statt ε das Quadrat des Brechungsexponenten n vorkommt, und zu welchen man nicht nur gelangt, wenn wirklich $\varepsilon = n^2$ ist, sondern mit demselben Grade der Annäherung auch dann, wenn die Verhältnisse, welche die Dispersion bedingen, eine Abweichung von dieser einfachen Relation herbeiführen (vgl. Nr. 57). Nach diesen Gleichungen soll[72]), wenn man sich auf Licht von einer bestimmten, jedoch beliebig gewählten Schwingungszahl beschränkt, für jeden isotropen Körper der Ausdruck

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$$

der Dichte proportional variieren, und soll sich der Brechungsexponent einer Mischung mittels der Gleichung

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{d_1}{D_1} \cdot \frac{n_1^2 - 1}{n_1^2 + 2} + \frac{d_2}{D_2} \cdot \frac{n_2^2 - 1}{n_2^2 + 2} + \text{u. s. w.}$$

berechnen lassen. Im großen Ganzen hat sich die letztere Formel auch für chemische Verbindungen bewährt, was darauf hinweist, daß in jedem chemischen Atom ein elektrisches Moment erregt werden kann, und daß die für die Größe dieses Moments maßgebenden Eigenschaften eines Atoms durch die Verbindung mit anderen nicht erheblich geändert werden. Allerdings gibt es hier beträchtliche Abweichungen, darunter auch solche, die eine bestimmte Richtung erkennen lassen. Besonders merkwürdig ist der von *Brühl* entdeckte Einfluß einer doppelten Bindung der Atome[73]).

48. Elektronentheorie der Magnetisierung. a) Seit langer Zeit hat man für die durch ein magnetisches Feld erregte Magnetisierung ähnliche Gesetze angenommen, wie später für die Polarisation eines äußeren elektrischen Kräften ausgesetzten Dielektrikums. In einem isotropen Körper mit keinen anderen als Magnetisierungselektronen ist nach (114) und (121) die mittlere, auf ein Teilchen wirkende magnetische Kraft

$$\overline{\overline{\mathfrak{h}}}_i = \mathfrak{H} + (\tfrac{1}{3} + g)\mathfrak{M};$$

macht man nun den der Beziehung (127) entsprechenden Ansatz

$$\overline{\overline{\mathfrak{m}}} = q\overline{\overline{\mathfrak{h}}}_i, \tag{137}$$

so gelangt man zu einer der Formel (XXXIV) analogen Relation zwischen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{H}$, und also auch, mit Rücksicht auf (XXX), zu einer Gleichung

72) *Lorentz,* l. c. (Anm. 5). Dieselben Formeln wurden auf anderem Wege abgeleitet von *L. Lorenz,* Über die Refraktionskonstante, Ann. Phys. Chem. 11 (1880), p. 70.

73) *J. W. Brühl,* Zeitschr. f. phys. Chemie, 1 (1887), p. 307.

(XXXVI) $$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H},$$

die für anisotrope Körper in

(XXXVI') $$\mathfrak{B} = (\mu) \mathfrak{H}$$

umzuändern ist.

Die Theorie hat nun durch nähere Betrachtung der Art und Weise, wie das Moment $\mathfrak{m}$ zu stande kommt, von der Beziehung (137) Rechenschaft zu geben.

b) *Voigt*[74]) hat diese Frage behandelt und zwar indem er verschiedene Hypothesen auf die Probe stellte, und jedesmal sowohl die Wirkung des *entstehenden* magnetischen Feldes wie auch den Einfluß des *bleibenden* Feldes untersuchte. In allen Fällen, wo die beim Entstehen des Feldes — von *Voigt* als momentan vorausgesetzt — auftretende elektrische Kraft zu einer Magnetisierung führt, ist diese der magnetischen Kraft entgegengesetzt; dieser Teil der Theorie ist gleichsam die in die Sprache der Elektronentheorie übersetzte, von *W. Weber* herrührende Erklärung des Diamagnetismus. Die paramagnetischen Eigenschaften können erst als eine Folge des bleibenden Feldes zum Vorschein kommen.

c) *Voigt* nimmt zunächst an, daß in dem ursprünglichen Zustande Elektronen unter dem Einflusse einer elastischen Kraft (vgl. Nr. **43** a) in elliptischen Bahnen herumlaufen, in solcher Weise, daß die Gesamtheit dieser Bewegungen völlig ungeordnet ist. Plötzliches Hervorrufen des Feldes gibt in diesem Falle zu keinerlei Magnetisierung Anlaß. Zu einer solchen kann es indes nachher kommen, wenn die Elektronen ihre Bewegung nicht ungestört fortsetzen, sondern häufig durch regellos verteilte Anstöße in neue Bahnen gelenkt werden. *Voigt* findet, daß sich para- oder diamagnetische Erregung zeigen wird, je nachdem die Elektronen unmittelbar nach diesen Stößen im Mittel einen Überschuß an potentieller Energie ($\frac{1}{2} a \mathfrak{q}^2$ in der Bezeichnung der Nr. **43** a) oder an kinetischer Energie haben.

d) Zweitens untersucht *Voigt* die Rotation kleiner, starrer, geladener Körperchen, wobei er in jedem dieser Elektronen sowohl die Masse wie auch die Ladung gleichmäßig verteilt voraussetzt. Speziell faßt er Teilchen mit drei oder mit zwei gleichen Hauptträgheitsmomenten ins Auge (Kugeln oder Rotationskörper). Hier hat immer das Entstehen des Feldes diamagnetische Erregung zur Folge (vgl. Nr. **23** c); diese bleibt aber nur dann bestehen, wenn die weitere Bewegung ohne Dämpfung und ohne Anstöße stattfindet. Wird in dem Felde

74) *W. Voigt*, Elektronenhypothese und Theorie des Magnetismus, Gött. Nachr., math.-phys. Kl. 1901, p. 169; Ann. Phys. 9 (1902), p. 115.

die Rotation der Elektronen durch immer erneute Anstöße ungeordnet erhalten, so zeigt der Körper schließlich keine Magnetisierung.

Eine paramagnetische Erregung kann sich herausstellen, wenn bei Rotationskörpern die Drehung um die ausgezeichnete Achse ungeschwächt fortdauert, die anderen Drehungen dagegen in irgend einer Weise gedämpft werden.

e) Wir bezeichnen für einen Rotationskörper, dessen Ladung in beliebiger Weise symmetrisch um die Achse herum verteilt ist, mit a die nach einer bestimmten Seite gezogene ausgezeichnete Hauptträgheitsachse, mit b und c zwei andere Hauptträgheitsachsen, mit g die Winkelgeschwindigkeit um a, mit Q das zugehörige Trägheitsmoment, d. h. die Summe des materiellen und des elektromagnetischen Trägheitsmomentes (Nr. 22), mit k das Integral $\frac{1}{2}\int \varrho r^2 dS$ (r Entfernung von a), und mit $\mathfrak{N}_a$ das Drehmoment um die Achse a. Man hat, auch dann wenn zu gleicher Zeit Rotationen um b und c bestehen, und der Mittelpunkt sich mit einer gewissen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ bewegt, einerseits nach einem bekannten Satze

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\mathfrak{N}_a}{Q}, \tag{138}$$

andererseits nach der Formel (85) — wir lassen die x-Richtung zusammenfallen mit der Lage, die a in dem betrachteten Augenblick hat, und beachten, daß $Q_2 = Q_3 = k$ —

$$\mathfrak{N}_a = -\frac{k}{c}\frac{d\mathfrak{h}_a}{dt}, \tag{139}$$

wo unter $\mathfrak{h}_a$ die nach der veränderlichen Richtung a genommene Komponente zu verstehen ist. Bei der Ableitung der letzten Gleichung sind (IV) und (V) benutzt worden.

Aus (138) und (139) folgt für jede Lage des Teilchens

$$g = g_0 - \frac{k\,|\mathfrak{h}|\cos\vartheta}{cQ}, \tag{140}$$

wenn ϑ den Winkel zwischen a und der Feldrichtung und g_0 den ursprünglich, vor Erregung des Feldes bestehenden Wert von g bedeutet.

Werden nun schließlich die Rotationen um b und c durch Widerstände vernichtet, dann nimmt a eine feste Endlage an, in der kein Drehmoment vorhanden ist, und zwar kommen nur solche Lagen in Betracht, für welche das Gleichgewicht stabil ist. In der Endlage sei $g = G$, $\vartheta = \Theta$, und also die in die Richtung von $\mathfrak{h}$ fallende Komponente des magnetischen Moments, wie aus (XXII) folgt,

$$\mathfrak{m}_h = \frac{1}{c}kG\cos\Theta.$$

Man kann drei Fälle unterscheiden.

α) Das Elektron war ursprünglich in Ruhe. Dann ist schließlich

$$\Theta = \tfrac{1}{2}\pi, \quad G = 0, \quad \mathfrak{m}_h = 0.$$

β) Vor Erregung des Feldes bestand eine Rotation, deren Geschwindigkeit g_0 wir das positive Vorzeichen beilegen, was sich durch geeignete Wahl der Richtung von a erreichen läßt. Ist nun $g_0 < \frac{k|\mathfrak{h}|}{cQ}$, dann wird

$$\cos\Theta = \frac{c g_0 Q}{k|\mathfrak{h}|}, \quad G = 0, \quad \mathfrak{m}_h = 0.$$

γ) Wenn dagegen $g_0 > \frac{k|\mathfrak{h}|}{cQ}$, so kann g in keiner Lage der Achse a verschwinden. Man hat in diesem Fall

$$\Theta = 0, \quad G = g_0 - \frac{k|\mathfrak{h}|}{cQ}, \quad \mathfrak{m}_h = \frac{1}{c} k \left(g_0 - \frac{k|\mathfrak{h}|}{cQ}\right),$$

sodaß eine paramagnetische Erregung entstanden ist, die sich allerdings von der tatsächlich bestehenden in der Hinsicht unterscheidet, daß auch das schwächste Feld die Teilchen vollständig richten würde. Diesem Übelstande kann man durch weitere geeignete Hypothesen abzuhelfen versuchen.

Viele ältere und neuere Arbeiten[75]), in welchen das Verhalten drehbarer Moleküle mit permanenten magnetischen Momenten untersucht wird, ohne daß auf das Wesen der Magnetisierung näher eingegangen wird, müssen hier unberücksichtigt bleiben.

f) Es möge auch eine Auffassung erwähnt werden, die sich den Anschauungen von *Wilh. Weber* nähert. Die Teilchen seien Rotationskörper, wie der unter e) betrachtete, die bloß eine Rotation um die ausgezeichnete Achse a haben. Die Achse jedes Teilchens möge eine feste Gleichgewichtslage haben, nach der sie immer durch gewisse elastische Kräfte zurückgedreht wird, und aus der das von einem äußeren Felde herrührende Drehmoment sie um einen gewissen Winkel ablenkt. Das zurückwirkende Drehmoment sei dem Ablenkungswinkel ω proportional; wir schreiben für dasselbe $q\omega$.

Bildet nun die Achse a eines Teilchens mit der Richtung des äußeren Feldes $\mathfrak{h}$ ursprünglich (d. h. vor Erregung des Feldes) den Winkel ϑ_0 und später den Winkel ϑ, so lautet die Gleichgewichtsbedingung (vgl. das letzte Glied von (82))

---

75) *H. E. J. G. du Bois,* Toupie magnétocinétique, illustrant les phénomènes para- et diamagnétiques, Arch. néerl. (2) 5 (1900), p. 242; Étude quantitative de la toupie magnétocinétique, ibid. (2) 6 (1901), p. 581; Gepolariseerde asymmetrische tollen, Amsterdam Zittingsverslag Akad. v. Wet. 10 (1902), p. 415, 504.

$$\frac{1}{c}gk|\mathfrak{h}|\sin\vartheta = q(\vartheta_0 - \vartheta);$$

diese dient, mit (140), zur Bestimmung von g und ϑ. Zugleich mit diesen beiden Größen wird das Moment $\mathfrak{m}$ des Teilchens bekannt.

Auch die Energie wollen wir, behufs späterer Anwendung, betrachten. Dieselbe beträgt ursprünglich $\frac{1}{2}Qg_0^2$, während sie sich nach Erregung des Feldes aus der kinetischen Energie $\frac{1}{2}Qg^2$ und der potentiellen Energie $\frac{1}{2}q(\vartheta_0 - \vartheta)^2$ zusammensetzt. Der Zuwachs, den wir auch kurz als die Energie des Teilchens im äußeren magnetischen Felde bezeichnen könnten, ist also

$$\tfrac{1}{2}Q(g^2 - g_0^2) + \tfrac{1}{2}q(\vartheta_0 - \vartheta)^2.$$

Es sei nun $|\mathfrak{h}|$ so klein, daß nach steigenden Potenzen dieser Größe entwickelt werden kann. Dann erhalten wir, indem wir die Entwicklungen so weit fortsetzen, daß das Moment bis auf Größen von der Ordnung $|\mathfrak{h}|$, die Energie aber bis auf die Glieder mit $\mathfrak{h}^2$ genau berechnet wird,

$$\vartheta - \vartheta_0 = -\frac{kg_0}{cq}|\mathfrak{h}|\sin\vartheta_0 + \cdots,$$

$$g = g_0 - \frac{k}{cQ}|\mathfrak{h}|\cos\vartheta_0 - \frac{k^2 g_0}{c^2 q Q}\mathfrak{h}^2\sin^2\vartheta_0 + \cdots,$$

$$\mathfrak{m}_h = \frac{kg}{c}\cos\vartheta = \frac{kg_0}{c}\cos\vartheta_0 + \frac{k^2 g_0^2}{c^2 q}|\mathfrak{h}|\sin^2\vartheta_0 - \frac{k^2}{c^2 Q}|\mathfrak{h}|\cos^2\vartheta_0$$

und für die Energie

$$-\frac{kg_0}{c}|\mathfrak{h}|\cos\vartheta_0 - \frac{k^2 g_0^2}{2c^2 q}\mathfrak{h}^2\sin^2\vartheta_0 + \frac{k^2}{2c^2 Q}\mathfrak{h}^2\cos^2\vartheta_0.$$

Denken wir uns jetzt sehr viele gleiche Teilchen mit denselben Werten von k, Q, q, g_0, die nach allen möglichen Richtungen orientiert sind, sodaß der Mittelwert von $\cos\vartheta_0$ Null ist und der von $\cos^2\vartheta_0$ den Wert $\frac{1}{3}$ hat, und nehmen wir an, jedes Teilchen befinde sich in demselben Felde $\mathfrak{h}$, so erhalten wir aus den beiden letzten Formeln für das mittlere Moment

$$\overline{\mathfrak{m}}_h = \frac{1}{3}\frac{k^2}{c^2}\left(\frac{2g_0^2}{q} - \frac{1}{Q}\right)|\mathfrak{h}| \tag{141}$$

und für die mittlere Energie

$$-\tfrac{1}{2}\overline{\mathfrak{m}}_h \cdot |\mathfrak{h}| = -\tfrac{1}{2}(\overline{\mathfrak{m}} \cdot \mathfrak{h}). \tag{142}$$

Aus (141) geht hervor, daß die Erregung para- oder diamagnetisch sein wird, je nachdem

$$g_0^2 > \text{ oder } < \frac{q}{2Q}$$

ist.

g) Es muß schließlich hervorgehoben werden, daß, wie *J. J. Thomson*

gezeigt hat[76]), schon die Annahme freier Elektronen, die in einem Metall in ungeordneter Bewegung hin- und hergehen, zu einer magnetischen Erregung führt, und zwar würde der Leiter infolgedessen diamagnetische Eigenschaften haben. Man sieht das sofort, wenn man den Einfluß eines äußeren Feldes auf die freien Bahnstrecken ins Auge faßt; diese werden dergestalt gekrümmt (Nr. **24**), daß ihre Projektionen auf eine zu der Feldrichtung senkrechte Ebene in Kreisbogen übergehen.

Selbstverständlich würde diese Annahme einige Änderung der in diesem Artikel gegebenen Darstellung erfordern, man könnte ja nicht mehr von „magnetisierten Teilchen" im Sinne der Nr. **15** reden.

49. Elektrische Ströme in magnetisierten Leitern. Sehr verwickelt werden die Verhältnisse, wenn ein Körper mehr als eine der in Nr. **26** unterschiedenen Elektronenarten enthält. Man kann in diesem Falle verschiedene Hypothesen an der Erfahrung prüfen, wobei es sich namentlich darum handeln wird, ob die Leitungselektronen in das Innere der polarisierten oder magnetisierten Teilchen eindringen können, und wie es sich mit ihrer Bewegung in nächster Nähe dieser Teilchen verhält. Wir fassen hier den experimentell untersuchten Fall der Elektrizitätsbewegung in einem bewegten magnetisierten Leiter ins Auge.

a) Können die Leitungselektronen die magnetisierten Teilchen ungehindert durchsetzen, so ist für die auf dieselben wirkende elektrische Kraft im Mittel zu setzen (vgl. (XXXI'))

$$\bar{\mathfrak{d}} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w} \cdot \bar{\mathfrak{h}}] = \mathfrak{E}'. \tag{143}$$

b) Ein anderer extremer Fall ist, daß die Leitungselektronen ziemlich weit von den Magnetisierungselektronen entfernt bleiben. Wir denken uns die magnetisierten Teilchen als Kugeln K, für deren jede die Gesamtladung (45) Null ist und die zusammen nur einen sehr kleinen Bruchteil des Raumes einnehmen; zudem stellen wir uns vor, daß die umlaufenden Bewegungen, in welchen wir das Wesen der Magnetisierung erblicken, in jeder Kugel auf die unmittelbare Nähe des Zentrums beschränkt sind. Den Leitungselektronen soll nur der von den Kugeln freigelassene Raum zur Verfügung stehen. Wir haben dann mit einem Mittelwert zu rechnen, der sich auf diesen Raum bezieht, und den wir zur Unterscheidung von (143) mit

$$\hat{\mathfrak{d}} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w} \cdot \hat{\mathfrak{h}}] \tag{144}$$

andeuten wollen.

76) *J. J. Thomson*, l. c. (Anm. 65), p. 148.

Offenbar erhält man den neuen Mittelwert $\widehat{\mathfrak{d}}$, wenn man $\overline{\mathfrak{d}}$ vermindert um $\sum\int \mathfrak{d}\,dS$, wo sich das Integral auf das Innere einer Kugel und die pro Volumeneinheit zu berechnende Summe auf sämtliche Kugeln bezieht. Um $\widehat{\mathfrak{h}}$ zu finden, hat man in derselben Weise zu verfahren.

Die Berechnung der Summen $\sum\int \mathfrak{d}\,dS$ und $\sum\int \mathfrak{h}\,dS$ vereinfacht sich nun infolge unserer Voraussetzung über die Größe der Kugeln K; offenbar dürfen wir uns auf diejenigen Teile von $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{h}$ beschränken, die über eine solche Kugel integriert einen merklichen Wert liefern. Wenn R der Kugelradius ist, so müssen diese Teile wenigstens von der Größenordnung R^{-3} sein; sie können also nur von den Vorgängen in der Kugel und in ihrer unmittelbaren Nähe herrühren.

Es ist weiter ein eigentümlicher Umstand zu berücksichtigen. Aus der Gleichung (63) ersieht man, daß ein magnetisiertes Teilchen mit konstantem Moment auf Elektronen, die dieselbe Geschwindigkeit haben wie das Teilchen selbst, in der Entfernung r mit einer elektrischen Kraft

$$\frac{1}{4\pi c}\operatorname{grad}\left(\mathfrak{w}\cdot\operatorname{rot}\left\{\frac{\mathfrak{m}}{r}\right\}\right) \tag{145}$$

wirkt. Auf Elektronen, die so weit entfernt liegen, daß für sie $\mathfrak{w}$ merklich verschieden ist, wird es ebenfalls eine gewisse elektrische Kraft ausüben und ähnliche Wirkungen werden auch von einem Teilchen mit veränderlichem Moment ausgehen. Setzt man nun die Leitungselektronen als so klein und so zahlreich voraus, daß man es in dem Raume zwischen den Kugeln K gleichsam mit einem kontinuierlichen Leiter zu tun hat, so werden jene Kräfte durch elektrische Influenz, d. h. durch Anhäufung von Elektronen mit bestimmtem Vorzeichen, eine gewisse Ladungsverteilung hervorrufen.

Die so entstandenen Ladungen L, die man aus der Bedingung, daß an jeder Kugelfläche der Leitungsstrom in tangentieller Richtung verlaufen muß, bestimmen könnte, geben, da sie der Geschwindigkeit $|\mathfrak{w}|$ proportional sind, weder zu einem merklichen Konvektionsstrome, noch zu einer magnetischen Kraft, die wir zu berücksichtigen hätten, Anlaß. Auch stören sie in keiner Weise die Gültigkeit der Grundgleichung (IV″), wenn nur unter $\overline{\mathfrak{d}}$ (oder $\mathfrak{E}$) der bei Anwesenheit der Ladungen L bestehende Mittelwert verstanden wird, und bei dessen Berechnung nach der Gleichung (93) die Integration sich auch über die Kugelräume K erstreckt. Bei dem Übergange von $\overline{\mathfrak{d}}$ zu $\widehat{\mathfrak{d}}$ ist aber darauf zu achten, daß die Ladungen L einen Beitrag zu dem Integral $\int \mathfrak{d}\,dS$ für jede Kugel liefern.

Dieser Beitrag, für irgend eine der Kugeln, möge $\mathfrak{k}$ heißen. Bei der Berechnung desselben kommt es, wie bereits gesagt, nur auf diejenige Ladung L an, die in der Nähe der betrachteten Kugel liegt; überdies darf man, ebenfalls wegen der Kleinheit dieser letzteren, mit derjenigen Ladung rechnen, welche bestehen würde, wenn in einem unendlich ausgedehnten Leiter nur diese eine kugelförmige Höhlung mit einem konstanten $\mathfrak{m}$ im Mittelpunkte vorhanden wäre und das ganze System eine Translation mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ hätte. In diesem Falle ist für jede Entfernung der Ausdruck (145) anwendbar; da dieser mit der zu einem elektrischen Momente

$$-\frac{1}{c}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{m}]$$

gehörenden elektrischen Kraft übereinstimmt, so muß an der Oberfläche von K eine Ladung mit der einer Kugelfunktion ersten Grades proportionalen Dichte

$$\omega=\frac{3}{4\pi R^3 c}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{m}]_n \tag{146}$$

entstehen. Man überzeugt sich ja leicht davon, daß diese Ladung in allen äußeren Punkten die Kraft (145) aufhebt.

Im Inneren der Kugel bringt sie ein homogenes Feld hervor, und man findet, nachdem man dessen Stärke ermittelt hat,

$$\mathfrak{k}=-\frac{1}{3c}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{m}].$$

Auch die magnetisierten Teilchen selbst liefern einen Beitrag zu den in Betracht kommenden sich über die Kugelräume erstreckenden Integralen. Es sei, für irgend eine Kugel K, $\mathfrak{d}'$ der Vektor

$$\mathfrak{d}+\frac{1}{c}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{h}],$$

insofern derselbe von dem in dieser Kugel liegenden magnetisierten Teilchen herrührt, und $\mathfrak{l}$ das über die Kugel ausgedehnte Integral $\int\mathfrak{d}'dS$. Man hat dann, um (144) zu erhalten, den Vektor (143) um $\sum(\mathfrak{k}+\mathfrak{l})$ zu vermindern.

Um $\mathfrak{l}$ zu berechnen, gehen wir auf die Gleichung (IX′) zurück. Aus naheliegenden Gründen kommt es nur auf das letzte Glied in derselben an. Also wird, wenn σ die Kugelfläche bedeutet,

$$\mathfrak{l}_x=\frac{1}{c}\int(\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{a}')\cos(n,x)\,d\sigma,\ \text{u. s. w.},$$

wo wir für $\mathfrak{a}'$ (vgl. (XII′)) den Wert

$$\mathfrak{a}'=\frac{1}{4\pi c}\int\frac{\varrho\mathfrak{u}}{r}dS$$

einsetzen dürfen. Demzufolge wird

$$\mathfrak{l}_x = \frac{1}{4\pi c^2}\left\{\mathfrak{w}_x\int\cos(n,x)\,d\sigma\int\frac{\varrho\mathfrak{u}_x}{r}\,dS + \mathfrak{w}_y\int\cos(n,x)\,d\sigma\int\frac{\varrho\mathfrak{u}_y}{r}\,dS + \right.$$
$$\left. + \mathfrak{w}_z\int\cos(n,x)\,d\sigma\int\frac{\varrho\mathfrak{u}_z}{r}\,dS\right\}, \quad \text{u. s. w.}$$

Die Werte der hier auftretenden Integrale ergeben sich sofort, wenn man die Reihenfolge der Integrationen umkehrt. Man erhält, wenn man die Koordinaten in Bezug auf den Kugelmittelpunkt mit $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ bezeichnet, und die Formeln (58) beachtet,

$$\int\cos(n,x)\,d\sigma\int\frac{\varrho\mathfrak{u}_x}{r}\,dS = \int\varrho\mathfrak{u}_x dS\int\frac{\cos(n,x)}{r}\,d\sigma = \frac{4}{3}\pi\int\varrho\mathfrak{u}_x\mathbf{x}\,dS = 0,$$
$$\int\cos(n,x)\,d\sigma\int\frac{\varrho\mathfrak{u}_y}{r}\,dS = \frac{4}{3}\pi\int\varrho\mathfrak{u}_y\mathbf{x}\,dS = \frac{4}{3}\pi c\mathfrak{m}_z,$$
$$\int\cos(n,x)\,d\sigma\int\frac{\varrho\mathfrak{u}_z}{r}\,dS = \frac{4}{3}\pi\int\varrho\mathfrak{u}_z\mathbf{x}\,dS = -\frac{4}{3}\pi c\mathfrak{m}_y,$$

folglich

$$\mathfrak{l} = \frac{1}{3c}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{m}].$$

Das Resultat ist also

$$\mathfrak{k} + \mathfrak{l} = 0,$$

und schließlich

$$\hat{\mathfrak{d}} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\cdot\hat{\mathfrak{h}}] = \bar{\mathfrak{d}} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\cdot\bar{\mathfrak{h}}] = \mathfrak{E}'.$$

Da sich dieses Resultat für die auf die Leitungselektronen wirkende elektrische Kraft bei zwei sehr verschiedenen Voraussetzungen herausstellt, so dürfte es gerechtfertigt sein, mit demselben allgemein weiter zu rechnen.

Man gelangt dann auch für eine geschlossene, ganz oder teilweise in magnetisierter Materie verlaufende Linie, wie in der *Hertz*'schen Theorie, zu der Gleichung (125), wobei zu bemerken ist, daß diese auch dann gilt, wenn an einigen Stellen $\mathfrak{w} = 0$ ist. Daselbst fällt dann $\mathfrak{E}'$ mit $\mathfrak{E}$ zusammen.

Die Erklärung der unipolaren Induktion gestaltet sich nun gerade so wie in Art. V 13, Nr. 18.

Schließlich möge hervorgehoben werden, daß in der Elektronentheorie der Parallelismus zwischen den elektrischen und den magnetischen Erscheinungen nicht so weit geht, wie in der Theorie von *Hertz*. Der auf der rechten Seite der Gleichung (IV″a) vorkommende „magnetische Strom" $\dot{\underline{\mathfrak{B}}}$ zerfällt nämlich in die Teile $\dot{\mathfrak{B}}$ und rot $[\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{w}]$ (vgl. V 13, Nr. 18). Dieser letztere ist aber nicht mehr genau das Analogon zu dem *Röntgen*strom, für welchen wir jetzt den Ausdruck

rot $[\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{w}]$ gefunden haben; diesem aber würde der Vektor rot $[\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{w}]$ entsprechen.

50. Allgemeine Betrachtungen betreffend die Beziehungen zwischen den Zustandsgrößen. Bei der Schwierigkeit, die Beziehung zwischen den in einem bestimmten Punkt der Materie bestehenden Zustandsgrößen aus molekulartheoretischen Betrachtungen abzuleiten, drängt sich die Frage auf, wie weit man ohne diese, lediglich mit den Grundbegriffen der Elektronentheorie und gewissen allgemeinen Vorstellungen über die Struktur der Körper kommen könne. Indem man z. B. von der Annahme ausgeht, daß die Relationen, die $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ verbinden, linear sind und daß auch nur die ersten Potenzen von $\mathfrak{w}_x$, $\mathfrak{w}_y$, $\mathfrak{w}_z$ in denselben vorkommen, kann man ermitteln, welche Form der Gleichungen mit den Symmetrieverhältnissen verträglich ist, wobei man strenge genommen alle die verschiedenen Fälle berücksichtigen sollte, die die Kristallphysik unterscheidet. Hier kann nur eine kurze Andeutung gegeben werden.

a) Zu jedem sich in irgend einer Weise bewegenden System von Elektronen kann man sich ein zweites System denken, das in jedem Augenblick das Spiegelbild des ersten in Bezug auf eine feste Ebene E ist, und zwar in der Weise, daß in zwei einander entsprechenden Punkten der beiden Systeme ϱ denselben Wert hat. Unterscheidet man die in dem zweiten System vorkommenden Größen durch den Index s („Spiegelbild"), und schreibt man $(\mathfrak{Q})$ für das Spiegelbild eines Vektors $\mathfrak{Q}$, so folgt aus den Grundgleichungen

$$\mathfrak{d}^s = (\mathfrak{d}), \quad \mathfrak{h}^s = -(\mathfrak{h}), \quad \mathfrak{f}^s = (\mathfrak{f}).$$

Wenn man nun hinzufügt, daß auch, was die Verteilung der ungeladenen Materie betrifft, das eine System das Spiegelbild des anderen ist, und daß für die Kräfte $\mathfrak{f}_m$, die zwischen den Teilchen dieser Materie oder zwischen ihr und den Elektronen wirksam sind, die Relation

$$\mathfrak{f}_m^s = (\mathfrak{f}_m)$$

erfüllt ist, so erhält man zwei Körper, die sich fortwährend wie Objekt und Spiegelbild verhalten; jeder Bewegung des einen entspricht eine mögliche Bewegung des anderen. Ist nun die Struktur eines Körpers derart, daß die Erscheinungen in dem Spiegelbilde unter Zugrundelegung derselben (d. h. nicht gespiegelten) Koordinatenachsen sich durch *dieselben* Gleichungen darstellen lassen, wie die Vorgänge im Körper selbst, dann soll E eine Symmetrieebene des Körpers heißen.

b) Ein Körper habe drei zu einander senkrechte Symmetrieebenen; diese wähle man zu Koordinatenebenen. Es läßt sich dann

zeigen, daß in den Formeln für $\mathfrak{J}_x$ und $\mathfrak{P}_x$ nur Glieder mit $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{w}_y \mathfrak{H}_z$, $\mathfrak{w}_z \mathfrak{H}_y$ (oder $\mathfrak{w}_y \mathfrak{B}_z$, $\mathfrak{w}_z \mathfrak{B}_y$) und in den Formeln für $\mathfrak{M}_x$ (oder $\mathfrak{B}_x$) nur solche mit $\mathfrak{H}_x$, $\mathfrak{w}_y \mathfrak{E}_z$, $\mathfrak{w}_z \mathfrak{E}_y$ (oder $\mathfrak{w}_y \mathfrak{P}_z$, $\mathfrak{w}_z \mathfrak{P}_y$) auftreten können. Die Erscheinungen führen nun dazu, dies dahin zu spezialisieren, daß $\mathfrak{J}$ gerade durch $\mathfrak{E}'$ (Nr. **33**) bestimmt ist, und also zu setzen

$$\mathfrak{J}_x = \sigma_1 \mathfrak{E}_x', \quad \mathfrak{J}_y = \sigma_2 \mathfrak{E}_y', \quad \mathfrak{J}_z = \sigma_3 \mathfrak{E}_z',$$

woraus man für beliebige Achsen erhält

$$\mathfrak{J} = (\sigma)\mathfrak{E}' \quad (\sigma_{12} = \sigma_{21}, \text{ u. s. w.}).$$

Es liegt nahe, für $\mathfrak{P}$ eine ähnliche Formel anzunehmen. Es sei diese

$$\mathfrak{P} = (\eta)\mathfrak{E}' \quad (\eta_{12} = \eta_{21}, \text{ u. s. w.})$$

und also

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + (\eta)\mathfrak{E}'. \tag{147}$$

Daß es in den Gleichungen für $\mathfrak{M}_x$ und $\mathfrak{B}_x$ Glieder wie $\mathfrak{w}_y \mathfrak{P}_z$, $\mathfrak{w}_z \mathfrak{P}_y$ geben kann, geht schon aus der Formel (114) hervor. Sieht man von diesen Gliedern ab, so ergibt sich leicht

$$\mathfrak{B} = (\mu)\mathfrak{H} \quad (\mu_{12} = \mu_{21}, \text{ u. s. w.}).$$

Man kann nun in Ermangelung eines Besseren diese Formeln gleichzeitig anwenden, wenn $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$ in demselben Raum bestehen; jedoch betritt man dann einen ziemlich unsichern Weg.

c) Falls elektromotorische Kräfte vorhanden sind, kann man sich, wenn man deren Ursprung nicht eingehender besprechen will, damit begnügen, den Vektor $\mathfrak{E}'$ in den Formeln für $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{E}' + \mathfrak{E}^{el}$, $\mathfrak{E}' + \mathfrak{E}^{ev}$ zu vertauschen.

d) Für rasch veränderliche Zustände (Lichtschwingungen) werden an die Stelle obiger Formeln andere lineare Gleichungen zu setzen sein, die auch Differentialquotienten nach der Zeit enthalten, was bei einfach periodischen Änderungen auf dasselbe hinauskommt, als wenn man die Formel ungeändert läßt, die Koeffizienten derselben aber als Funktionen der Schwingungsdauer auffaßt.

e) In der Annahme linearer Gleichungen liegt die Voraussetzung, daß im Ausdrucke der Kraft (VI) derjenige Anteil, der von der relativen Geschwindigkeit der Elektronen gegen die Materie abhängt, vernachlässigt werden dürfe. Der *Hall*-Effekt, sowie die verschiedenen magneto-optischen Erscheinungen sind demnach von den Gleichungen dieser Nummer ausgeschlossen.

51. Energie und Energiefluß in ruhenden Körpern. Der Zusammenhang zwischen den elektrischen und den magnetischen Zustandsgrößen wird nach Nr. **33** für ein ruhendes System durch folgende Gleichungen dargestellt:

$$\text{rot}\,\mathfrak{H} = \frac{1}{c}(\dot{\mathfrak{E}} + \dot{\mathfrak{P}} + \mathfrak{J}),$$
$$\text{rot}\,\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{B}}.$$

Außerdem ist, wenn wir elektromotorische Kräfte $\mathfrak{E}^{el}$, $\mathfrak{E}^{ev}$ voraussetzen, (vgl. Nr. **37** und Nr. **44**c)), sowie V 13, Nr. **3**),

(XXXIII‴) $\quad \mathfrak{J} = (\sigma)(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^{el}), \quad \mathfrak{E} + \mathfrak{E}^{el} = (\sigma')\mathfrak{J},$

(XXXIV^{IV}) $\quad \mathfrak{P} = (\eta)(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^{ev}), \quad \mathfrak{E} + \mathfrak{E}^{ev} = (\eta')\mathfrak{P}.$

Ähnlich, wie wir in V 13, Nr. **22** zu der Gleichung (XII) gelangten, leiten wir jetzt aus diesen Formeln ab

$$(\mathfrak{E}^{el}\cdot\mathfrak{J}) + (\mathfrak{E}^{ev}\cdot\dot{\mathfrak{P}}) = ((\sigma')\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{J}) + (\mathfrak{E}\cdot\dot{\mathfrak{E}}) + ((\eta')\mathfrak{P}\cdot\dot{\mathfrak{P}}) + (\mathfrak{H}\cdot\dot{\mathfrak{B}}) + \text{div}\,\mathfrak{S}.$$

Diese Formel, in der

(XXXVII) $$\mathfrak{S} = c[\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{H}],$$

ist offenbar die Energiegleichung, und wir schließen also, daß die Ausdrücke links die von den elektromotorischen Kräften pro Volumen- und pro Zeiteinheit geleistete Arbeit darstellen und daß der Energiestrom durch (XXXVII), die *Joule*'sche Wärme aber durch

(XXXVIII) $$Q = ((\sigma')\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{J}).$$

bestimmt wird.

Ferner ergeben sich die Relationen

$$\eta'_{12} = \eta'_{21}, \text{ u. s. w.}, \quad \mu'_{12} = \mu'_{21}, \text{ u. s. w.},$$

sodaß auch

$$\eta_{12} = \eta_{21}, \text{ u. s. w.}; \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}, \text{ u. s. w.}; \quad \mu_{12} = \mu_{21}, \text{ u. s. w.}$$

Für die elektrische Energie W_e und die magnetische W_m, beide pro Volumeneinheit, erhält man

(XXXIX) $$W_e = \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}^2 + \tfrac{1}{2}((\eta')\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{P}) = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{D}) + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}^{ev}\cdot\mathfrak{P}),$$

oder

(XXXIX′) $$W_e = \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}^2 + W_{ep}, \quad W_{ep} = \tfrac{1}{2}((\eta')\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{P})$$

und

(XL) $$W_m = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{B}).$$

Diese Resultate stimmen mit den in V 13 erhaltenen überein, mit dem Unterschiede jedoch, daß für die Arbeit der elektromotorischen Kräfte $\mathfrak{E}^{ev}$ und für W_e etwas andere Ausdrücke gefunden werden. Es hängt dieses damit zusammen, daß von den beiden Teilen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{P}$, aus welchen die elektrische Erregung $\mathfrak{D}$ sich zusammensetzt, nur der zweite von einer elektromotorischen Kraft $\mathfrak{E}^{ev}$ beeinflußt wird.

52. Andere Bestimmung der Energie und des Energieflusses. Einen Teil der obigen Resultate wollen wir noch auf einem anderen

Wege ableiten, der uns tiefer in den Mechanismus der Erscheinungen hineinführt.

a) *Wert der Energie.* Wir berechnen den Energieinhalt einer physikalisch unendlich kleinen Kugel und dividieren diesen durch das Volumen B derselben; dabei bezeichnen wir mit 1 (vgl. Nr. **35**) das zu den inneren Teilchen gehörende Feld, mit 2 das von den äußeren Teilchen herrührende. Diesem letzteren Felde, das als homogen gelten kann, entspricht, da der Körper ruht, nach (XIII), (XIV), (109) und (110) eine elektrische Energie

$$\tag{148} \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}_2^2 = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E} + \tfrac{1}{3}\mathfrak{P})^2$$

und eine magnetische Energie

$$\tag{149} \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}_2^2 = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{H} + \tfrac{1}{3}\mathfrak{M})^2.$$

Zu diesen Werten sind zunächst die Energieanteile zu addieren, welche der gleichzeitigen Existenz der beiden Felder zu verdanken sind (Nr. **6**), und bei deren Berechnung man sich, was das Feld 1 anbelangt, der in Nr. **35** a) betrachteten Mittelwerte bedienen kann. Das Resultat lautet für die elektrische Energie (vgl. (107))

$$\tag{150} (\mathfrak{E}_1 \cdot \mathfrak{E}_2) = -\tfrac{1}{3}(\mathfrak{P} \cdot \{\mathfrak{E} + \tfrac{1}{3}\mathfrak{P}\}),$$

und für die magnetische, da das durch (108) bestimmte $\mathfrak{B}_1$ der Mittelwert von $\mathfrak{h}$ ist (vgl. (XXIX)),

$$\tag{151} (\mathfrak{B}_1 \cdot \mathfrak{B}_2) = \tfrac{2}{3}(\mathfrak{M} \cdot \{\mathfrak{H} + \tfrac{1}{3}\mathfrak{M}\}).$$

Schließlich ist nun noch die Energie des Kugelraumes zu berücksichtigen, insofern sie von den inneren Teilchen für sich genommen herrührt.

α) Sind nur Leitungselektronen (bez. Ionen) vorhanden, und schließt man diejenigen Energiebeträge aus, die in allen Fällen bestehen, auch bei Ruhe aller Teilchen, dann kann man zeigen, daß es bei kleinen Geschwindigkeiten für jedes Elektron nur auf die Summe der in Nr. **11** b) mit T bezeichneten Energie und der kinetischen Energie im gewöhnlichen Sinne des Wortes ankommt, also auf die Größe $\frac{1}{2}m\mathfrak{u}^2$, wenn m die Summe der wirklichen und der durch (79) bestimmten elektromagnetischen Massen bedeutet.

β) Wir betrachten zweitens den Fall, daß nur Polarisationselektronen in der Kugel liegen. Wegen der Kleinheit der Kugel dürfen wir den Zustand als einen elektrostatischen behandeln (Nr. **13**); wir müssen aber bedenken, daß neben der durch Integration von (XIII) zu berechnenden Energie auch für jedes polarisierte Teilchen eine gewisse elastische Energie (Nr. **43**) besteht; diese rechnen wir gleichfalls zu der „elektrischen Energie des ponderabelen Körpers“. Wir

bezeichnen mit pB die Summe dieser „Eigenenergien", mit qB aber die Summe derjenigen Energien, die nach (53) den verschiedenen in B liegenden Teilchenpaaren zukommen, und zwar berechnen wir diese Größen, als ob die in B liegenden Momente von dem zugehörigen, sich in dem Äther bis auf unendliche Entfernung hin ausdehnenden elektrostatischen Felde umgeben wären. Um den hierbei begangenen Fehler zu korrigieren, ist nachträglich die Summe $pB + qB$ zu vermindern um die Energie, welche jenes Feld, soweit es außerhalb der Kugel liegt, besitzen würde. Den Betrag derselben kann man leicht angeben, da die Kugel bei konstanten Momenten dieselbe Wirkung nach außen haben würde, wie ein Moment $B\mathfrak{P}$ in ihrem Mittelpunkte; das Resultat ist dem Inhalte B proportional und möge daher rB heißen.

Da einem Teilchenpaare a, b nach (53) die Energie $-(\mathfrak{p}_a \cdot \mathfrak{d}_{ba})$ entspricht, so werden wir q richtig berechnen, wenn wir jedem Teilchen des Paares die Hälfte dieser Energie zuschreiben. Kombiniert man in dieser Weise ein bestimmtes Teilchen der Reihe nach mit allen anderen in der Kugel liegenden, dann erhält man

$$-\tfrac{1}{2}(\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{d}_{i1}). \tag{152}$$

Andererseits ist nach (131) die Eigenenergie eines Teilchens

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{p} \cdot \{\mathfrak{d}_i + \mathfrak{E}^{ev}\}).$$

Da nun (Nr. **36**) die Summe dieser Ausdrücke den Wert

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{p} \cdot \{\mathfrak{E} + \tfrac{1}{3}\mathfrak{P} + \mathfrak{E}^{ev}\})$$

hat, so wird

$$p + q = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{P} \cdot \{\mathfrak{E} + \tfrac{1}{3}\mathfrak{P} + \mathfrak{E}^{ev}\}).$$

Für r aber erhält man

$$r = \frac{1}{9}\mathfrak{P}^2. \tag{153}$$

γ) Der Körper möge drittens nur Magnetisierungselektronen enthalten. Wir wollen diese, was die diamagnetischen Substanzen betrifft, als drehbare geladene Kugeln (Nr. **23** c)) betrachten und für die paramagnetischen die in Nr. **48** f)) geschilderte Auffassung zu Grunde legen. Wir folgen übrigens demselben Wege wie unter β), und verstehen unter p', q', r' die Größen, welche den oben mit p, q, r bezeichneten entsprechen. Statt (152) bekommen wir jetzt den Ausdruck (vgl. (61))

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{h}_{i1});$$

folglich, da wir (siehe (87) und (142)) für die Eigenenergie eines magnetisierten Teilchens

$$-\tfrac{1}{2}(\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{h}_i)$$

setzen dürfen, und da (vgl. (114)) $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{h}_{i1} + \mathfrak{H} + \frac{1}{3}\mathfrak{M}$,

$$p' + q' = -\tfrac{1}{2}(\mathfrak{M}\cdot\{\mathfrak{H} + \tfrac{1}{3}\mathfrak{M}\}).$$

Der Formel (153) entspricht die Gleichung

$$r' = \frac{1}{9}\mathfrak{M}^2.$$

δ) Es soll angenommen werden, der Kürze halber ohne Beweis, daß man bei gleichzeitiger Anwesenheit der verschiedenen Elektronenarten einfach die unter α), β), γ) betrachteten Energieanteile zu addieren hat. Da nun die Summe von (148), (150) und $p + q - r$ den Wert (XXXIX) und ebenso die Summe von (149), (151) und $p' + q' - r'$ den Wert (XL) liefert, so fehlt an der vollständigen Übereinstimmung mit den in der vorigen Nummer gewonnenen Resultaten nur das Eine, daß in diesen die jetzt unter α) genannte Energie der Leitungselektronen nicht auftritt. Es rührt dies lediglich daher, daß wir in Nr. **51** die Gleichung (XXXIII''') benutzt haben, in welcher die von der Beschleunigung der Elektronen abhängigen Glieder (Nr. **37**) vernachlässigt sind. Ebenso wie der Einfluß dieser Glieder bei den Strömen in Metallen weit gegen die elektrische Kraft $\mathfrak{E}$ zurücktritt, verschwindet auch die Summe der Bewegungsenergien der einzelnen Elektronen gegen die Energie des gesamten magnetischen Feldes[77]).

Zur Erläuterung füge ich hinzu, daß zwar bei einem einzigen bewegten Elektron der weitaus größte Teil der magnetischen Energie in einem äußerst kleinen Raume S_1 in unmittelbarer Nähe des Teilchens liegt, sodaß der weiter entlegene Raum S_2 nur sehr wenig davon enthält, daß aber, wenn in einem Leiterelement unzählig viele Elektronen in derselben Richtung fließen, die entsprechenden schwachen Felder sich in der weiteren Umgebung S_2 superponieren und, kann man sagen, verstärken. Da nun die Energie des resultierenden Feldes pro Volumeneinheit dem Quadrate der magnetischen Kraft proportional ist, so kann sie am Ende die Summe der in den Räumen S_1 vorhandenen Energien weit übersteigen.

b) *Energiefluß.* Man überzeugt sich leicht davon, daß in einem ruhenden System an der Grenzfläche zweier Körper die normale Komponente des Energieflusses stetig sein muß. Bilden wir nun in einem Nichtleiter die in Nr. **35** c) erwähnte zylindrische Höhlung, und denken wir uns zwei der Grundfläche parallele Ebenen σ_1 und σ_2, die eine in der Höhlung, die andere außerhalb derselben in unmittelbarer Nähe jener Fläche, so werden diese von gleichen Energiemengen durch-

77) Siehe, was das Verhältnis der beiden Energien betrifft: *A. Schuster,* On electric inertia and the inertia of electric convection, Phil. Mag. (6) 1 (1901), p. 227.

strömt. Dasselbe gilt, wenn die Höhlung nicht vorhanden ist, und also auch σ_1 in der Materie liegt. Andererseits wissen wir, daß der Zustand an σ_2 in beiden Fällen derselbe ist, da die Entfernung der Materie aus der Höhlung keinen hier in Betracht kommenden Einfluß auf den übrigbleibenden Teil des Körpers hat. Folglich muß der ursprünglich durch σ_1 stattfindende Energiefluß dem nach Bildung der Höhlung bestehenden gleich sein. Letzterer ist nach (XV) $c[\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{h}]_n$, wenn $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{h}$ sich auf den Äther in der Höhlung beziehen. Da nun dieser Ausdruck nur von den zu σ_1 parallelen Komponenten von $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{h}$ abhängt und diese, weil das System ruht, den gleichgerichteten Komponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ in dem Körper ohne Höhlung gleich sind (Nr. **35** c)), so finden wir für den in diesem existierenden Energiestrom $c[\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{H}]_n$ im Einklang mit (XXXVII).

53. Fiktive Spannungskomponenten in ruhenden unmagnetisierten Nichtleitern[78]). Die auf ein Volumenelement eines ponderabelen Körpers ausgeübte ponderomotorische Wirkung läßt sich in verschiedener Weise berechnen; man kann z. B. von den in Nr. **9** bewiesenen Sätzen ausgehen. Hier soll eine direkte Berechnung, die zum Teil auf der zu Anfang der Nr. **46** gemachten Voraussetzung beruht, uns zum Ziel führen; um nicht zu weitläufig zu werden, beschränken wir uns auf den in der Überschrift angezeigten Fall. Die Ausdehnung der Theorie auf magnetisierte Körper könnte übrigens ohne sonderliche Mühe geschehen.

a) Wir zerlegen die auf ein Teilchen A wirkende ponderomotorische Kraft in zwei Teile, deren erster von denjenigen Teilchen herrührt, die außerhalb einer um A beschriebenen physikalisch unendlich kleinen Kugel vom Radius R (Nr. **35** a)) liegen. Die x-Komponente dieses Teils beträgt nach (88)

$$\mathfrak{p}_x \frac{\partial \mathfrak{E}_{2x}}{\partial x} + \mathfrak{p}_y \frac{\partial \mathfrak{E}_{2x}}{\partial y} + \mathfrak{p}_z \frac{\partial \mathfrak{E}_{2x}}{\partial z} + \frac{1}{c}(\dot{\mathfrak{p}}_y \mathfrak{H}_{2z} - \dot{\mathfrak{p}}_z \mathfrak{H}_{2y}),$$

also, wenn man die Werte (110), (111) und (112) einführt und auf die Volumeneinheit reduziert,

$$(154) \quad \mathfrak{P}_x \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \mathfrak{P}_y \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} + \mathfrak{P}_z \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} + \frac{1}{c}(\dot{\mathfrak{P}}_y \mathfrak{H}_z - \dot{\mathfrak{P}}_z \mathfrak{H}_y)$$
$$+ \frac{1}{5}\mathfrak{P}_x \operatorname{div} \mathfrak{P} + \frac{2}{5}\mathfrak{P}_x \frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial x} + \frac{1}{5}\mathfrak{P}_y\left(\frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{P}_y}{\partial x}\right) + \frac{1}{5}\mathfrak{P}_z\left(\frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{P}_z}{\partial x}\right).$$

Um den noch fehlenden Teil der pro Volumeneinheit wirkenden

78) Eine Behandlung der Spannungen findet man auch bei *Walker,* Aberration etc., Part 3.

Kraft $\mathfrak{F}$ zu erhalten, denken wir uns alle Verbindungsstrecken zwischen je zwei Teilchen A, A' gezogen, insofern diese Strecken $< R$ sind, und an die Endpunkte (x, y, z), (x', y', z') jeder Strecke die Zahlen $\mathfrak{k}, \mathfrak{k}'$ gesetzt, welche die von A' auf A, bez. von A auf A' in der x-Richtung ausgeübten Kräfte darstellen. Die Summe aller Zahlen, die innerhalb eines physikalisch unendlich kleinen Raumes S zu verzeichnen sind, liefert uns, nachdem sie mit S dividiert ist, den gesuchten Beitrag zu $\mathfrak{F}_x$. Da nun jedesmal $\mathfrak{k} + \mathfrak{k}' = 0$, so läßt sich hier, wenn die Dimensionen von S im Vergleich zu R sehr groß sind, eine Methode wie die in Nr. 28 b) geschilderte anwenden. Das Resultat erscheint als die mit dem negativen Vorzeichen genommene Divergenz eines gewissen Vektors und zwar sind die Komponenten desselben

$$\sum(x - x')\,\mathfrak{k}, \quad \sum(y - y')\,\mathfrak{k}, \quad \sum(z - z')\,\mathfrak{k},$$

wo sich die Summation über alle in der Volumeneinheit liegenden Teilchenpaare erstreckt.

Indem wir nun

$$(155) \qquad -\sum(x - x')\,\mathfrak{k} = (X_x)_1, \quad -\sum(y - y')\,\mathfrak{k} = (X_y)_1, \quad -\sum(z - z')\,\mathfrak{k} = (X_z)_1, \text{ u. s. w.}$$

setzen, eine Schreibweise, die sich bald rechtfertigen wird, finden wir für die zu (154) zu addierende Größe

$$\frac{\partial (X_x)_1}{\partial x} + \frac{\partial (X_y)_1}{\partial y} + \frac{\partial (X_z)_1}{\partial z}.$$

Wir wollen auch, soweit das geht, den Ausdruck (154) auf dieselbe Gestalt bringen. Was die zweite Zeile betrifft, so gelingt dieses sofort. Man kann nämlich für dieselbe schreiben

$$\frac{\partial (X_x)_2}{\partial x} + \frac{\partial (X_y)_2}{\partial y} + \frac{\partial (X_z)_2}{\partial z},$$

wenn

$$(156) \quad (X_x)_2 = \tfrac{3}{10}\mathfrak{P}_x^2 + \tfrac{1}{10}(\mathfrak{P}_y^2 + \mathfrak{P}_z^2), \ (X_y)_2 = \tfrac{1}{5}\mathfrak{P}_x\mathfrak{P}_y, \ (X_z)_2 = \tfrac{1}{5}\mathfrak{P}_x\mathfrak{P}_z. \quad \text{u. s. w.}$$

Die erste Zeile von (154) aber läßt sich dadurch umformen, daß wir in den ersten drei Gliedern $\mathfrak{P}$ durch $\mathfrak{D} - \mathfrak{E}$ und dann in $-\mathfrak{E}_y\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y}$ und $-\mathfrak{E}_z\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z}$ die Differentialquotienten durch $\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} + \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{H}}_z$ und $\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} - \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{H}}_y$ ersetzen. Zu gleicher Zeit substituieren wir

$$\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{P}}_y = \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} - \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{E}}_y, \quad \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{P}}_z = \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} - \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{E}}_z$$

und beachten, daß $\operatorname{div}\mathfrak{D} = 0$, $\operatorname{div}\mathfrak{H} = 0$. Setzt man

$$(157)\begin{cases} X_x = \mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x - \frac{1}{2}(\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{D}) + \mathfrak{H}_x^2 - \frac{1}{2}\mathfrak{H}^2 + [(X_x)_1 + (X_x)_2 + \frac{1}{2}(\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{P})], \\ X_y = \mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_y + \mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_y + [(X_y)_1 + (X_y)_2], \\ X_z = \mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_z + \mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_z + [(X_z)_1 + (X_z)_2], \end{cases}$$

u. s. w.,

dann wird das Schlußresultat dieser Rechnungen

$$(158)\qquad \mathfrak{F}_x = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{H}]_x, \text{ u. s. w.}$$

b) Verlegt man alle auf ein Teilchen A wirkenden Kräfte nach dem Mittelpunkt O (Nr. **12**), so kommt ein Kräftepaar zum Vorschein; auch dieses, oder vielmehr die Summe $\mathfrak{N}$ aller dieser Kräftepaare pro Volumeneinheit wollen wir berechnen. Insofern nun die auf ein bestimmtes Teilchen wirkenden Kräfte von den um mehr als R von demselben entfernten Teilen des Systems ausgehen, sind die Komponenten des Drehmoments nach (82)

$$\mathfrak{E}_{2z}\mathfrak{p}_y - \mathfrak{E}_{2y}\mathfrak{p}_z, \text{ u. s. w.};$$

für den entsprechenden Beitrag zu $\mathfrak{N}_x$ erhält man mit Rücksicht auf (109)

$$(159)\qquad \mathfrak{E}_z\mathfrak{P}_y - \mathfrak{E}_y\mathfrak{P}_z = \mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_y - \mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_z.$$

Andererseits dürfen wir (Nr. **46**) die Momente zweier benachbarter Teilchen A und A' als nach Richtung und Größe gleich und ihre Wechselwirkung als eine elektrostatische betrachten (Nr. **13**). Ist nun, in Bezug auf den Mittelpunkt O von A, $\mathfrak{n}_{a'a}$ das Drehmoment der durch A' auf A ausgeübten Kräfte, und ist $\mathfrak{n}_{aa'}$ das entsprechende Moment für das Teilchen A', in Bezug auf den Mittelpunkt dieses letzteren, so läßt sich zeigen, daß

$$\mathfrak{n}_{a'a} = \mathfrak{n}_{aa'}.$$

Da ferner das gesamte Drehmoment aller zwischen A und A' wirkenden elektrostatischen Kräfte in Bezug auf einen festen Punkt, z. B. O, verschwindet, so erhält man für die x-Komponente von $\mathfrak{n}_{a'a}$

$$(160)\qquad \tfrac{1}{2}\{(z-z')\eta - (y-y')\zeta\},$$

wenn η und ζ in Bezug auf die y- und z-Achse dieselbe Bedeutung haben wie oben ξ für die x-Richtung. Die Größe, um welche (159) zu ergänzen ist, ist durch geeignete Summation von (160) zu berechnen, und man sieht leicht, daß man setzen darf

$$\mathfrak{N}_x = \mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_y - \mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_z + \sum[(z-z')\eta - (y-y')\zeta], \text{ u. s. w.},$$

wenn das Zeichen Σ sich, ähnlich wie in (155), in der Weise auf alle in der Volumeneinheit liegenden Verbindungsstrecken, die $< R$ sind, bezieht, daß jede Strecke nur einmal genommen wird.

Aus den Gleichungen (155), (156) und (157) geht hervor, daß

(161) $$\mathfrak{N}_x = Z_y - Y_z, \text{ u. s. w.}$$

Ob nun Z_y von Y_z, u. s. w. verschieden sei, und also ein von Null verschiedenes Drehmoment bestehe, das hängt von den speziellen Eigenschaften des Körpers ab. Ein in elektrischer Hinsicht anisotropes Teilchen, wie es Krystallmoleküle wahrscheinlich sind, und wie wir es in Nr. **43** d) behandelten, würde im allgemeinen, wenn es in einem elektrischen Felde in bestimmter Richtung festgehalten wird, infolge der an jener Stelle berechneten Polarisation ein Drehmoment erleiden. Wäre es frei drehbar, so würde es schließlich eine solche Lage erhalten, daß kein Kräftepaar mehr besteht[79]). Anders verhielte sich ein Körper, bei dem sich gewisse elastische Kräfte den Richtungsänderungen der Moleküle widersetzten[80]); bei einem solchen bliebe ein von dem elektrischen Felde herrührendes Drehmoment $\mathfrak{N}$ bestehen, das eben dem elastischen Drehmomente das Gleichgewicht halten würde.

Wir wollen indes auf diese Verhältnisse nicht weiter eingehen. Wir setzen vielmehr von jetzt ab voraus, daß die Teilchen isotrop seien, und daß für ein jedes die Gleichung (127) gelte; dann ist, da das Moment die Richtung des Feldes hat, kein Drehmoment vorhanden. Es verschwindet also auch $\mathfrak{N}$ und es müssen sich bei näherer Betrachtung der Werte (157) die Gleichheiten

$$Z_y = Y_z, \text{ u. s. w.}$$

herausstellen.

c) An die Gleichungen (158) knüpfen sich ähnliche Bemerkungen wie früher an (13)—(15). Die Größen X_x, X_y, X_z, u. s. w. können als fiktive Spannungskomponenten, und zwar nur als *fiktive* aufgefaßt werden. Die Angriffsstellen der von dem Äther auf die Materie eines Volumenelementes ausgeübten Wirkung liegen in Wirklichkeit *in* dem Elemente.

Daß der Vektor

$$\frac{1}{c}[\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{H}] = \frac{1}{c^2}\mathfrak{S}$$

als der pro Volumeneinheit des ponderabelen Körpers bestehende elektromagnetische Impuls aufgefaßt werden kann, und daß also allgemein für diesen Impuls die Gleichung

(XLI) $$\mathfrak{G}^a = \frac{1}{c^2}\int \mathfrak{S}\, dS$$

gilt, braucht kaum gesagt zu werden.

79) Freilich wäre dann an den Betrachtungen von Nr. **43** einiges zu ändern.

80) Vgl. *Voigt,* L'état actuel de nos connaissances sur l'élasticité des cristaux, Rapports du Congrès de physique de 1900, Paris 1, p. 277.

d) Die Werte der fiktiven Spannungskomponenten lassen sich in einer Form darstellen, die den analogen Gleichungen der *Hertz*'schen Theorie sehr ähnlich ist. Zu diesem Zwecke hat man die bisherigen Resultate in Beziehung zu setzen zu der Variation, welche der früher (Nr. **51**) mit W_{ep} bezeichnete Teil der elektrischen Energie dann erleidet, wenn bei konstant gehaltenem $\mathfrak{P}$ unendlich kleine Verrückungen $\mathfrak{q}$ stattfinden (Nr. **46**). Da $W_{ep} = \frac{1}{2}(\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{P})$, so ist

$$(162) \qquad \delta W_{ep(\delta \mathfrak{P}=0)} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{P} \cdot \delta \mathfrak{E}_{(\delta \mathfrak{P}=0)}).$$

Hier setzen wir zunächst für $\delta \mathfrak{E}$ das Glied $-\delta_1 \mathfrak{d}_{i1}$ aus der Gleichung (136) ein. Insofern dieser Vektor von der Wirkung herrührt, die das betrachtete Teilchen A von einem einzigen benachbarten Teilchen A' erleidet, sind seine Komponenten nach (135), wenn man

$$(x'-x)\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial x} + (y'-y)\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial y} + (z'-z)\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial z} = a_x, \text{ u. s. w.}$$

setzt,

$$(163) \qquad a_x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \, \partial x'} + a_y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \, \partial y'} + a_z \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \, \partial z'}, \text{ u. s. w.}$$

Wir haben jetzt über alle Teilchen A', die um weniger als R von A entfernt sind, zu summieren, die drei dadurch aus (163) entstehenden Ausdrücke, wie in (162) angegeben, mit $\frac{1}{2}\mathfrak{P}_x$, u. s. w., oder $\frac{1}{2}N\mathfrak{p}_x$, u. s. w. zu multiplizieren und sie dann zueinander zu addieren. Offenbar sind nun

$$\mathfrak{p}_x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \, \partial x'} + \mathfrak{p}_y \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \, \partial x'} + \mathfrak{p}_z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \, \partial x'}, \text{ u. s. w.}$$

gerade die Kraftkomponenten, die wir früher mit ξ, η, ζ bezeichnet haben; es folgt also als erster Beitrag zu (162)

$$\left\{\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} N \sum (x'-x)\xi + \frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial y} \cdot \frac{1}{2} N \sum (y'-y)\xi \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial z} \cdot \frac{1}{2} N \sum (z'-z)\xi \right\} + \text{u. s. w.}$$

Da die hier auftretenden Summen sich auf die rings um ein einziges Teilchen innerhalb der Entfernung R von demselben liegenden Nachbarteilchen beziehen, die Summen in (155) aber auf alle in der Volumeneinheit befindlichen Teilchenpaare, so sind die Koeffizienten von $\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial y}$, $\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial z}$, u. s. w. genau die Ausdrücke, die wir früher mit $(X_x)_1$, $(X_y)_1$, $(X_z)_1$, u. s. w. bezeichnet haben.

Ähnliches ergibt sich bei Untersuchung desjenigen Teils von (162), welcher den Gliedern

$$\operatorname{div} \mathfrak{q}(\mathfrak{E} + \tfrac{1}{3}\mathfrak{P}) - \delta_2 \mathfrak{d}_{i1}$$

in (136) entspricht. Das Glied $\operatorname{div} \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{E}$ liefert nämlich den Anteil

$\operatorname{div} \mathfrak{q} \cdot \frac{1}{2}(\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{P})$, wo der Koeffizient von $\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial x}$ mit dem letzten Gliede in der ersten Gleichung (157) übereinstimmt. Was weiter den Vektor

$$\operatorname{div} \mathfrak{q} \cdot \tfrac{1}{3} \mathfrak{P} - \delta_2 \mathfrak{d}_{i1}$$

anbelangt, so sind seine Komponenten nach (134)

$$\frac{3}{5} \frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial x} \mathfrak{P}_x + \frac{1}{5} \frac{\partial \mathfrak{q}_y}{\partial y} \mathfrak{P}_x + \frac{1}{5} \frac{\partial \mathfrak{q}_z}{\partial z} \mathfrak{P}_x + \frac{1}{5} \left(\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{q}_y}{\partial x} \right) \mathfrak{P}_y$$
$$+ \frac{1}{5} \left(\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{q}_z}{\partial x} \right) \mathfrak{P}_z, \text{ u. s. w.}$$

In dem hieraus entspringenden Teile von (162) erscheinen $\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial y}$, $\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial z}$, u. s. w. mit Koeffizienten, in welchen man die Größen $(X_x)_2$, $(X_y)_2$, $(X_z)_2$, u. s. w. (Gl. (156)) wieder erkennt.

Zusammenfassend können wir sagen: Bringt man den vollständigen Wert von (162) auf die Form

$$(164) \qquad a_{11} \frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial y} + a_{13} \frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial z} + \text{u. s. w.},$$

dann fallen die Koeffizienten a_{11}, a_{12}, a_{13}, u. s. w. mit den in eckigen Klammern eingeschlossenen Gliedern der Spannungskomponenten (157) zusammen. Aus diesem Grunde dürfen wir statt jener Formeln schreiben

$$\text{(XLII)} \quad X_x = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_x - \mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_y - \mathfrak{E}_z \mathfrak{D}_z) + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}_x^2 - \mathfrak{H}_y^2 - \mathfrak{H}_z^2)$$
$$+ \left(\frac{\partial W_{ep}}{\partial x_x} \right)_{\mathfrak{P}}, \text{ u. s. w.},$$

$$\text{(XLIII)} \quad \tfrac{1}{2}(X_y + Y_x) = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_y + \mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_x) + \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_y + \left(\frac{\partial W_{ep}}{\partial x_y} \right)_{\mathfrak{P}}, \text{ u. s. w.},$$

wo die letzten Glieder eine ähnliche Bedeutung haben wie die entsprechenden Größen in den Formeln (XVI) und (XVII) des vorigen Artikels. Um (XLIII) zu erhalten, beachte man, daß man, um einem Volumelement die Schiebung x_y ohne Rotation zu erteilen, jeder der Größen $\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial y}$ und $\frac{\partial \mathfrak{q}_y}{\partial x}$ den Wert $\frac{1}{2} x_y$ beilegen muß; folglich ist nach (164)

$$\left(\frac{\partial W_{ep}}{\partial x_y} \right)_{\mathfrak{P}} = \tfrac{1}{2}(a_{12} + a_{21}).$$

54. Energie und Energiefluß in bewegten Nichtleitern. Verifizierung der Resultate. Man wird es nicht für überflüssig halten, die vorhergehenden Schlüsse an dem Energiegesetze zu prüfen; dieses verlangt ja, daß für jedes substantielle Volumenelement des Körpers die Arbeit der auf dasselbe wirkenden ponderomotorischen Kraft, vermehrt um die infolge des *Poynting*'schen Stromes verlorene Energie,

der Verminderung des elektromagnetischen Energieinhaltes gleich sei. Bevor wir indes zu dieser Verifizierung schreiten können, bedarf das bereits Gefundene noch einiger Ergänzung. Zwar genügt es, da wir die Größen mit $\mathfrak{w}^2$ fortwährend vernachlässigen, die ponderomotorischen Kräfte, eben weil sie noch mit Geschwindigkeitskomponenten multipliziert werden müssen, für den Ruhezustand zu kennen. Was aber W_e, W_m und den Energiestrom betrifft, so ist vorher zu untersuchen, inwiefern die Bewegung eine Modifikation herbeiführt.

a) Es zeigt sich nun bei näherer Betrachtung der in Nr. **52** a) mitgeteilten Berechnung von W_e, daß die Formeln (148) und (150) noch immer richtig sind; bei der vorausgesetzten Abwesenheit von Magnetisierung gelten nämlich sowohl für $\mathfrak{E}_1$, wie auch für $\mathfrak{E}_2$ die früher angenommenen Ausdrücke. Wir erinnern weiter daran (vgl. den Schluß von Nr. **11**), daß die elektrische Energie eines elektrostatischen Systems durch eine Translation nicht geändert wird; wir dürfen daher noch immer mit dem Ausdrucke (152) oder, da bei einem elektrostatischen System $\mathfrak{d}$ sich nur um eine Größe von der Ordnung $\mathfrak{w}^2$ von $\mathfrak{d}'$ unterscheidet, mit

$$-\tfrac{1}{2}(\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{d}'_{i1}) \tag{165}$$

rechnen, während r wieder durch (153) bestimmt wird. In dem Ausdrucke (131) für die Eigenenergie eines Teilchens aber hat man unter $\mathfrak{f}$ die elektrische Kraft zu verstehen, der es in Wirklichkeit unterworfen ist, d. h., wenn keine elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}^{ev}$ vorhanden ist, die Kraft (vgl. (115))

$$\mathfrak{d}'_i = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{H}] + \tfrac{1}{3}\mathfrak{P} + \mathfrak{d}'_{i1} = \mathfrak{E}' + \tfrac{1}{3}\mathfrak{P} + \mathfrak{d}'_{i1}.$$

Hier ist $\mathfrak{E}'$ die elektrische Kraft, von welcher die Polarisation nach der Gleichung (XXXIV''') abhängt. Addiert man (165) zu der Eigenenergie des Teilchens, dann erhält man

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{p}\cdot\{\mathfrak{E}' + \tfrac{1}{3}\mathfrak{P}\}),$$

sodaß

$$p + q = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{P}\cdot\{\mathfrak{E}' + \tfrac{1}{3}\mathfrak{P}\})$$

wird.

Das Resultat ist

$$W_e = \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}^2 + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}'\cdot\mathfrak{P}) = \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}^2 + \tfrac{1}{2}((\eta')\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{P}). \tag{XXXIX''}$$

Für die magnetische Energie bleibt die Formel

$$W_m = \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}^2 \tag{XL'}$$

anwendbar. Zwar ist jetzt, wie man aus (110) und (108) ersieht, die Feldstärke 2

$$\mathfrak{H} + \frac{1}{3c}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{P}]$$

und die mittlere Feldstärke 1

$$-\frac{1}{3c}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{P}];$$

die von $\mathfrak{w}$ abhängigen Glieder verschwinden aber aus der Summe der Größen, die man jetzt statt (149) und (151) erhält. Außerdem ist zu bemerken, daß den in der Kugel B liegenden elektrischen Momenten eine magnetische Energie entspricht, die von der Ordnung $\mathfrak{w}^2$ ist (Schluß von Nr. **11**).

b) Etwas länger müssen wir bei der Wanderung der Energie verweilen. Es soll jetzt von dem Energieflusse relativ zur Materie die Rede sein; $\mathfrak{S}$ soll also einen solchen Vektor bedeuten, daß für ein an der Bewegung $\mathfrak{w}$ teilnehmendes Element $d\sigma$ die Größe $\mathfrak{S}_n d\sigma$ die pro Zeiteinheit durchströmende Energiemenge darstellt. Für diesen Vektor ist nun die im Anfang von Nr. **52** b) erwähnte Stetigkeit im allgemeinen nicht mehr vorhanden.

Man denke sich bei zwei in der Fläche σ aneinander grenzenden Körpern einen Zylinder konstruiert, dessen physikalisch unendlich kleine Grundflächen auf beiden Seiten des Elementes $d\sigma$ liegen und dessen Höhe im Vergleich zu den Dimensionen der Grundfläche physikalisch unendlich klein höherer Ordnung ist. Auf diesen Zylinder, der sich mit der Materie verschieben möge ($\mathfrak{w}$ soll stetig sein), wende man den zu Anfang dieser Nummer angeführten Energiesatz an, und zwar in der Weise, daß man Größen, die der Höhe des Zylinders proportional sind, vernachlässigt. Es kommt dann weder die Arbeit der dem letzten Gliede von (158) entsprechenden ponderomotorischen Kraft, noch die Änderung der in dem Zylinder enthaltenen Energiemenge in Betracht. Für die ponderomotorische Kraft darf man schreiben (siehe den Anfang von V 13, Nr. **3**)

$$\{\mathfrak{T}_{II}^n - \mathfrak{T}_I^n\}\, d\sigma,$$

wo $\mathfrak{T}^n$ die fiktive Spannung für ein Flächenelement mit der Normale n bedeutet, und es ergibt sich

$$(\{\mathfrak{T}_{II}^n - \mathfrak{T}_I^n\}\cdot\mathfrak{w}) + \mathfrak{S}_{n\,II} - \mathfrak{S}_{n\,I} = 0,$$

also Kontinuität der Größe

$$\mathfrak{S}_n + (\mathfrak{T}^n\cdot\mathfrak{w}). \tag{166}$$

Wir schließen hieraus (vgl. Nr. **52** b)), daß für ein beliebiges Flächenelement im ponderabelen Körper diese letztere Größe denselben Wert hat, als wenn es, den Spaltflächen parallel, in einer engen Spalte läge. Da nun für den reinen Äther der jetzt betrachtete Energiestrom offenbar durch

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{s} - (w_e + w_m)\mathfrak{w}$$

bestimmt wird, so ergibt sich, mit Rücksicht auf (XIII), (XIV), (XV), (XVI), (XIX) und (XX), dass für dieses Medium die Größe (166) mit

$$c[\mathfrak{d}'\cdot\mathfrak{h}']_n$$

zusammenfällt. Für die in der Spalte liegende Ebene hängt diese Größe nur von den den Spaltflächen parallelen Komponenten von $\mathfrak{d}'$ und $\mathfrak{h}'$ ab, und diese Komponenten stimmen, wie wir bereits wissen (Nr. **35** c)), mit den gleichgerichteten Komponenten von $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$ im ponderabelen Körper überein. Folglich dürfen wir für das Innere dieses Körpers den Ausdruck (166) der Komponente

$$c[\mathfrak{E}'\cdot\mathfrak{H}']_n$$

gleichsetzen und erhalten für den Energiefluß die Formel

(XLIV) $$\mathfrak{S}_n = c[\mathfrak{E}'\cdot\mathfrak{H}']_n - (\mathfrak{T}^n\cdot\mathfrak{w}).$$

c) Nach dieser Vorbereitung gelingt die beabsichtigte Verifizierung ohne Mühe. Wir fassen wie gesagt ein substantielles Volumenelement ins Auge, schreiben aber alle Ausdrücke für die Volumeneinheit, sowie auch für die Zeiteinheit hin. Bei den Transformationen werden, unter fortwährender Vernachlässigung von Gliedern mit $\mathfrak{w}^2$, an geeigneter Stelle die Gleichungen (III″a), (IV″a), (XXXI′), (XXX′), (XXXIX) und (XL) herangezogen; auch bedienen wir uns verschiedener in V 13, Nr. **4** erklärten Bezeichnungen.

Die Arbeit der ponderomotorischen Kraft besteht nach (158) aus den beiden Teilen

(167) $$-\frac{1}{c}\left(\mathfrak{w}\cdot\frac{\partial}{\partial t}[\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{H}]\right) = -\frac{1}{c}\left(\mathfrak{w}\cdot[\dot{\mathfrak{E}}\cdot\mathfrak{H}]\right) - \frac{1}{c}(\mathfrak{w}\cdot[\mathfrak{E}\cdot\dot{\mathfrak{H}}])$$
$$= \frac{1}{c}([\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{H}]\cdot\dot{\mathfrak{E}}) - \frac{1}{c}([\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{E}]\cdot\dot{\mathfrak{H}}) = \frac{1}{c}([\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{H}]\cdot\underline{\dot{\mathfrak{E}}}) - \frac{1}{c}([\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{E}]\cdot\underline{\dot{\mathfrak{H}}})$$

und

(168) $$\mathfrak{w}_x\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) + \text{u. s. w.},$$

während die hinausströmende Energiemenge zerfällt in

(169) $$c\,\mathrm{div}\,[\mathfrak{E}'.\mathfrak{H}'] = -c(\mathfrak{E}'.\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H}') + c(\mathfrak{H}'\cdot\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}')$$
$$= -(\mathfrak{E}'\cdot\underline{\dot{\mathfrak{D}}}) - (\mathfrak{H}'\cdot\underline{\dot{\mathfrak{H}}}) = -(\mathfrak{E}'\cdot\underline{\dot{\mathfrak{E}}}) - (\mathfrak{E}'\cdot\underline{\dot{\mathfrak{P}}}) - (\mathfrak{H}'\cdot\underline{\dot{\mathfrak{H}}})$$

und

(170) $$\mathrm{div}\,\mathfrak{S}'.$$

Hier ist $\mathfrak{S}'$ ein solcher Vektor, daß für jede Richtung n

$$\mathfrak{S}_n' = -(\mathfrak{T}^n\cdot\mathfrak{w}).$$

Die Summe von (167) und (169) ist

(171) $$-(\mathfrak{E}\cdot\underline{\dot{\mathfrak{E}}}) - (\mathfrak{E}'\cdot\underline{\dot{\mathfrak{P}}}) - (\mathfrak{H}\cdot\underline{\dot{\mathfrak{H}}}).$$

Desgleichen die von (168) und (170), Gleichheit von X_y und Y_x u. s. w. vorausgesetzt,

$$(172)\qquad -\left\{X_x\frac{\partial \mathfrak{w}_x}{\partial x}+\text{u. s. w.}+X_y\left(\frac{\partial \mathfrak{w}_x}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{w}_y}{\partial x}\right)+\text{u. s. w.}\right\},$$

also, wenn man zunächst von den letzten Gliedern in (XLII) und (XLIII) absieht,

$$\begin{aligned}
&-\tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x-\mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_y-\mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_z)\dot{x}_x-\text{u.s.w.}-\tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}_x^2-\mathfrak{H}_y^2-\mathfrak{H}_z^2)\dot{x}_x-\text{u.s.w.}\\
&-\tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_y+\mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_x)\dot{x}_y-\text{u. s. w.}-\mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_y\dot{x}_y-\text{u. s. w.}\\
=&-\{\tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x+\mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_y+\mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_z)+\tfrac{1}{2}\mathfrak{H}^2\}(\dot{x}_x+\dot{y}_y+\dot{z}_z)\\
&+(\mathfrak{E}\cdot\{\underline{\dot{\mathfrak{D}}}-\dot{\mathfrak{D}}_{(r)}\})+(\mathfrak{H}\cdot\{\underline{\dot{\mathfrak{H}}}-\dot{\mathfrak{H}}_{(r)}\})\\
=&-(W_e+W_m)\operatorname{div}\mathfrak{w}+(\mathfrak{E}\cdot\{\underline{\dot{\mathfrak{E}}}-\dot{\mathfrak{E}}_{(r)}\})+(\mathfrak{E}'\cdot\{\underline{\dot{\mathfrak{P}}}-\dot{\mathfrak{P}}_{(r)}\})\\
&\qquad\qquad\qquad+(\mathfrak{H}\cdot\{\underline{\dot{\mathfrak{H}}}-\dot{\mathfrak{H}}_{(r)}\}).
\end{aligned}$$

Indem wir dieses zu (171) addieren und den soeben fortgelassenen Teil von (172) hinzufügen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
&-(W_e+W_m)\operatorname{div}\mathfrak{w}-(\mathfrak{E}\cdot\dot{\mathfrak{E}}_{(r)})-(\mathfrak{E}'\cdot\dot{\mathfrak{P}}_{(r)})-(\mathfrak{H}\cdot\dot{\mathfrak{H}}_{(r)})\\
&\qquad-\left(\frac{\partial W_{ep}}{\partial x_x}\right)_{\mathfrak{P}}\dot{x}_x-\text{u. s. w.}-\left(\frac{\partial W_{ep}}{\partial x_y}\right)_{\mathfrak{P}}\dot{x}_y-\text{u. s. w.},
\end{aligned}$$

was offenbar die Abnahme der elektromagnetischen Energie ist.

Wir schließen diese Betrachtungen mit der Bemerkung, daß man der Theorie eine Gestalt geben kann, in der die Energie mehr als in unserer Darstellung in den Vordergrund tritt. Faßt man die Energie teils als potentielle, teils als kinetische, im gewöhnlichen mechanischen Sinne auf, und gelingt es, aus irgend welchen Vorstellungen über die Vorgänge in den Körpern geeignete Werte für die beiden Teile abzuleiten, dann führen die Gesetze der Dynamik zu den Feldgleichungen, und zwar kann man es dabei so einrichten, daß spezielle Hypothesen betreffend den Mechanismus der Erscheinungen möglichst vermieden werden[81]).

55. Bemerkungen zu den ponderomotorischen Kräften[82]). Ein ruhender, nicht magnetisierter Körper befinde sich in einem Magnetfelde $\mathfrak{h}$. Nach der Grundgleichung (VI) wirkt auf denselben pro Volumeneinheit eine Kraft

$$\frac{1}{c}[\overline{\varrho\mathfrak{v}}\cdot\mathfrak{h}],$$

81) Siehe z. B. *F. Hasenöhrl*, Über die Grundgleichungen der elektromagnetischen Lichttheorie für bewegte Körper, Wien. Sitz.-Ber. **111**, IIa (1902), p. 1525.

82) Vgl. *Poincaré*, Électricité et optique, 2e édit., § 361.

(vgl. Nr. 27), also wenn man es nur mit einem Leitungsstrome zu tun hat (Nr. 29),

$$\frac{1}{c}[\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{h}],$$

und wenn der Körper ein Nichtleiter ist (Nr. 30),

$$\frac{1}{c}[\dot{\mathfrak{P}} \cdot \mathfrak{h}]. \tag{173}$$

Das erste Resultat wurde bereits in Nr. 36 a) erwähnt und kommt auch in der *Hertz*'schen Theorie vor. Das zweite dagegen führt in dem V 13, Nr. 24 c) betrachteten Fall nicht zu dem dort angeführten Ausdruck (49), sondern zu dem Werte

$$\mathfrak{F}_x = \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{P}}_y \mathfrak{h}_1 \ \Sigma.$$

Es fehlt eben in (173) das Glied

$$\frac{1}{c}[\dot{\mathfrak{d}} \cdot \mathfrak{h}],$$

welches den Ausdruck zu

$$\frac{1}{c}[\dot{\mathfrak{D}} \cdot \mathfrak{h}]$$

ergänzen würde.

Die V 13, Nr. 24 d) besprochene *Hertz*'sche Kraft tritt in der Elektronentheorie gar nicht auf. Diese Unterschiede zwischen den beiden Theorien hängen damit zusammen, daß (Nr. 7) nach der Elektronentheorie die ponderomotorische Kraft neben dem von den Spannungen herrührenden Teil noch den Teil

$$-\frac{1}{c^2}\int \dot{\mathfrak{s}}\, dS = -\frac{1}{c}\int [\dot{\mathfrak{d}} \cdot \mathfrak{h}]\, dS - \frac{1}{c}\int [\mathfrak{d} \cdot \dot{\mathfrak{h}}]\, dS$$

enthält.

V. Nähere Betrachtung bewegter Systeme[83]).

56. Einfluß der Erdbewegung auf elektromagnetische Erscheinungen. Wir wenden uns der Frage zu, ob eine gemeinschaftliche Translation der miteinander in Wechselwirkung stehenden Körper, wie sie jedes System in Folge des jährlichen Umlaufs der Erde und der fortschreitenden Bewegung des Sonnensystems hat, einen Einfluß auf die Erscheinungen habe. Mit $\mathfrak{w}$ bezeichnen wir

83) Vgl. zu diesem Kapitel nebst den citierten Arbeiten von *Lorentz, Larmor, Walker* und *Poincaré*, auch *Liénard*, La théorie de *Lorentz*, L'éclairage électrique 14 (1898), p. 417, 456; La théorie de *Lorentz* et celle de *Larmor*, ibid. 16 (1898), p. 320, 360; *W. Wien*, Über die Fragen, welche die translatorische Bewegung des Lichtäthers betreffen (Referat für die 70. Naturforscherversammlung 1898, Beilage zu Ann. Phys. Chem. 65).

fortan die Geschwindigkeit der Translation; mit „Ruhe“ soll „relative Ruhe“ in Bezug auf das fortschreitende System gemeint sein. Da die Geschwindigkeit der Erde 0,0001 c ist, so werden Größen, die in Bezug auf $\frac{|\mathfrak{w}|}{c}$ zweiter Ordnung sind, sich bei fast allen elektrischen Erscheinungen der Beobachtung entziehen.

a) Unsere Aufgabe wird darin bestehen, in verschiedenen Fällen den Einfluß der Translation zu untersuchen. Insofern nun die in Betracht kommenden Wirkungen elektromagnetischen Ursprungs sind, können wir die Frage mit Hilfe der im vorstehenden entwickelten Gleichungen beantworten. Was aber andere Kräfte („Molekularkräfte“), z. B. die in Nr. **43** angenommenen elastischen Kräfte anbelangt, so liegt die Sache weniger einfach, da uns der Mechanismus derselben unbekannt ist. Man kann indes folgendes bemerken.

Aus den Grundgleichungen (I)—(VI) geht hervor, daß die Bewegungen, welche in einem Elektronensystem unter dem Einfluß der elektromagnetischen Wirkungen stattfinden können, umkehrbar sind, sodaß die bei denselben vorkommenden Lagen auch in umgekehrter Folge durchlaufen werden können; es hängt dies damit zusammen, daß die Kräfte nur von den Quadraten und Produkten der Geschwindigkeitskomponenten abhängen. Es liegt nun nahe, die Umkehrbarkeit auch für diejenigen Bewegungen vorauszusetzen, bei welchen neben den elektromagnetischen Kräften auch die Wirkungen zwischen Elektronen und ungeladenen Teilchen ins Spiel kommen, eine Annahme, die offenbar involviert, daß ein Einfluß der Translation auf die elastischen Kräfte und auf die Koeffizienten η und ε sich erst in den Gliedern zweiter Ordnung zeigen kann. Dasselbe wollen wir auch für die Leitfähigkeit eines Metalles voraussetzen.

b) *Elektrostatische Systeme.* Die in Nr. **11** b α) abgeleiteten Beziehungen gelten offenbar auch für die Mittelwerte $\bar{\varrho}$, $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$, $\bar{\mathfrak{d}}$, u. s. w. Also, wenn wir einem bewegten System ein ruhendes zuordnen, dessen Dimensionen in der Translationsrichtung sich in der durch (33) bestimmten Weise von denen des ruhenden Systems unterscheiden, und in welchem $\bar{\varrho}$ dieselben Werte hat wie in letzterem, dann gilt für korrespondierende Punkte

$$\bar{\psi} = (1 - \beta^2)\bar{\varphi}_0, \tag{174}$$

und nach (35)

$$\bar{\mathfrak{f}}_x = (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} \bar{\mathfrak{f}}_{0x}, \quad \bar{\mathfrak{f}}_y = (1 - \beta^2) \bar{\mathfrak{f}}_{0y}, \quad \bar{\mathfrak{f}}_z = (1 - \beta^2) \bar{\mathfrak{f}}_{0z}. \tag{175}$$

Hieraus folgt, daß, wenn in einem gewissen Raum $\bar{\mathfrak{f}}_0$ verschwindet, in dem entsprechenden Teil des bewegten Systems $\bar{\mathfrak{f}} = 0$ sein wird.

Die Anwendung hiervon auf ein System von Konduktoren ist sehr einfach. Da die Gleichgewichtsbedingung darin besteht, daß im Inneren jedes Konduktors die Kraft $\bar{\mathfrak{f}}$ verschwindet, so werden Ladungen auf dem bewegten System dann im Gleichgewicht sein, wenn an jeder Stelle $\bar{\varrho}$ übereinstimmt mit der Dichte einer Gleichgewichtsverteilung auf einem System ruhender Konduktoren, welches man aus dem betrachteten System durch die in (33) angezeigte Deformation erhält. Gleichgewicht wird ebenfalls bestehen, wenn man in dem bewegten System alle Werte von $\bar{\varrho}$ im Verhältnis von $(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}$ zu 1 vergrößert; dann tragen in den beiden Systemen korrespondierende Flächenelemente gleiche Ladungen.

Die Formeln (175) gestatten auch direkt eine Folgerung in Bezug auf die ponderomotorischen Kräfte. Es zeigt sich, daß der Einfluß der Translation sich nicht nur was die Verteilung der Ladungen, sondern auch was die Größe jener Kräfte bei gegebenen Ladungen betrifft, auf Größen zweiter Ordnung beschränkt.

Da indes nach (34) die elektrischen Ladungen in dem bewegten System eine magnetische Kraft erster Ordnung hervorufen, so könnte man eine Wirkung auf eine Magnetnadel erwarten. Diese wird aber von einer anderen aufgehoben (siehe unten, e).

Zu obigen Schlüssen betreffend die Ladungsverteilung führen übrigens auch die Gleichungen (VII″) und (VIII″); dabei kann man die Anwesenheit beliebiger Dielektrika im Felde voraussetzen.

Da für jede Größe χ in einem sich verschiebenden elektrostatischen System die Relation

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = -\left(\mathfrak{w}_x \frac{\partial \chi}{\partial x} + \mathfrak{w}_y \frac{\partial \chi}{\partial y} + \mathfrak{w}_z \frac{\partial \chi}{\partial z}\right)$$

besteht, so kann man, wenn man von vornherein von den Gliedern zweiter Ordnung absieht, $\ddot{\Phi}$ und $\ddot{\mathfrak{A}}$ gleich Null setzen. Bei Abwesenheit von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{M}$ werden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{H}$ von der Ordnung $\frac{|\mathfrak{w}|}{c}$ (da auch $\mathfrak{P}$ in (VIII″) von dieser Ordnung ist), sodaß in $\dot{\mathfrak{A}}$ und $[\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{H}]$ das Geschwindigkeitsquadrat erscheint; die durch (IX″) und (XXXI′) bestimmte elektrische Kraft $\mathfrak{E}'$, auf die es jetzt ankommt, reduziert sich also auf $-\operatorname{grad} \Phi$. Schließlich hat man die Formel $\mathfrak{P} = (\eta)\mathfrak{E}'$ heranzuziehen, wenn man, etwa bei gegebener Ladung jedes Konduktors, $\bar{\varrho}$ oder die Flächendichte bestimmen will. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ ist am Ende aus den Formeln verschwunden.

c) *Ponderomotorische Wirkung auf einen Kondensator.* Den vorstehenden Erörterungen wollen wir die Besprechung eines interessanten Falles anschließen. Wir wissen bereits (Nr. **11** b)), daß bei jedem

geladenen System infolge der Erdbewegung eine gewisse elektromagnetische Bewegungsgröße $\mathfrak{G}^a$ vorhanden ist. Diese entsteht im Moment, wo man dem Systeme die Ladung zuführt, und verschwindet bei der Entladung. Aus der Bedeutung von $\mathfrak{G}^a$ (Nr. 7) dürfen wir daher folgern, daß das System im ersten Fall einen Stoß $-\mathfrak{G}^a$ und im zweiten einen Stoß $+\mathfrak{G}^a$ erleidet.

Wählen wir als Beispiel einen Kondensator mit Äther als Dielektrikum; die z-Achse legen wir senkrecht zu den Platten, während die Translation $\mathfrak{w}$ zunächst beliebige Richtung haben möge. Beschränkt man sich auf die Größen erster Ordnung, so kann man in der ersten Zeile von (17) die Glieder mit $\mathfrak{a}$ fortlassen und unter φ das Potential verstehen, welches im Ruhezustande bei der tatsächlich vorhandenen Ladung bestehen würde. In jeder Gleichung (17) verschwindet das letzte Glied (weil der betrachtete Zustand stationär ist) und man überzeugt sich leicht davon, daß man in der weiteren Rechnung unter φ den Mittelwert $\overline{\varphi}$ verstehen darf. Das Resultat, welches man in dieser Weise für $\mathfrak{G}^a$ erhält, ist die elektromagnetische Bewegungsgröße mit Ausschluß desjenigen Teils, der auch bei unendlicher Entfernung aller Elektronen bestehen würde. Wir berechnen also den Zuwachs, den die Bewegungsgröße erleidet, wenn die Elektronen auf die Platten gebracht werden. Gerade um diesen Zuwachs ist es uns zu tun.

Da nun

$$\dot{\varphi} = -\left(\mathfrak{w}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathfrak{w}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathfrak{w}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right),$$

und von den Integralen

$$\int \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dS, \quad \int \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dS, \text{ u. s. w.}$$

nur das eine

$$\int \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} dS = -\int \varrho \varphi \, dS$$

von Null verschieden ist, so erhält man, wenn man die in gewöhnlicher Weise berechnete elektrische Energie $\frac{1}{2}\int \varrho \varphi \, dS$ mit U bezeichnet,

$$\mathfrak{G}^a_x = \frac{2U}{c^2} \mathfrak{w}_x, \quad \mathfrak{G}^a_y = \frac{2U}{c^2} \mathfrak{w}_y, \quad \mathfrak{G}^a_z = 0.$$

Die gesuchte Bewegungsgröße ist also

$$\frac{2U}{c^2} \mathfrak{w},$$

wenn die Richtung der Translation den Platten parallel ist.

Den Fall eines Kondensators mit ponderabelem Dielektrikum

wollen wir hier nicht behandeln. Selbstverständlich bleibt für einen solchen $\mathfrak{G}^a$ von derselben Größenordnung.

Einer Anregung von *Fitz Gerald* folgend, hat *Trouton*[84]) einen Stoß bei Ladung oder Entladung des Kondensators experimentell nachzuweisen versucht, dabei aber ein negatives Resultat erhalten. Wie mir scheint, liegt dies daran, daß seine Anordnung, wie empfindlich sie auch gewesen sein möge, doch für den beabsichtigten Zweck bei weitem nicht ausreichte[85]).

Letzteres kann man nicht behaupten von einem Versuche anderer Art, den *Trouton* später, gemeinschaftlich mit *Noble* ausgeführt hat[86]). Wir fanden in Nr. **21** a), daß auf ein sich verschiebendes System im allgemeinen ein Drehmoment $[\mathfrak{G}^a \cdot \mathfrak{w}]$ wirkt, offenbar ein Moment zweiter Ordnung, das wir aber mit hinreichender Genauigkeit berechnen können, wenn wir wie oben in $\mathfrak{G}^a$ nur bis zu den Größen erster Ordnung gehen. Zu bemerken ist hierbei, daß dem oben vernachlässigten von den einzelnen Elektronen herrührenden Teil von $\mathfrak{G}^a$ kein Drehmoment entspricht. Setzen wir demgemäß für die Komponenten von $\mathfrak{G}^a$ die für den Kondensator berechneten Werte ein, dann erhalten wir als Komponenten des Kräftepaares

$$\frac{2U}{c^2}\mathfrak{w}_y\mathfrak{w}_z, \quad -\frac{2U}{c^2}\mathfrak{w}_x\mathfrak{w}_z, \quad 0.$$

Die Achse desselben liegt also in der Plattenebene, senkrecht zu der Translationsrichtung. Bildet letztere mit der Plattennormale den Winkel α, dann ist die Größe des Drehmomentes $\frac{U}{c^2}\mathfrak{w}^2 \sin 2\alpha$; es sucht den Kondensator in eine solche Lage zu drehen, daß die Platten der Translationsrichtung parallel stehen.

Die genannten Physiker haben mit einer Anordnung gearbeitet, bei der ein Kräftepaar von der berechneten Größenordnung ohne Zweifel eine beobachtbare Ablenkung bewirken mußte; trotzdem war das Resultat des Versuchs entschieden negativ. Auf die Erklärung dieses Ergebnisses komme ich weiter unten zurück (siehe Nr. **64**).

Von jetzt ab wollen wir Größen zweiter Ordnung vernachlässigen.

---

84) *F. T. Trouton,* The results of an electrical experiment, involving the relative motion of the earth and ether, suggested by the late Prof. *Fitz Gerald,* Dublin Roy. Soc. Trans. (2) 7 (1902), p. 379 (auch abgedruckt in The scientific writings of G. F. Fitz Gerald, edited by Larmor, Dublin u. London 1902, p. 557).

85) *Lorentz,* Amsterdam Zittingsverslag Akad. v. Wet. 12 (1904) (Amsterdam Proceedings, 1903—1904).

86) *F. T. Trouton* u. *H. R. Noble,* The mechanical forces acting on a charged electric condenser moving through space, London Trans. A 202 (1903), p. 165.

Also, wenn es heißt, daß irgend eine Wirkung *nicht* besteht, so bedeutet das nur, daß eine Wirkung von der Ordnung $\frac{|\mathfrak{w}|}{c}$ nicht vorhanden ist.

d) *Strom in einem vollkommenen Leiter. Kompensationsladung.* Wir bedienen uns weiterhin der Gleichungen von Nr. **10** und wenden diese, indem wir zu den Mittelwerten übergehen, zunächst auf einen vom Äther umgebenen Leiter von unmerklichem Widerstand an, in dem ein konstanter Strom $\mathfrak{J}$ besteht. Wir setzen zunächst $\bar{\varrho} = 0$, was im Falle der Ruhe gerechtfertigt sein würde, sodaß nach (VII′) $\bar{\varphi}' = 0$ wird. Für das konstante Vektorpotential $\mathfrak{a}'$ gilt nach (VIII′)

$$\Delta \bar{\mathfrak{a}}' = -\frac{1}{c}\mathfrak{J} \tag{176}$$

und es wird

$$\bar{\mathfrak{d}}' = \frac{1}{c}\operatorname{grad}(\mathfrak{w}\cdot\bar{\mathfrak{a}}'). \tag{177}$$

Diese Formel scheint auf den ersten Blick eine Wirkung des Stromes auf ruhende Elektronen außerhalb des Leiters anzuzeigen. Da aber die Kraft (177) auch auf den Körper selbst wirkt, so müssen wir unsere Voraussetzung, daß $\bar{\varrho} = 0$, fallen lassen. Man kann die Sache so auffassen, daß, wenn im Anfang diese Voraussetzung zutrifft, die Kraft (177) alsbald eine Ladung hervorbringt, die so weit anwächst, daß ihre Wirkung jene Kraft gerade aufhebt. Es ist nämlich die Dichte dieser Ladung

$$\bar{\varrho} = \frac{1}{c^2}(\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{J}), \tag{178}$$

— wobei zu beachten, daß für den ganzen Raum, wegen der solenoidalen Verteilung von $\mathfrak{J}$, $\int \bar{\varrho}\, dS = 0$ — und ihr Potential

$$\bar{\varphi}' = \frac{1}{c}(\mathfrak{w}\cdot\bar{\mathfrak{a}}').$$

Die Ladung (178) nennen wir die *Kompensationsladung.*

Hat man es nicht mit einem Leitungsstrom, sondern mit einem permanenten Magneten zu tun, so besteht gleichfalls eine Kompensationsladung. In dem Nr. **49** b) betrachteten Fall vertreten die Verteilungen (146) an der Oberfläche der Kugeln diese Ladung. Die Kompensationsladung hat zur Folge, daß der Magnet ebensowenig wie der Stromleiter auf ruhende Elektronen wirkt[87]).

87) *J. Koenigsberger* (Induktionswirkung im Dielektrikum und Bewegung des Äthers, Freiburg i. B., Berichte d. Naturf. Ges. 13 (1903), p. 95) beschreibt eine Anordnung, bei welcher die Platten eines Kondensators sich in geeigneter Lage in dem Felde eines Elektromagneten befanden; berücksichtigt man die Kompensationsladung nicht, so kann man in diesem Falle erwarten, daß die

Bei bestimmtem Strom $\mathfrak{J}$ im einen und bei bestimmter unveränderlicher Magnetisierung im anderen Fall ist $\bar{\mathfrak{a}}'$, und also nach (X') $\bar{\mathfrak{h}}'$, unabhängig von der Translation, wie für den Stromleiter aus (176), für den Magnet dagegen aus (62) erhellt. Da nun der Mittelwert des letzten Gliedes in (XX) zweiter Ordnung ist (wegen der Proportionalität von $\bar{\mathfrak{d}}$ mit $|\mathfrak{w}|$), so kann sich ein Einfluß der Erdbewegung auf die Stärke des umgebenden magnetischen Feldes nicht zeigen.

Zu den hier gezogenen Schlüssen führen übrigens auch die Grundgleichungen für die Mittelwerte, ohne daß man auf die Kompensationsladung einzugehen brauchte. Es ist nämlich in den beiden betrachteten Fällen nach (IV″a) rot $\mathfrak{E}' = 0$; und es muß im stationären Zustande sowohl im Leiter (Nr. **42**) wie auch im Magneten (Nr. **49**) $\mathfrak{E}'$ verschwinden. Die Bedingungen für $\mathfrak{E}'$ sind also eben die, welche die elektrische Kraft in einem gewöhnlichen elektrostatischen Fall bestimmen. Ist für jeden Stromkreis und für jeden Magnet die Gesamtladung Null, dann ist überall $\mathfrak{E}' = 0$.

e) *Ponderomotorische Wirkungen zwischen einem widerstandslosen stromführenden Leiter und einem geladenen Körper.* Wir bezeichnen mit K das System der Elektronen, welche die auf dem Körper vorhandene Ladung bilden, mit J das System derjenigen Elektronen, welche an dem Strom teilnehmen, mit A die zu letzterem gehörende Kompensationsladung und mit B die durch den geladenen Körper an der Oberfläche des Stromleiters hervorgerufene Influenzladung. Die Systeme K, B und J sind genau dieselben wie bei Abwesenheit der Translation. Schreibt man nun (P, Q) für die Wirkung eines Elektronensystems P auf ein zweites System Q, so ist die Gesamtwirkung auf den geladenen Körper

$$(K, K) + (B, K) + (J, K) + (A, K),$$

was aber, da die beiden letzten Glieder sich heben, nicht vom Strom abhängt.

Für die Wirkung auf den Stromleiter gilt ein ähnlicher, zwölfgliedriger Ausdruck. Aus der Eigenschaft der Kompensationsladung folgt aber

---

Platten, wenn sie leitend verbunden sind, infolge der Erdbewegung Ladungen erhalten. Das Resultat der vorläufigen Versuche war ein negatives. Die Bemerkung von *Koenigsberger,* daß die Wirkung der Kompensationsladung vernichtet und also die Kompensation aufgehoben werden wird, wenn man den Kondensator mit einer metallischen zur Erde abgeleiteten Hülle umgibt, scheint mir unrichtig. Auf die Hülle wirkt nämlich nicht bloß die Kompensationsladung, sondern auch die Kraft (177); da diese Wirkungen sich aufheben, so wird auf der Hülle gar keine Influenzladung zu Stande kommen.

$$(J, B) + (A, B) = 0, \quad (J, A) + (A, A) = 0,$$

(die Größen in dieser letzten Gleichung sind übrigens von der zweiten Ordnung) und es ist

$$(K, J) + (B, J) = 0, \quad (K, A) + (B, A) = 0,$$

da K und B zusammengenommen im Inneren des Stromleiters kein elektrisches Feld und also auch (vgl. Gl. (34)) kein magnetisches Feld hervorbringen. Die gesuchte Wirkung reduziert sich somit auf

$$(K, B) + (B, B) + (A, J) + (J, J).$$

Hier sind die beiden ersten Glieder unabhängig von dem Strom und die beiden letzten von dem geladenen Körper; eine spezifische Wirkung zwischen diesen beiden findet also auch unter dem Einflusse der Erdbewegung nicht statt.

Der gleiche Schluß gilt für einen geladenen Körper und einen Magneten. *Röntgen* hat denn auch keine Wirkung eines geladenen Kondensators auf eine Magnetnadel konstatieren können[88]).

f) *Elektrodynamische Wirkung zwischen zwei Stromleitern.* Es seien J und J' die strömenden Elektronensysteme, A und A' die Kompensationsladungen. Die Wirkung des ersten Körpers auf den zweiten ist dann

$$(J, J') + (A, J') + (J, A') + (A, A').$$

Die beiden letzten Glieder sind gleich und entgegengesetzt (sie sind überdies von der zweiten Ordnung) und die beiden ersten hängen von den zu J und A gehörenden magnetischen Feldern ab. Die Summe derselben ist also bis auf Größen zweiter Ordnung unabhängig von der Translation, weil dies (oben, d) von dem zu J gehörigen Felde gilt und die von A herrührende Feldstärke eine Größe zweiter Ordnung ist.

g) *Strom in einem Leiter von merklichem Widerstand.* Wir betrachten jetzt eine stationäre Strömung in einem Leiter mit Widerstand unter dem Einflusse gegebener elektromotorischer Kräfte und zwar in der Voraussetzung, daß diese letzteren durch die Translation nicht modifiziert werden; dabei haben wir unsere Aufmerksamkeit auch auf die Ladungen zu richten, von welchen in diesem Falle ein Strom immer begleitet ist. Wir fassen diese in der Benennung „Stromladung" zusammen und bezeichnen ihre Dichte mit ϱ_s.

Für den Fall der Ruhe, und in der Voraussetzung, daß überall $\varepsilon = 1$, und daß keine Magnetisierung besteht, gelten folgende Glei-

88) *Röntgen,* Ann. Phys. Chem. 35 (1888), p. 267.

chungen, die sich aus (VII''), (VIII''), (IX''), (XXXIII'''), (XXXV) und (I'') ergeben,

$$\Delta \Phi_0 = -\varrho_s, \quad \Delta \mathfrak{A}_0 = -\frac{1}{c}\mathfrak{J}_0,$$

$$\mathfrak{E}_0 = -\operatorname{grad}\Phi_0,$$

$$\mathfrak{J}_0 = \sigma(\mathfrak{E}_0 + \mathfrak{E}^{el}), \quad \mathfrak{D}_0 = \mathfrak{E}_0,$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{D}_0 = \varrho_s.$$

Dagegen hat man für den Fall der Translation

$$\Delta \Phi = -\varrho, \quad \Delta \mathfrak{A} = -\frac{1}{c}(\mathfrak{J} + \varrho \mathfrak{w}),$$

$$\mathfrak{E}_x = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{A}}_x - \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{c}(\mathfrak{w}\cdot\operatorname{grad}\mathfrak{A}_x) - \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \text{ u. s. w.},$$

$$\mathfrak{J} = \sigma\left\{\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\cdot\operatorname{rot}\mathfrak{A}] + \mathfrak{E}^{el}\right\}, \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{E},$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{D} = \varrho.$$

Abstrahiert man von dem Gliede $-\frac{1}{c}\varrho\mathfrak{w}$ in der Gleichung für $\Delta\mathfrak{A}$, dann wird diesen Bedingungen genügt durch

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{1}{c}(\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{A}_0), \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0, \quad \mathfrak{J} = \mathfrak{J}_0, \quad \varrho = \varrho_s + \frac{1}{c^2}(\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{J});$$

dann ergibt sich also Unabhängigkeit des Stromes von der Translation. Zu der Stromladung ϱ_s tritt die bereits besprochene Kompensationsladung A hinzu.

Es fragt sich jetzt, ob das fortgelassene Glied $-\frac{1}{c}\varrho\mathfrak{w}$ irgend einen Einfluß haben könne. Man darf in demselben ϱ durch ϱ_s ersetzen, sodaß man es mit dem Strome zu tun hat, der von der Konvektion der Stromladung herrührt. Von der Anderung des Stromlaufes, welche das entsprechende magnetische Feld, nach Art des *Hall*-Effektes, zur Folge hat, können wir unbedingt absehen; schon der *Hall*-Effekt, welcher aus dem zum Strome $\mathfrak{J}$ gehörenden magnetischen Felde entspringt, darf ja wohl immer vernachlässigt werden. Wir betrachten also bloß die ponderomotorische Wirkung, welche der Leiter, infolge des Stromes $\mathfrak{J}$ von dem zum Strome $\varrho_s\mathfrak{w}$ gehörenden magnetischen Felde erfährt, d. h. wenn S die Stromladung bedeutet, die Wirkung (S, J). Zu dieser gesellt sich noch die Wirkung (S, A), während (A, S) und (J, S) sich kompensieren und von

$$(J, J) + (A, J) + (J, A) + (A, A)$$

dasselbe gilt wie von der analogen oben unter f) betrachteten Wirkung.

Auf die Existenz der Wirkung $(S, J) + (S, A)$, die von der Ordnung $\frac{|\mathfrak{w}|}{c}$ ist, hat *Liénard*[89]) aufmerksam gemacht.

Aus den oben angeführten Gleichungen erhält man für das dem Strome $\varrho_s \mathfrak{w}$ entsprechende Vektorpotential $\frac{1}{c}\,\Phi_0 \mathfrak{w}$ und für die magnetische Kraft $-\frac{1}{c}\,[\mathfrak{w}\cdot \operatorname{grad}\Phi_0]$. Die Wirkung (S, J) ist also pro Volumeneinheit

$$-\frac{1}{c^2}\left[\mathfrak{J}\cdot[\mathfrak{w}\cdot \operatorname{grad}\Phi_0]\right].$$

Für (S, A) gilt der Ausdruck

$$-\frac{1}{c^2}\,(\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{J})\operatorname{grad}\Phi_0;$$

folglich beträgt die Summe der beiden Wirkungen

$$-\frac{1}{c^2}\,(\mathfrak{J}\cdot \operatorname{grad}\Phi_0)\,\mathfrak{w}.$$

Diese Wirkung ist indes, wie *Liénard* berechnet, so schwach, daß man wenig Aussicht hat, sie zur Beobachtung zu bringen.

h) *Induktionsströme.* Wir betrachten zwei im Äther liegende Stromkreise, einen primären s und einen sekundären s', und nehmen an, daß in einem gewissen Zeitintervall ihre Lagen, sowie der durch elektomotorische Kräfte in s erzeugte Strom in beliebiger Weise geändert werden, daß aber während einiger Zeit vor und nach jenem Zeitintervall solche Veränderungen nicht stattfinden; t_1 und t_2 seien gewisse Augenblicke, der eine vor, der andere nach den Veränderungen. Wenn in s' keine elektromotorischen Kräfte vorhanden sind, dann ist dieser Leiter zu den Zeiten t_1 und t_2 stromlos; dazwischen wird er aber von einem Strom i' durchflossen. Das Integral

$$e = \int_{t_1}^{t_2} i'\,dt$$

hängt nach (125), wenn keine Magnetisierung besteht, von der Differenz der Werte ab, die $\int \mathfrak{H}_n\,d\sigma'$ (σ' eine von s' begrenzte substantielle Fläche) für $t = t_1$ und $t = t_2$ annimmt, und außerdem vom Widerstand in s'. Da nun (siehe oben, d), wenn man vorläufig von dem (siehe g)) durch die Konvektion der Stromladung hervorgebrachten magnetischen Felde absieht, das im Anfangs- und Endzustande von s hervorgebrachte magnetische Feld unabhängig von der Erdbewegung

89) Siehe die zweite der in Anm. 83) citierten Arbeiten von *Liénard*, § 7; *Poincaré*, Électricité et optique, 2e éd., § 419.

ist, so gilt dasselbe von e, wenn kein Einfluß der Translation auf den Widerstand besteht.

In der Tat hat *Des Coudres* ein negatives Resultat erhalten, als er nach einem Einfluß der Translation auf die Stärke der Induktionsströme suchte [90]).

Streng genommen hat man bei der Behandlung der Induktionswirkungen auf die Stromladung des primären Leiters Rücksicht zu nehmen; dem durch diese bei einer Translation verursachten magnetischen Felde wird im allgemeinen eine gewisse Änderung der Induktion entsprechen. *Liénard* [91]) hat hierauf aufmerksam gemacht, zu gleicher Zeit aber bemerkt, daß die betreffende Wirkung in allen realisierbaren Fällen äußerst schwach sein muß und bei den Versuchen von *Des Coudres* gar nicht im Spiel gewesen ist.

57. Einfluß einer Translation auf optische Erscheinungen in durchsichtigen Körpern. Bei der Fortpflanzung des Lichtes in nichtleitender Materie, die wir hier als unmagnetisierbar voraussetzen, bestehen in den Körperteilchen periodisch veränderliche elektrische Momente $\mathfrak{p}$. Die dafür geltenden Gesetze lassen sich ermitteln, wenn man sich vorstellt, daß die Elektronenbewegungen in jedem einzelnen Teilchen von den Kräften beherrscht werden, die von den übrigen Teilchen ausgehen; zur Vereinfachung darf man dabei — weil die Amplituden der Elektronen sehr klein gegen die Wellenlänge sind — in dem Ausdrucke (VI) $\mathfrak{v}$ mit $\mathfrak{w}$ vertauschen und also für die auf die Elektronen wirkende elektrische Kraft $\mathfrak{f}$ den Vektor $\mathfrak{d}'$ (Nr. **10**) setzen. Wegen der kurzen Periode der Schwingungen sind indes die Formeln der Nr. **43** zu modifizieren. Enthält jedes Teilchen ein einziges bewegliches Elektron mit der Masse m, so tritt an die Stelle von (126) die Gleichung

$$m\ddot{\mathfrak{q}} = e\mathfrak{f} - a\mathfrak{q},$$

und ebenso hat man es bei weniger einfachem Bau der Teilchen nicht mehr mit (127) oder (129) zu tun, sondern mit gewissen Gleichungen, die $\mathfrak{p}$ und seine Differentialquotienten nach der Zeit linear mit $\mathfrak{f}$ verbinden. Es soll angenommen werden, daß die Koeffizienten in diesen Gleichungen von einer Translation nicht beeinflußt werden (vgl. Nr. **56** a)).

Indem man jetzt auf die Gleichung (54) zurückgeht, gelangt man zu folgendem Satz:

---

90) *Th. Des Coudres*, Über das Verhalten des Lichtäthers bei den Bewegungen der Erde, Ann. Phys. Chem. 38 (1889), p. 71.

91) In dem zweiten der in Anm. 83) citierten Artikel, § 8.

Wenn in einem System von nichtleitenden Körpern, *ohne* Translation, eine Lichtbewegung stattfinden kann, bei der die Momente $\mathfrak{p}$ gewisse Funktionen der Koordinaten x, y, z und der Zeit t sind, so kann in demselben System *mit* Translation eine Bewegung vor sich gehen, bei welcher die $\mathfrak{p}$ eben dieselben Funktionen der Koordinaten x', y', z', in Bezug auf Achsen, die an der Translation teilnehmen, und der Ortszeit t' sind. Diese Übereinstimmung zwischen den beiden Fällen besteht nicht nur, was die Momente $\mathfrak{p}$ betrifft; man sieht leicht, wenn man neben (54) auch (55) beachtet, daß im beweglichen System die Größen

$$\mathfrak{d}', \mathfrak{h}', \bar{\mathfrak{d}}' = \mathfrak{E}', \bar{\mathfrak{h}}' = \mathfrak{H}', \mathfrak{P}, \mathfrak{D}' = \bar{\mathfrak{d}}' + \mathfrak{P}$$

in derselben Weise von x', y', z', t' abhängen, wie in dem ruhenden System die Größen

$$\mathfrak{d}, \mathfrak{h}, \bar{\mathfrak{d}} = \mathfrak{E}, \bar{\mathfrak{h}} = \mathfrak{H}, \mathfrak{P}, \mathfrak{D} = \bar{\mathfrak{d}} + \mathfrak{P}$$

von x, y, z, t.

Dieser Satz[92]) gilt — für diejenigen dieser Größen, die dann noch in Betracht kommen — auch dann, wenn die Systeme nur Äther enthalten, und also nur *der* Unterschied vorhanden ist, daß man die Erscheinungen in diesem ruhenden Medium das eine Mal auf ein ruhendes, das andere Mal auf ein bewegliches Koordinatensystem bezieht[93]).

58. Aberration des Lichtes[94]). Von einem Himmelskörper aus pflanze sich ein System ebener Wellen gegen die Erde hin fort; bezeichnet man mit T die Schwingungsdauer, mit α, β, γ die Richtungskosinus der in der Fortpflanzungsrichtung gezogenen Wellennormale n, mit a und p Konstanten, so lassen sich die Komponenten von $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{h}$ durch Ausdrücke von der Form

$$a \cos \frac{2\pi}{T}\left\{t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c} + p\right\}$$

darstellen. Um zu untersuchen, was aus diesen Wellen wird, wenn sie in irgend welche durchsichtige fest mit der Erde verbundene Körper

---

92) *Lorentz*, Versuch u. s. w., p. 85.

93) Eine Verallgemeinerung dieses Satzes für Systeme, in welchen Leitung und Magnetisierung besteht, findet man bei *Walker*, Aberration etc., p. 27.

94) Eine Diskussion der mit der Aberration zusammenhängenden Erscheinungen findet man, außer in bereits angeführten Abhandlungen, u. a. in *E. Ketteler*, Astronomische Undulationstheorie, 1873; *W. Veltmann*, Über die Fortpflanzung des Lichts in bewegten Medien, Ann. Phys. Chem. 150 (1873), p. 497; *Lorentz*, De l'influence du mouvement de la terre sur les phénomènes lumineux, Arch. néerl. 21 (1887), p. 103; *O. Lodge*, Aberration problems, London Trans. A 184 (1893), p. 727. Siehe auch die in Anm. 83) citierte Abhandlung von *W. Wien*.

(Linsen, Prismen) eindringen, kann man zunächst mittels (XIX) und (XX) $\mathfrak{d}'$ und $\mathfrak{h}'$ aus $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{h}$ ableiten, und dann die beweglichen Koordinaten x', y', z', sowie die Ortszeit t' als unabhängige Variabele einführen. Dabei kommen Ausdrücke von der Gestalt

$$a' \cos \frac{2\pi}{T'}\left\{t' - \frac{\alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z'}{c} + p'\right\}$$

zum Vorschein. In denselben ist

$$T' = \frac{T}{1 - \frac{\mathfrak{w}_n}{c}}, \tag{179}$$

während α', β', γ' die Richtungskosinus desjenigen Vektors sind, den man erhält, wenn man einen Vektor c in der Richtung n mit dem Vektor $-\mathfrak{w}$ zusammensetzt. Wendet man dann weiter den Satz der vorhergehenden Nummer an, so findet man, daß die Verteilung von $\bar{\mathfrak{d}}'$ und $\bar{\mathfrak{h}}'$ über den Raum, also auch die Verteilung von Hell und Dunkel die gleiche ist, als ob die Erde ruhte, der Himmelskörper sich in der Richtung $(-\alpha', -\beta', -\gamma')$ befände und die Schwingungszeit T' wäre. In diesem Ergebnisse liegt die Erklärung der Aberration und vieler damit zusammenhängender Erscheinungen[95]; die Formel (179) ist mit dem *Doppler*'schen Gesetz von der Änderung der Schwingungsdauer in Übereinstimmung.

59. Versuche mit irdischen Lichtquellen. Zustände, wie die in Nr. 57 miteinander verglichenen, werden offenbar dann entstehen, wenn eine Lichtquelle vorhanden ist, in deren Teilchen durch irgend welche Ursachen periodisch wechselnde elektrische Momente unterhalten werden, in solcher Weise, daß für ein bestimmtes leuchtendes Teilchen das Moment im Fall der Ruhe in derselben Weise von der allgemeinen Zeit t abhängt, wie im Fall der Translation von der Ortszeit t'. Was nun die ausgesandte Strahlung anbelangt, so ist namentlich hervorzuheben, daß, sobald an irgend einer Stelle im einen Fall fortwährend $\mathfrak{d} = 0$, $\mathfrak{h} = 0$ (oder $\mathfrak{P} = 0$, $\mathfrak{D} = 0$, $\mathfrak{H} = 0$), an dieser Stelle im bewegten System $\mathfrak{d}' = 0$, $\mathfrak{h}' = 0$ (oder $\mathfrak{P} = 0$, $\mathfrak{D}' = 0$, $\mathfrak{H}' = 0$) sein wird. Die Verteilung von Hell und Dunkel ist somit in beiden Systemen die gleiche. Hieraus erklärt sich unmittelbar die durch viele Be-

95) Nur das Resultat von *Fizeau* (Ann. chim. phys. (3) 58 (1860), p. 129; Ann. Phys. Chem. 114 (1861), p. 554), nach welchem die Erdbewegung einen Einfluß haben würde auf die Drehung der Polarisationsebene beim schiefen Durchgange durch eine Glasplattensäule, ist mir völlig unerklärlich. Inwiefern man sich auf die Resultate dieser Beobachtungen, die uns nur aus einer kurzen Beschreibung bekannt sind, verlassen darf, läßt sich schwerlich sagen. Siehe die Diskussion in *Lorentz,* Versuch u. s. w., p. 125.

obachter festgestellte Tatsache, daß sich bei Anwendung irdischer Lichtquellen in der Richtung der gespiegelten oder gebrochenen Lichtbüschel und der Lage optischer Bilder, sowie in dem Orte von Interferenz- und Diffraktionsstreifen ein Einfluß der Erdbewegung nicht erkennen läßt.

Indes ist hier zweierlei zu bemerken. Erstens, daß die theoretische Schlußfolgerung nur statthaft ist, wenn man voraussetzt, daß in Wirklichkeit die Schwingungsdauern der leuchtenden Teilchen sich nicht ändern, wenn man diesen eine Translation erteilt. Zweitens, daß unsere Annahme, die Momente sollen im einen Fall in derselben Weise von t' abhängen, wie im anderen von t, einen Unterschied zwischen den Phasendifferenzen involviert, welche die einzelnen Teilchen gegeneinander in der ruhenden und der bewegten Quelle zeigen. Bekanntlich sind aber die zufällig zwischen den Teilchen eines leuchtenden Körpers vorhandenen Phasendifferenzen ohne Bedeutung für die beobachtbaren Erscheinungen; wir können daher unseren Schluß auch dann noch aufrecht erhalten, wenn wir uns die Quelle ohne jede Änderung ihrer inneren Bewegungen in Translation versetzt denken.

Übrigens darf man nicht aus dem Auge verlieren, daß unsere Schlüsse betreffend die Abwesenheit eines Einflusses der Erdbewegung zum Teil auf gewissen Annahmen über die „Molekularkräfte" (Nr. **56** a)) beruhen, demzufolge sie denn auch nicht in allen Fällen gleich plausibel erscheinen. Die Annahme, daß die Perioden der Eigenschwingungen der Teilchen nicht geändert werden, ist wohl kaum gewagt (Nr. **56** a)), und dürfen wir daher erwarten, daß Absorptionsstreifen, welche in der bekannten Weise durch „Mitschwingen" entstehen, sich nicht verschieben werden, wenn dem ganzen der Beobachtung dienenden System eine Translation erteilt wird[96]). Dagegen liegt z. B. der Mechanismus der natürlichen Drehung der Polarisationsebene viel mehr im Dunkeln; hier ist schon größere Vorsicht geboten[97]).

Wir schreiten jetzt zu der Besprechung gewisser Versuche, bei

---

96) *H. Haga,* L'expérience de *Klinkerfues* (Versuche mit negativem Resultat), Arch. néerl. (2) 6 (1901), p. 765.

97) Siehe *Lorentz*, Versuch u. s. w., p. 115—120; *Larmor,* Aether and matter, section IV; *Lorentz,* De draaing van het polarisatievlak in lichamen die zich bewegen, Amsterdam Zittingsverslag Akad. v. Wet. 10 (1902), p. 793 (Amsterdam Proceedings, 1901—1902, p. 669); *Rayleigh,* Is rotatory polarization influenced by the earth's motion? (Versuche mit negativem Ergebnis), Phil. Mag. (6) 4 (1902), p. 215; *Larmor,* On the influence of convection on optical rotatory polarization, Phil. Mag. (6) 4 (1902), p. 367.

welchen es sich nicht mehr lediglich um die Verteilung von Hell und Dunkel handelt.

a) *Messung der Strahlungsintensität.* Wir denken uns in dem zu Anfang dieser Nummer betrachteten bewegten System eine ebene Scheibe $d\sigma'$, die auf der einen Seite, wo sie mit Äther in Berührung steht, von den Strahlen getroffen wird. Dieselbe sei „vollkommen schwarz“, d. h. es werden die Schwingungen weder durchgelassen noch reflektiert. Es sei die bestrahlte Seite die eine und ein im Äther liegendes Element $d\sigma$ die andere Grundfläche eines zylindrischen Raumes, dessen Höhe unendlich klein gegen die Dimensionen dieser Flächen ist und der an der Translation von $d\sigma'$ teilnimmt; die Normale n zu $d\sigma$ zeige nach der Scheibe hin. Von der Energiemenge (Nr. 54 b)) $\mathfrak{S}_n d\sigma$, welche pro Zeiteinheit die Ebene $d\sigma$ durchströmt, wird ein Teil $-(\mathfrak{T}^n \cdot \mathfrak{w}) d\sigma$ auf ponderomotorische Arbeit verwendet; der übrige Teil, die Energiemenge

$$\{\mathfrak{S}_n + (\mathfrak{T}^n \cdot \mathfrak{w})\} d\sigma = c[\mathfrak{d}' \cdot \mathfrak{h}']_n d\sigma,$$

(Nr. 54 b)) wird also von der Scheibe absorbiert. Da nun $\mathfrak{d}'$ und $\mathfrak{h}'$ genau mit $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{h}$ in dem korrespondierenden ruhenden System übereinstimmen, so wird sich in der Erwärmung der Scheibe ein Einfluß der Erdbewegung nicht erkennen lassen[98]).

b) *Strahlungsdruck.* Wir bezeichnen für ein bewegtes System, in dem rein periodische Vorgänge stattfinden, mit σ eine beliebige, mit demselben verbundene, gänzlich in Äther liegende geschlossene Fläche, mit $\mathfrak{F}$ die resultierende auf die eingeschlossenen Elektronen wirkende Kraft, und mit σ' eine feststehende Fläche, mit der σ in dem betrachteten Augenblick zusammenfällt. Nach den Sätzen von Nr. 7 ist

$$\mathfrak{F}_x = \int X_n d\sigma - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_{\sigma'} \mathfrak{S}_x dS,$$

wo der Index σ' anzeigt, daß das Integral sich auf den von σ' begrenzten Raum bezieht. Hierfür läßt sich auch schreiben

$$\mathfrak{F}_x = \int X_n d\sigma - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_{\sigma} \mathfrak{S}_x dS + \frac{1}{c^2} \int \mathfrak{w}_n \mathfrak{S}_x d\sigma. \tag{180}$$

Das zweite Glied verschwindet aus dem Mittelwerte für eine längere

98) *Lorentz,* De intensiteit der straling in verband met de beweging der aarde, Amsterdam Zittingsverslag Akad. v. Wet. 10 (1902), p. 804 (Amsterdam Proceedings, 1901—1902, p. 678); *A. H. Bucherer,* Über den Einfluß der Erdbewegung auf die Intensität des Lichtes, Ann. Phys. 11 (1903), p. 270; *P. Nordmeyer,* Über den Einfluß der Erdbewegung auf die Verteilung der Intensität der Licht- und Wärmestrahlung (Versuche mit negativem Resultat) ibid., p. 284.

Zeit, und in der Summe der beiden übrigen Glieder erscheint jedes $d\sigma$ multipliziert mit

$$\frac{1}{2}[2\mathfrak{d}_x\mathfrak{d}_n - \mathfrak{d}^2\cos(n,x)] + \frac{1}{2}[2\mathfrak{h}_x\mathfrak{h}_n - \mathfrak{h}^2\cos(n,x)] + \frac{1}{c^2}\mathfrak{w}_n\mathfrak{S}_x,$$

oder, wenn man mittels (XIX) und (XX) $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{d}'$ und $\mathfrak{h}'$ ausdrückt, mit

$$(181)\quad X_{n(0)} - \frac{1}{c}\mathfrak{d}_x'[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{h}']_n - \frac{1}{c}\mathfrak{d}_n'[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{h}']_x + \frac{1}{c}(\mathfrak{d}'\cdot[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{h}'])\cos(n,x)$$
$$+\frac{1}{c}\mathfrak{h}_x'[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{d}']_n + \frac{1}{c}\mathfrak{h}_n'[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{d}']_x - \frac{1}{c}(\mathfrak{h}'\cdot[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{d}'])\cos(n,x)$$
$$+\frac{1}{c}\mathfrak{w}_n[\mathfrak{d}'\cdot\mathfrak{h}']_x.$$

$X_{n(0)}$ bedeutet den Wert von X_n, den man aus (XVI) erhält, wenn man einfach $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{h}$ durch $\mathfrak{d}'$ und $\mathfrak{h}'$ ersetzt.

Wir wenden jetzt zweimal den aus den Eigenschaften der Determinanten folgenden Satz

$$\mathfrak{d}_k'[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{h}']_l + \mathfrak{w}_k[\mathfrak{h}'\cdot\mathfrak{d}']_l + \mathfrak{h}_k'[\mathfrak{d}'\cdot\mathfrak{w}]_l = (\mathfrak{d}'\cdot[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{h}'])\cos(k,l)$$

(k und l beliebig gewählte Richtungen) an, und zwar lassen wir einmal k mit der x-Richtung und l mit der Normale n zusammenfallen, und vertauschen dann die beiden Richtungen. Dadurch verwandelt sich der Ausdruck (181) in

$$X_{n(0)} - \frac{\mathfrak{w}_x}{c^2}\mathfrak{S}_n,$$

und die Kraft (180), abgesehen vom zweiten Gliede, in

$$\int X_{n(0)}\,d\sigma - \frac{\mathfrak{w}_x}{c^2}E,$$

wo E das Energiequantum ist, welches die Fläche σ pro Zeiteinheit in der Richtung nach außen durchströmt.

Vergleichen wir jetzt wieder die Fälle der Ruhe und der Bewegung, in der Voraussetzung, daß an den Schwingungen in der Lichtquelle nichts geändert wird, und beachten wir die Übereinstimmung von $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{h}$ im einen, mit $\mathfrak{d}'$ und $\mathfrak{h}'$ im anderen Fall (Nr. 57), dann zeigt es sich, daß neben der im ruhenden System vorhandenen Kraft, infolge der Translation noch die Kraft

$$-\frac{E}{c^2}\mathfrak{w}$$

auftritt. Dieselbe kommt übrigens nur ins Spiel, wenn entweder in dem betrachteten Teil des Systems elektromagnetische Energie aus anderer Energie entsteht (leuchtender Körper), oder das umgekehrte stattfindet (absorbierender Körper). Für einen leuchtenden Körper

besteht die Zusatzkraft in einem der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand, der freilich außerordentlich klein ist.

60. Mitführung der Lichtwellen durch die ponderabele Materie. Der in Nr. 57 angeführte Satz ermöglicht es, von jedem Bewegungszustande in einem ruhenden Mittel zu einem Bewegungszustande in demselben Mittel, nachdem ihm eine Translation erteilt worden ist, überzugehen, und also, wenn die Geschwindigkeit v der Wellen im ruhenden Körper bekannt ist, für die Fortpflanzung derselben im bewegten Körper die Geschwindigkeit v' relativ zur Materie und die Geschwindigkeit v'' relativ zum Äther anzugeben. Für einen isotropen Körper lautet das Resultat, wenn n die Wellennormale im Sinne der Fortpflanzung ist,

$$v' = v - \frac{v^2}{c^2}\mathfrak{w}_n, \quad v'' = v + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\mathfrak{w}_n.$$

Der eingeklammerte Faktor in der letzten Formel ist der von *Fresnel* eingeführte *Mitführungskoeffizient*[99]).

Versuche über die Lichtbewegung in strömendem Wasser und in strömender Luft haben die *Fresnel*'sche Annahme bestätigt.

Das Ergebnis für anisotrope Körper gestaltet sich am einfachsten, wenn man die Geschwindigheiten u und u' der Lichtstrahlen, die letztere relativ zur Materie genommen, ins Auge faßt. Man denke sich zunächst in dem ruhenden Körper ein seitlich von einer zylindrischen Fläche begrenztes Büschel homogenen Lichtes; die „Lichtstrahlen" haben die Richtung der Erzeugenden dieser Fläche. In allen Punkten eines bestimmten Strahls gelten für die Zustandsgrößen Ausdrücke von der Form

$$a \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{s}{u} + p\right),$$

wo s den längs der Linie gemessenen Abstand von einem festen Punkte derselben bedeutet.

Wir erteilen jetzt der ponderabelen Materie, der Zylinderfläche, sowie der genannten Linie die Translation $\mathfrak{w}$, und gehen mit Hilfe des Satzes von Nr. 57 von dem soeben betrachteten Zustande zu dem entsprechenden für das bewegte System über. Offenbar bleibt die Lichtbewegung auf den zylindrischen Raum beschränkt; die Linie s ist also noch immer ein Lichtstrahl. Für ihre Punkte gelten aber jetzt Ausdrücke, wie

99) Eine Betrachtung über den Mitführungskoeffizienten findet man auch bei *Reiff*, Die Fortpflanzung des Lichtes in bewegten Medien nach der elektrischen Lichttheorie, Ann. Phys. Chem. 50 (1893), p. 361. *Larmor* hat den *Fresnel*'schen Koeffizienten aus dem Prinzip des Temperaturgleichgewichtes bei Strahlung abgeleitet. Siehe London Trans. A 185 (1894), p. 775.

$$a' \cos \frac{2\pi}{T}\left(t' - \frac{s}{u} + p\right),$$

oder mit Rücksicht auf (XVIII)

$$a' \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\mathfrak{w}_s s}{c^2} - \frac{s}{u} + p'\right) = a' \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{s}{u'} + p'\right),$$

wenn

$$u' = u - \frac{u^2}{c^2}\mathfrak{w}_s.$$

Bei dieser Gleichung[100]) ist zu bemerken, daß u und u' sich auf dieselbe Richtung s des Lichtstrahls beziehen.

Voraussetzung bei allen obigen Formeln ist, daß in den beiden Fällen, Ruhe und Bewegung, die Periode in einem bestimmten Punkt der Materie den gleichen Wert hat.

61. Andere Ableitung des zur Erklärung der Aberration führenden Satzes. Für einen ungeladenen, unmagnetisierbaren Nichtleiter lassen sich die auf ruhende Koordinaten bezogenen Gleichungen auf folgende Gestalt bringen (vgl. (I''), (V''), (III''a), (IV''a), (XXXI'), (XXX') und (XXXIV''')):

$$\text{div}\, \mathfrak{D} = 0, \tag{182}$$

$$\text{div}\, \mathfrak{H} = 0, \tag{183}$$

$$\text{rot}\, \mathfrak{H}' = \frac{1}{c}\dot{\underline{\mathfrak{D}}} = \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{D}} - \frac{1}{c}\text{rot}\,[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{D}], \tag{184}$$

$$\text{rot}\, \mathfrak{E}' = -\frac{1}{c}\dot{\underline{\mathfrak{H}}} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{H}} + \frac{1}{c}\text{rot}\,[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{H}], \tag{185}$$

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{H}], \tag{186}$$

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} - \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{E}], \tag{187}$$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + (\eta)\mathfrak{E}'. \tag{188}$$

Wir betrachten hier $\mathfrak{w}$ als unabhängig von Ort und Zeit und führen die Koordinaten x', y', z' in Bezug auf ein an der Translation teilnehmendes Achsenkreuz, sowie die Ortszeit t' als unabhängige Variabelen ein, statt $\mathfrak{D}$ aber den Vektor

$$\mathfrak{D}' = \mathfrak{D} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{H}].$$

Dann[101]) ergeben sich die Formeln

$$\text{div}'\, \mathfrak{D}' = 0,$$

---

100) *Lorentz,* Versuch u. s. w., p. 99.

101) Eine ähnliche Umformung der Gleichungen für den Fall, daß auch ein Leitungsstrom und eine Magnetisierung besteht, findet sich bei *Walker,* Aberration etc., Part 2.

$$\mathrm{div}'\,\mathfrak{H}' = 0,$$
$$\mathrm{rot}'\,\mathfrak{H}' = \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{D}}',$$
$$\mathrm{rot}'\,\mathfrak{E}' = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{H}}',$$
$$\mathfrak{D}' = \mathfrak{E}' + (\eta)\mathfrak{E}' = (\varepsilon)\mathfrak{E}',$$

(vgl. was die Bezeichnungen und die Ableitung betrifft, Nr. **10**).

Da die Form der letzten Gleichungen unabhängig von der Translation ist, so gelangt man sofort zu dem in Nr. **57** angeführten Satze.

62. Der Michelson'sche Interferenzversuch. Bisher wurden nur die Glieder erster Ordnung beibehalten; dies genügt für die Behandlung der meisten Erscheinungen. Es besteht jedoch *ein* optischer Versuch, dessen Idee von *Maxwell* herrührt, bei dem Größen zweiter Ordnung sich bemerklich machen könnten.

Es seien A, B, C Punkte, die mit der vorläufig als ruhend gedachten Erde verbunden sind, von solcher Lage, daß die Strecken AB und AC senkrecht zueinander stehen und die gleiche Länge l haben. Eine geeignete optische Vorrichtung bringt zwei Lichtstrahlen zur Interferenz, deren einer von A nach B hin und zurück, der andere dagegen von A nach C und dann wieder nach A gegangen ist, und zwar findet die Fortpflanzung im Äther statt. Die Gleichheit der für die beiden Wege nötigen Zeiten wird gestört, wenn die Erde sich in der Richtung AB bewegt, während der Äther in Ruhe verbleibt. Der eine Strahl braucht dann die Zeit[102])

$$\frac{2l}{c}\left(1 + \frac{\mathfrak{w}^2}{c^2}\right) \tag{189}$$

um von A aus B einzuholen und dann dem ersten Punkt etwa in A' zu begegnen. Für den anderen Strahl wird die Zeit

$$\frac{2l}{c}\left(1 + \frac{\mathfrak{w}^2}{2c^2}\right), \tag{190}$$

was sich daraus ergibt, daß der Ort, wo dieser C erreicht, etwa C', durch die Bedingung

$$AC' : CC' = c : |\mathfrak{w}|$$

bestimmt wird, und daß die Rückkehr von C' nach dem beweglichen Punkte A dieselbe Zeit erfordert wie die Fortpflanzung von A nach C'. Die Differenz der Zeiten (189) und (190) wechselt das Vorzeichen, wenn man durch Drehung von BAC die Linie AC in die Richtung von $\mathfrak{w}$ bringt. *Michelson*[103]) hat nun bei einer solchen Rotation seines

102) Eine genauere Behandlung in *Lorentz,* l. c. (Anm. 94).

103) *A. A. Michelson,* Amer. Journ. of Science (3) 22 (1881), p. 120.

Apparates keine Änderung der Interferenzerscheinung beobachtet, und ebenso wenig gelang ihm dieses, als er mit *Morley*[104]) den Versuch in größerem Maßstab wiederholte.

Zur Erklärung dieses negativen Resultats haben *Fitz Gerald*[105]) und ich selbst[106]) angenommen, daß die Dimensionen des festen Körpers, welcher den optischen Apparat trug, infolge der Erdbewegung um Größen zweiter Ordnung geändert worden sind. Nimmt die Entfernung zweier Punkte dieses Körpers durch eine Translation in Richtung der Verbindungslinie im Verhältnis $1 + \delta$, und durch eine Translation senkrecht zu dieser Linie im Verhältnis $1 + \delta'$ zu, so hat man anzunehmen

$$\delta' - \delta = \frac{\mathfrak{w}^2}{2c^2}. \tag{191}$$

63. Theorie von Cohn. Um der Hypothese der Kontraktionen oder Dilatationen infolge der Erdbewegung zu entgehen, hat *E. Cohn*[107]) ein System von Feldgleichungen aufgestellt, welches für isotrope Körper und ruhende Koordinaten in der hier benutzten Schreibweise wie folgt lautet:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \mathfrak{H}' &= \frac{1}{c}\left(\mathfrak{J} + \dot{\underline{\mathfrak{D}}}\right), \\
\operatorname{rot} \mathfrak{E}' &= -\frac{1}{c}\dot{\underline{\mathfrak{B}}}, \\
\mathfrak{J} &= \sigma\,(\mathfrak{E}' + \mathfrak{E}^{el}), \\
\mathfrak{D} &= \varepsilon\mathfrak{E}' - \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{H}'], \\
\mathfrak{B} &= \mu\mathfrak{H}' + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{E}'].
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen, denen sich bei *Cohn* Erörterungen über die Energie und die ponderomotorischen Kräfte anschließen, mögen noch kurz mit der im vorhergehenden entwickelten Elektronentheorie verglichen werden, wobei Glieder von höherer als der zweiten Ordnung vernachlässigt werden sollen.

a) Man erhält die *Cohn*'schen Gleichungen für unmagnetisierbare Nichtleiter, wenn man in (186) und (187) $[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{H}]$ durch $[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{H}']$ und $[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{E}]$ durch $[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{E}']$ ersetzt, die Gleichungen (182)—(185) und (188)

104) *A. A. Michelson* u. *E. W. Morley*, Amer. Journ. of Science (3) 34 (1887), p. 333.

105) Siehe *Lodge*, l. c. (Anm. 94), p. 749, 750.

106) *Lorentz,* De relatieve beweging van de aarde en den aether, Amsterdam Zittingsverslag Akad. v. Wet. 1 (1892), p. 74.

107) *Cohn,* Über die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes für bewegte Körper, Ann. Phys. 7 (1902), p. 29.

aber ungeändert läßt, und statt $\mathfrak{H}$ das Zeichen $\mathfrak{B}$ schreibt. Die Modifikation beschränkt sich auf Größen zweiter Ordnung, sodaß, was die Wirkungen erster Ordnung betrifft, die beiden Theorien miteinander in Einklang stehen.

b) Da nach unserer Theorie der Äther ruht, so hängen in den auf ruhende Koordinaten bezogenen Feldgleichungen derselben die Glieder mit $\mathfrak{w}$ von der ponderabelen Materie ab; sie müssen notwendig verschwinden, wenn diese Materie hinweggedacht und also $\eta = 0$, $\varepsilon = 1$ gesetzt wird. Wirklich ist das mit den Gleichungen (182)—(188) der Fall, nicht nur was die bei der Ableitung allein berücksichtigten Glieder erster Ordnung betrifft, sondern zufälligerweise für jeden Wert von $|\mathfrak{w}|$. Für $\eta = 0$ erhält man nämlich aus (184)—(188)

$$(192)\qquad \begin{cases} \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{E}}, \\ \operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{H}}. \end{cases}$$

Machen wir die Substitution $\varepsilon = 1$ (und $\mu = 1$) in den *Cohn*'schen Gleichungen für einen Nichtleiter, bedenken wir, daß $\operatorname{div} \mathfrak{D} = 0$, $\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$, und ersetzen wir $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$, dann erhalten wir

$$(193)\qquad \begin{cases} \operatorname{rot} \mathfrak{H} - \frac{1}{c^2}\operatorname{rot}\left[\mathfrak{w}\cdot[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{H}]\right] = \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{E}}, \\ \operatorname{rot} \mathfrak{E} - \frac{1}{c^2}\operatorname{rot}\left[\mathfrak{w}\cdot[\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{E}]\right] = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{H}}. \end{cases}$$

Auf den reinen Äther wendet *Cohn* freilich diese Gleichungen nicht an; wenn es sich um dieses Medium handelt, setzt er immer $\mathfrak{w} = 0$. Zur Erklärung des von *Michelson* erhaltenen Resultats beruft er sich darauf, daß die Fortpflanzung in Luft stattgefunden hat, und daß für dieses Mittel, wenn man von der kleinen Größe $\varepsilon - 1$ absieht, die Gleichungen die Form (193) annehmen könnten, während die Elektronentheorie bei derselben Vernachlässigung zu (192) führt.

c) Wenn die Nr. 62 erwähnte Hypothese der Wirklichkeit entspricht, wird auch die Länge eines Maßstabes infolge der Erdbewegung geändert, und wird man mit demselben, falls man zur Längeneinheit die Distanz zweier Striche auf dem *ruhenden* Stabe wählt, alle Strecken, welche die Richtung der Erdbewegung haben, im Verhältnis $1 + \delta$, und alle senkrecht darauf stehende Strecken im Verhältnis $1 + \delta'$ zu klein finden. Fällt nun die x-Achse in die Translationsrichtung, dann kann man die Größen

$$\mathrm{x} = \frac{x}{1+\delta}, \quad \mathrm{y} = \frac{y}{1+\delta'}, \quad \mathrm{z} = \frac{z}{1+\delta'}$$

die *gemessenen* Koordinaten nennen. Man führe nun diese statt x, y, z in die Gleichungen (192) ein, und außerdem statt $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ zwei Vektoren mit den Komponenten

$$'\mathfrak{E}_x = \left(1 + \frac{\mathfrak{w}^2}{2c^2}\right)\mathfrak{E}_x, \quad '\mathfrak{E}_y = \mathfrak{E}_y, \quad '\mathfrak{E}_z = \mathfrak{E}_z,$$

$$'\mathfrak{H}_x = \left(1 + \frac{\mathfrak{w}^2}{2c^2}\right)\mathfrak{H}_x, \quad '\mathfrak{H}_y = \mathfrak{H}_y, \quad '\mathfrak{H}_z = \mathfrak{H}_z.$$

Man gelangt dann zu Gleichungen, die sich in der Form nur dadurch von (193) unterscheiden, daß an die Stelle von c die Größe

$$'c = \left(1 - \frac{\mathfrak{w}^2}{2c^2} - \delta'\right) c$$

tritt. Die Beobachtungen können nicht darüber entscheiden, ob die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $'c$ oder c ist, und es wird also verständlich, weshalb *Cohn* mit seinen Gleichungen dasselbe erreichen kann, was die Elektronentheorie aus der Änderung der Dimensionen ableitet. Der Unterschied besteht darin, daß die Elektronentheorie behauptet, es seien die in (193) vorkommenden Koordinaten die gemessenen Koordinaten, die dadurch von den wirklichen verschieden sind, daß die Abmessungen von *festen* Körpern durch eine bestimmte Änderung der Molekularkräfte modifiziert worden sind, während es nach *Cohn* ein Einfluß der Luftmoleküle wäre, der uns zwingt, mit (193) statt mit (192) zu operieren.

d) Wenn sich in einem bewegten isotropen Dielektrikum, für welches $\mu = 1$, Licht in der Richtung von $\mathfrak{w}$ fortpflanzt, dann ist nach den Gleichungen von *Cohn* die Geschwindigkeit der Wellen in Bezug auf ein ruhendes Koordinatensystem

$$(194) \qquad \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)|\mathfrak{w}| + \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} \cdot \frac{\mathfrak{w}^2}{c}.$$

Während hier für Luft das Glied erster Ordnung einen kleinen, annähernd der Dichte proportionalen Wert hat, variiert das Glied zweiter Ordnung nur wenig bei Verdichtung oder Verdünnung. Natürlich kann man ein solches Resultat acceptieren, wenn man sich, wie *Cohn*, auf die Aufstellung eines Systems geeigneter Feldgleichungen beschränkt. Sucht man aber diese näher zu begründen, so stellen sich Schwierigkeiten ein. Daß in (194) die Geschwindigkeit $|\mathfrak{w}|$ mit dem *Fresnel*'schen Koeffizienten multipliziert ist, beweist, daß nicht alles, was in dem lufterfüllten Raum vorhanden ist, an der Translation teilnimmt. Man wird daher, wie mir scheint, unvermeidlich zu der Unterscheidung von Äther und ponderabeler Materie geführt, und es ist kaum wahrscheinlich, daß man gerade zu dem *Fresnel*'schen Koeffizienten wird gelangen können, wenn man nicht den zwischen

den Molekülen liegenden Äther vollständig in Ruhe läßt. Dann steht es aber zu erwarten, daß statt des letzten Gliedes in (194) ein anderes zum Vorschein kommen wird, das sich mit abnehmender Dichte allmählich dem Wert 0 nähert.

VI. Schluß.

64. Gegenwärtiger Stand der Theorie. Die Änderung der Dimensionen eines ponderabelen Körpers, zu deren Annahme wir in Nr. **62** unsere Zuflucht genommen haben, wird einigermaßen verständlich, wenn man sich vorstellt, daß die Molekularkräfte, die in letzter Instanz Größe und Gestalt eines Körpers bedingen, in ähnlicher Weise wie die elektromagnetischen Wirkungen durch den Äther vermittelt werden. Dann liegt es ja nahe sich zu denken, daß Intensität und Richtung dieser Kräfte geändert werden, sobald die Moleküle sich durch den Äther verschieben.

Zu Gunsten dieser Auffassung spricht der Umstand, daß man gerade zu der Beziehung (191) gelangen kann, wenn man für die Modifikation der Molekularkräfte das Gesetz einführt, welches die Theorie für die elektrostatischen Wirkungen liefert; wenigstens gelingt das, wenn man von aller Molekularbewegung abstrahiert und also den stationären Zustand eines festen Körpers als ein wirkliches mechanisches Gleichgewicht betrachtet.

Man kann nämlich das in Nr. **11** b)) Gesagte folgendermaßen erweitern:

Es sei S_0 ein ruhendes elektrostatisches System, S aber ein System, das sich in der x-Richtung mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ verschiebt, und das man erhält, wenn man das System S_0 einer Dilatation δ in der Richtung der Translation und einer Dilatation δ' in jeder dazu senkrechten Richtung unterwirft. Die Größen δ und δ' seien beide von der Ordnung $\frac{\mathfrak{w}^2}{c^2}$ und an die Bedingung (191) gebunden; wir vernachlässigen ihre Quadrate und ihr Produkt. Bei Gleichheit der Ladungen korrespondierender Volumenelemente besteht dann zwischen den auf diese wirkenden Kräften $\mathfrak{F}_0$ und $\mathfrak{F}$ (der Index 0 bezieht sich immer auf das ruhende System) die Relation

$$(195)\quad \begin{cases} \mathfrak{F}_x = (1 - 2\delta')\,\mathfrak{F}_{0x}, \\ \mathfrak{F}_y = \left(1 - 2\delta' - \frac{\mathfrak{w}^2}{2c^2}\right)\mathfrak{F}_{0y}, \quad \mathfrak{F}_z = \left(1 - 2\delta' - \frac{\mathfrak{w}^2}{2c^2}\right)\mathfrak{F}_{0z}. \end{cases}$$

Wir wollen jetzt annehmen, daß für irgend einen bestimmten, obgleich uns unbekannten Wert von δ' diese Beziehungen auch zutreffen

für die Molekularkräfte in zwei Systemen, die sich, was die Verteilung der ponderabelen Materie betrifft, in der durch die Dilatationen δ und δ' bedingten Weise voneinander unterscheiden. Ist dann das ruhende System im Gleichgewicht und verschwindet also hier für jedes Teilchen die Resultierende aller Kräfte, unter deren Einfluß es steht, so gilt dasselbe nach (195) für das bewegte System. In der Voraussetzung, daß Gleichgewicht nur bei einer Konfiguration möglich ist, dürfen wir schließen, daß die Teilchen eines ursprünglich als ruhend gedachten Körpers, nachdem ihm eine Translation erteilt worden ist, sich unter dem Einflusse ihrer gegenseitigen Wirkungen von selbst in die neuen den Dilatationen δ, δ' entsprechenden Lagen stellen werden.

In diesem Gedankengange läßt sich, wie mir scheint, auch das negative Ergebnis des in Nr. **56** c) erwähnten Experimentes von *Trouton* und *Noble* deuten[108]). Wäre es zulässig, die obige Hypothese auf *alle* Wirkungen in dem von dem Kondensator mit Einschluß des Aufhängedrahtes gebildeten System, auch auf die Wirkungen zwischen Elektronen und Atomen, anzuwenden, so dürften wir behaupten, es seien auch jetzt die Dilatationen δ und δ' die einzigen Folgen der Translation. Von einer beobachtbaren Richtungsänderung sind diese aber nicht begleitet.

Freilich leidet diese Erklärung an dem Mangel, daß sie die Molekularbewegung völlig ignoriert, sodaß die Beseitigung dieses Übelstandes als eine dringende Aufgabe erscheint. Ein Weg, auf dem man die Lösung versuchen kann, ist m. E. angezeigt. Ich glaube die Vermutung aussprechen zu dürfen, daß wenn man auf die ponderabelen Massen überträgt, was die Theorie von den elektromagnetischen Massen der Elektronen aussagt[109]), unsere Behauptungen betreffend die Dimensionenänderungen auch für Systeme mit Molekularbewegung aufrecht zu erhalten sein werden. Wahrscheinlich wird man in dieser Weise eine Theorie entwickeln können, die imstande ist, die elektrischen und optischen Vorgänge in bewegten Körpern gründlicher zu verfolgen als es hier geschehen ist[110]) und mit der man die z. B. von *Rayleigh*[111])

108) Auch *Larmor* hat die Hypothese der Dimensionenänderungen auf den Fall des Kondensators angewandt. Siehe das in Anm. 84) citierte Werk, p. 566.

109) Hierbei erhebt sich die Frage, ob vielleicht auch die Dimensionen der einzelnen Elektronen durch die Translation geändert werden.

110) Vgl. die Diskussion über den *Michelson*'schen Versuch, wenn die Strahlen bei demselben einen beliebigen ponderabelen Körper durchlaufen in der zweiten in Anm. 83) citierten Arbeit von *Liénard,* §§ 16 u. 17 und in dem ersten in Anm. 33) citierten Artikel von *Lorentz.*

111) *Rayleigh,* Does motion through the aether cause double refraction? Phil. Mag. (6) 4 (1902), p. 678 (Versuche mit negativem Ergebnis).

experimentell behandelte Frage nach der Existenz einer mit den Dilatationen δ, δ' zusammenhängenden Doppelbrechung wird in Angriff nehmen können.

Man darf hoffen, daß mit dieser weiteren Entwicklung ein Gewinn an Einheitlichkeit und Einfachheit der Darstellung verbunden sein wird. Mit Recht hat *Poincaré*[112]) der Theorie einen Vorwurf daraus gemacht (obgleich es zu entschuldigen sein dürfte, daß man auf diesem Gebiete vorsichtig tastend vorwärts gegangen ist), daß sie zur Erklärung des *Michelson*'schen Versuchs eine eigens zu diesem Zwecke ersonnene Hypothese eingeführt hat, und vielleicht durch neue experimentelle Ergebnisse zu ähnlichen Kunstgriffen gezwungen werden wird. Das Urteil würde günstiger lauten können, wenn es gelänge, mit Hilfe einiger Grundannahmen, wie der oben angedeuteten, manche auf der Erde sich abspielende elektromagnetische Erscheinung als völlig unabhängig von der Translation darzustellen.

Ich gedenke an anderer Stelle[113]) ausführlicher auf die hier berührten Fragen einzugehen, möchte aber hier die Bemerkung hinzufügen, daß man, falls die Betrachtung der Einflüsse zweiter Ordnung auf unüberwindliche Schwierigkeiten stieße, wohl kaum einen anderen Ausweg hätte als denjenigen, welchen die in Nr. **21** des vorigen Artikels erwähnte, von *Planck* herrührende Idee uns eröffnet. Unbefriedigend bliebe dabei allerdings nicht nur die vorauszusetzende Kondensation des Äthers in der Nähe eines Himmelskörpers, sondern auch der Umstand, daß der bei der Lichtbewegung im strömenden Wasser ins Spiel kommende Mitführungskoeffizient, der bis jetzt in der Aberrationstheorie so wichtig war, schließlich für dieselbe jede Bedeutung verlöre.

65. Anwendung der Begriffe der Elektronentheorie auf andere Gebiete. Obgleich im Äther die elektromagnetischen Zustandsänderungen sich im allgemeinen mit der Geschwindigkeit c fortpflanzen, so zeigt sich doch bei den elektrostatischen Erscheinungen (Nr. **56** b)) nur ein Einfluß einer Translation, der von der zweiten Ordnung ist. Dies hat mich dazu veranlaßt[114]), für die Gravitation eine ähnliche Vermittlung durch den Äther, wie für die elektrischen Kräfte anzunehmen. Man erreicht dadurch den Vorteil, daß man den

112) *Poincaré,* Relations entre la physique expérimentale et la physique mathématique, Rapports du Congrès de physique de 1900, Paris, 1, p. 22, 23.

113) *Lorentz,* Amsterdam Zittingsverslag Akad. v. Wet 12, 1904 (Amsterdam Proceedings, 1903—1904).

114) *Lorentz,* Beschouwingen over de zwaartekracht, Amsterdam Zittingsverslag Akad. v. Wet. 8 (1900), p. 603 (Amsterdam Proceedings, 1899—1900, p. 559).

Zustandsänderungen des Äthers, welche die Schwerkraft verursachen, keine größere Ausbreitungsgeschwindigkeit wie die des Lichtes zuzuschreiben braucht, um im Einklang zu bleiben mit den Beobachtungen, die auf diesem Gebiete einen Einfluß der Bewegung nicht haben erkennen lassen. Um diese Idee durchzuführen, habe ich angeknüpft an die von *Mossotti* entwickelte Theorie der Gravitation, nach welcher diese Kraft den elektrischen Wirkungen nahe verwandt sein soll.

Daß auch viele andere Erscheinungen mit den elektromagnetischen im engsten Zusammenhang stehen, daß bei denselben die elektrischen Ladungen der kleinsten Körperteilchen eine wesentliche Rolle spielen, ist im Laufe der Jahre immer deutlicher zutage getreten und braucht hier nicht mit Beispielen belegt zu werden. Man hat darin Anlaß gefunden, geradezu in elektrischen Ladungen, in Elektronen, das Wesen aller Materie zu erblicken[115]) und die Grundsätze der Mechanik als Folgerungen aus den Begriffen der Elektronentheorie darzustellen[116]). In diesem Gedankengange gibt es keine „wahre", sondern nur „elektromagnetische" Masse, eine Annahme, zu deren weiterer Prüfung die Versuche von *Kaufmann* über die *Becquerel*-strahlen sowie die in der vorigen Nummer vorgetragenen Betrachtungen ermutigen.

---

115) Siehe z. B. *O. Lodge,* On electrons, Journal of the Institution of electr. engineers 32 (1902), part 6 (Electric theory of matter).

116) *W. Wien,* Über die Möglichkeit einer elektromagnetischen Begründung der Mechanik, Arch. néerl. (2) 5 (1900), p. 96; Ann. Phys. 5 (1901), p. 501.

(Abgeschlossen im Dezember 1903.)

Encyklopädie
der Mathematischen Wissenschaften. V2. 2.

Seite 289 des Artikels Gans schließt unmittelbar an Seite 280 des Artikels Lorentz an; die Reihenfolge der Paginierung ist durch ein Versehen unterbrochen worden.

V 15. ELEKTROSTATIK UND MAGNETOSTATIK.

Von

R. GANS

IN TÜBINGEN.

Inhaltsübersicht.

1. Einleitung.
2. Elektromagnetische Theorie.
3. Die Grundgleichungen der Elektrostatik und der Magnetostatik.
4. Eindeutigkeit des Feldes. Vergleich mit der Fernwirkungstheorie.
5. Allgemeine Eigenschaften des Feldes.
6. Superposition der Felder. Die Energie.

I. Elektrostatik.

A. Die Dielektrizitätskonstante ist im ganzen Raume eine und dieselbe Konstante.

7. Systeme von Leitern. Kapazität. Potentialverstärker. Influenzmaschine. Plattenkondensator.
8. Kräfte eines Leitersystems. Absolutes Elektrometer. Quadrantelektrometer.
9. Zweidimensionale Probleme. Abbildung. Dichte der Elektrizität an Kanten.
10. Anwendung auf das Schutzgitter.
11. Anwendung auf den Kondensator.
12. Kugel. Ellipsoid. Zylinder. Ring.
13. Elektrische Bilder. Zwei Kugeln.

B. Die Dielektrizitätskonstante hat in verschiedenen Teilen des Raumes verschiedene Werte.

14. Ungeladene Dielektrika im Felde. Leiter als Grenzfall des Dielektrikums. Kondensator mit geschichtetem Dielektrikum.
15. Influenz. Wahre und freie Elektrizität.
16. Influenz auf Ellipsoid und Kugel. *Clausius-Mossotti*'sche Theorie.
17. Hohlkugel und Hohlzylinder im gleichförmigen Feld.
18. Spannungen und Kräfte.
19. Kräfte auf starre Körper.
20. Elektromotorische Kräfte.
21. Kristalle.
22. Rückstand.

II. Magnetostatik.

23. Unterschiede der magnetostatischen und elektrostatischen Probleme.
24. Gibt es wahren Magnetismus?
25. Influenz. Wahrer und freier Magnetismus.
26. Energie und Kräfte.
27. Kräfte auf starre Körper.
28. Magnetisches Moment. Horizontalintensität. Kompaß.
29. Magnetische Doppelschicht.
30. Kristalle.
31. Ferromagnetische Körper.
32. Hysteresis.

Literatur.

Man vergleiche die Literatur der Artikel II A 7b; V 12; V 13.

G. Green, An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism. Nottingham 1828, zitiert als „Essay" und *Ostwalds* Klassiker Nr. 61. Auch abgedruckt in Mathematical Papers of the late George Green, herausgeg. von *N. M. Ferrers,* London 1871.

M. Faraday, Experimental researches in electricity, 3 vol. London 1839—1855 u. *Ostwalds* Klassiker.

A. Beer, Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik, herausgegeben von *J. Plücker.* Braunschweig 1865.

W. Thomson, Reprint of papers on electrostatics and magnetism, London 1872. Zitiert als „Reprint".

J. C. Maxwell, Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus. (Deutsche Übersetzung von: A treatise on electricity and magnetism, 2 vol. Oxford 1873), Berlin 1883. Zitiert als „Treatise".

B. Riemann, Schwere, Elektrizität und Magnetismus, Hannover 1876.

M. E. Mascart, Traité de l'électricité statique, 2 Bde. Paris 1876.

R. Clausius, Die mechanische Wärmetheorie, 2. 2. Aufl., Braunschweig 1879.

H. v. Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen 1, Leipzig 1882.

G. Kirchhoff, Gesammelte Abhandlungen, Leipzig 1882.

— Vorlesungen über mathematische Physik 3, Leipzig 1891.

Mascart et Joubert, Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus (deutsche Ausgabe: Berlin 1886).

F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen, Leipzig 1887.

— Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus, Leipzig 1881.

G. Wiedemann, Die Lehre von der Elektrizität, 4. Aufl. Braunschweig 1889.

H. Poincaré, Électricité et optique, Paris 1890 (deutsche Ausgabe: Berlin 1891).

H. Hertz, Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft, Leipzig 1892.

P. Drude, Physik des Äthers auf elektromagnetischer Grundlage, Stuttgart 1894.

W. Voigt, Kompendium der theoretischen Physik 2. Leipzig 1896.

A. Korn, Lehrbuch der Potentialtheorie. Berlin 1899.

H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der math. Physik 1, Braunschweig 1900.

E. Cohn, Das elektromagnetische Feld, Leipzig 1900. Zitiert als „Elm. Feld".
L. Graetz, Elektrostatik usw. in *Winkelmann's* Handbuch der Physik 2. Aufl. 4[1]. Leipzig 1903.
J. Bosscha, Leerboek der natuurkunde 5. Magneetkracht en electriciteit. 1° stuk. Herausgegeben von *C. H. Wind*, Leiden 1903.
M. Abraham u. A. Föppl, Einführung in die *Maxwell*'sche Theorie der Elektrizität, 2. Aufl. Leipzig 1904.
J. Wallentin, Einleitung in die theoretische Elektrizitätslehre, Leipzig 1904.
F. Auerbach, Magnetismus. In *Winkelmann's* Handbuch der Physik. 2. Aufl., 5[1]. Leipzig 1905.

In *Ostwalds* „Klassikern der exakten Wissenschaften" erschienen:
Nr. 13. *Coulomb,* Vier Abhandlungen über die Elektrizität u. den Magnetismus (1785—86), herausgegeben von *W. König.*
Nr. 53. *C. F. Gauß,* Die Intensität der erdmagnetischen Kraft auf absolutes Maß zurückgeführt (1832), herausgegeben von *E. Dorn.*
Nr. 61. *G. Green,* Ein Versuch, die mathematische Analysis auf die Theorien der Elektrizität und des Magnetismus anzuwenden (1828), herausgegeben von *A. J. v. Oettingen* u. *A. Wangerin.*
Nr. 69. *J. C. Maxwell,* Über Faradays Kraftlinien (1855—1856), herausgegeben von *L. Boltzmann.*
Nr. 81, 86, 87, 126, 128, 131, 134, 136, 140. *M. Faraday,* Experimentaluntersuchungen über Elektrizität (1832—1850), herausgegeben von *A. J. v. Oettingen.*

---

1. Einleitung. Die ursprüngliche Grundlage der Elektrostatik und Magnetostatik bildeten die *Coulomb*'schen Gesetze[1]). Wegen ihrer Ähnlichkeit mit dem *Newton*'schen Gravitationsgesetze erscheinen die Gebiete der Elektrostatik und Magnetostatik demjenigen der Gravitation wenigstens in mathematischer Hinsicht eng verwandt. Dementsprechend ist es möglich, die Grundtatsachen aller drei Gebiete bis zu einem gewissen Grade der Vollständigkeit gemeinsam darzustellen, wie dies in Bd. II, Art. Potentialtheorie[2]) geschehen ist.

Der Standpunkt der Theorie wurde ganz anders, als *Faraday* die Dielektrizitätskonstante und die Permeabilität entdeckt hatte und in konsequenter Weise die Ansicht vertrat, daß bei allen elektromagnetischen Erscheinungen das Medium zwischen den aufeinander wirkenden Körpern von wesentlicher Bedeutung sei. *Maxwell* brachte die *Faraday*'schen Gedanken in mathematische Form und stellte in zwei nach ihm benannten Vektorgleichungen die elektromagnetischen Erscheinungen dar. In der *Maxwell*schen Theorie müssen also Elektrostatik und Magnetostatik als Spezialfälle enthalten sein.

---

1) Vgl. V 12, Die Elementargesetze, Art. *Reiff-Sommerfeld,* Nr. 1.
2) Vgl. II A, 7b Potentialtheorie, Art. *Burkhardt-Meyer.*

Wir werden infolgedessen, entsprechend dem heutigen Stande der Wissenschaft, von den *Maxwell*'schen Gleichungen ausgehen.

Wegen der allgemeinen, mehr mathematisch gehaltenen Untersuchungen zur Potentialtheorie muß auf den genannten Artikel[2]) in Band 2 verwiesen werden; hier sollen hauptsächlich solche Arbeiten berücksichtigt werden, die unmittelbare Anwendung auf physikalische Probleme finden.

2. Elektromagnetische Theorie. Die *Maxwell*'schen Gleichungen lauten[3])

$$c \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{J}, \tag{1}$$

$$-c \operatorname{rot} \mathfrak{E} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}. \tag{2}$$ [4])

Hier ist c eine universelle Konstante (Lichtgeschwindigkeit im Vakuum); $\mathfrak{E}$ resp. $\mathfrak{H}$ elektrische resp. magnetische Feldstärke; $\mathfrak{D}$ resp. $\mathfrak{B}$ elektrische resp. magnetische Erregung (früher Polarisation oder Induktion genannt), $\mathfrak{J}$ die elektrische Strömung.

Für isotrope, homogene Körper ist[5])

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}, \tag{3}$$

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}, \tag{4}$$

$$\mathfrak{J} = \sigma \mathfrak{E}. \tag{5}$$

ε heißt Dielektrizitätskonstante (für den Äther setzen wir $\varepsilon = 1$), μ heißt Permeabilität oder Magnetisierungskonstante (für den Äther setzen wir $\mu = 1$). σ heißt elektrische Leitfähigkeit[6]).

Bilden wir von (1) und (2) die Flächenintegrale über eine gegeschlossene Fläche σ, so ergibt sich, daß

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \mathfrak{D}_n d\sigma + \int \mathfrak{J}_n d\sigma = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \mathfrak{B}_n d\sigma = 0. \tag{7}$$

Verläuft in (6) die Fläche σ vollkommen in einem Isolator, so ist

$$\int \mathfrak{D}_n d\sigma = e \text{ zeitlich constant;} \tag{6'}$$

für jede Fläche ist

3) Vgl. V 13 Maxwellsche Theorie, Art. *H. A. Lorentz,* Nr. 6.

4) Wegen der Vektorbezeichnungen und -beziehungen vgl. IV 2, 14 Geometrische Grundbegriffe Art. *Abraham* und V 13 Maxwellsche Theorie, Art. *H. A. Lorentz,* Nr. 3 u. 4.

5) Vgl. V 13 Maxwellsche Theorie, Art. *H. A. Lorentz,* Nr. 8.

6) Wegen der hier gewählten Einheiten vgl. V 13 Maxwellsche Theorie, Art. *H. A. Lorentz,* Nr. 7.

(7') $$\int \mathfrak{B}_n d\sigma = m$$

zeitlich konstant. Wir nennen diese Konstanten die von der Fläche eingeschlossene elektrische resp. magnetische Menge.

(8) $$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho_e$$

und

(9) $$\operatorname{div} \mathfrak{B} = \varrho_m$$

sind die elektrische resp. magnetische Dichte. Tritt auch Flächenladung auf, so ist deren Dichte

(8') $$\mathfrak{D}_n^{(2)} - \mathfrak{D}_n^{(1)} = \omega_e$$

resp.

(9') $$\mathfrak{B}_n^{(2)} - \mathfrak{B}_n^{(1)} = \omega_m.$$ [7])

Multipliziert man (1) skalar mit $\mathfrak{E}$, (2) skalar mit $\mathfrak{H}$, addirt und integriert über ein beliebiges Raumstück S mit der Oberfläche σ, so erhält man[8]) mit Berücksichtigung von (3), (4) und (5)

(10) $$-c\int_\sigma [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_n d\sigma = \frac{\partial}{\partial t}\int \left(\tfrac{1}{2}\varepsilon\mathfrak{E}^2 + \tfrac{1}{2}\mu\mathfrak{H}^2\right) dS + \int \sigma\mathfrak{E}^2 dS$$

als Ausdruck des Energieprinzips für homogene, isotrope Körper.

$c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = \mathfrak{S}$ ist der *Poynting*'sche Strahlungsvektor, $\int \frac{1}{2}\varepsilon\mathfrak{E}^2 dS = W_e$ und $\int \frac{1}{2}\mu\mathfrak{H}^2 dS = W_m$ sind die elektrische resp. magnetische Energie[8]), $\sigma\mathfrak{E}^2 = Q$ ist die pro Zeiteinheit in der Volumeinheit entwickelte *Joule*sche Wärme.

3. Die Grundgleichungen der Elektrostatik und der Magnetostatik. Soll der betrachtete Zustand statisch sein, so muß $\partial/\partial t = 0$ sein, und es darf ferner keine Energieumsetzung stattfinden, d. h. es muß Q verschwinden. Das bedeutet aber: in Leitern gilt

(11) $$\mathfrak{E} = 0.$$

Aus (2) und (1) folgt dann

I. $\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0,$ Ia. $\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0,$

oder

I'. $\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \varphi,$ Ia'. $\mathfrak{H} = -\operatorname{grad} \psi.$

In Leitern ist wegen (11) φ konstant. φ und ψ heißen elektrisches resp. magnetisches Potential.

Aus (8) und (9) wird durch Benutzung von I' und Ia'

---

7) Vgl. V 13 Maxwellsche Theorie, Art. *H. A. Lorentz*, Nr. **11**.

8) Vgl. V 13 Maxwellsche Theorie, Art. *H. A. Lorentz*, Nr. **22**. In der Bezeichnung weicht dieser Artikel von dem Lorentzschen insofern ab, als hier W_e und W_m die ganze elektrische und magnetische Energie des Feldes, dort die Energie der Volumeinheit bedeuten.

II. $\operatorname{div} \varepsilon \operatorname{grad} \varphi = -\varrho_e$, IIa. $\operatorname{div} \mu \operatorname{grad} \psi = -\varrho_m$.

Die elektrische resp. magnetische Energie schreibt sich

III. $W_e = \int \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{grad}^2 \varphi \, dS$, IIIa. $W_m = \int \frac{\mu}{2} \operatorname{grad}^2 \psi \, dS$.

Ist ε resp. μ an einer Fläche σ mit der Normalen n unstetig, so folgt aus (8′) und (9′)

IV. $\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -\omega_e$, IVa. $\mu_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial n} - \mu_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial n} = -\omega_m$.

Aus (1) und (2) ergibt sich ferner, da diese Gleichungen überall Beziehungen zwischen endlichen Größen darstellen sollen, daß an Flächen σ, in denen ε und μ unstetig sind, die Tangentialkomponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ stetig sind[9]). Ist s eine tangentiale Richtung an σ, so muß

$$\text{V.} \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s}, \qquad \text{Va.} \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial s} = \frac{\partial \psi_2}{\partial s}$$

sein. Da $-\operatorname{grad} \varphi$ und $-\operatorname{grad} \psi$ auch *in* der Unstetigkeitsfläche σ die elektrische resp. magnetische Feldstärke darstellen sollen, welche durchweg endliche Größen sind, so müssen φ und ψ auch an σ, also *im ganzen Raume stetig* sein, da sonst die Normalkomponente der Feldstärken *in* σ unendlich groß würde. Von dieser Darstellung weicht man nur ab bei Einführung der elektrischen und magnetischen Doppelschichten (s. unten Nr. 29).

Durch I′ und Ia′ sind φ und ψ nur bis auf eine willkürliche additive Konstante definiert. Gewöhnlich setzt man im Unendlichen φ und ψ gleich Null, falls dort keine Ladungen gedacht werden. Hiermit ist es verträglich, daß man das Potential φ der Erde, die man für die meisten Probleme als sich ins Unendliche erstreckend betrachten kann, gleich Null annimmt. Eine Ausnahme von der Bestimmung: φ und ψ gleich Null im Unendlichen pflegt man bei der Behandlung homogener Felder zu machen, in denen das Unendliche selbst geladen erscheint und das Potential im Unendlichen unendlich groß wird. In diesem Falle legt man einer willkürlichen Stelle im Endlichen das Potential Null bei.

Tatsächlich verzichtet man bei Einführung von Doppelschichten und von homogenen Feldern auf die Beschreibung der wahren Verhältnisse in der Doppelschicht resp. in unendlicher Entfernung.

---

9) Vgl. V 13 Maxwellsche Theorie, Art. *H. A. Lorentz,* Nr. 6. *Romich* und *Fajdiga* haben Wien Ber. 70 II (1875), p. 367 experimentell gezeigt, daß dünne dielektrische Überzüge die ponderomotorischen Kräfte nicht ändern Dies folgt aus der Theorie unter der Annahme, daß die Gleichungen auch in den Unstetigkeitsflächen gültig sind.

Da die Energie endlich sein muß, so müssen grad φ und grad ψ stärker als $R^{-1/2}$ im Unendlichen verschwinden, wenn R die Entfernung eines Punktes im Unendlichen von einem willkürlichen Punkt im Endlichen ist.

φ und ψ müssen also im Unendlichen stärker als $R^{-1/2}$ verschwinden.

I. bis V. resp. Ia. bis Va. bilden mit den Stetigkeitsbedingungen und der Unendlichkeitsbedingung die Grundgleichungen des elektrostatischen resp. magnetostatischen Feldes. Da die Gleichungen für φ und ψ nicht simultan sind, ergibt sich die einfache Superposition eines elektrostatischen und eines magnetostatischen Feldes; ebenso superponieren sich ihre Energien, wir dürfen also jedes für sich behandeln.

Dagegen superponieren sich die Strahlungen nicht. Diese sind, wenn nur ein elektrostatisches Feld oder nur ein magnetostatisches Feld vorhanden ist, wegen Nr. 2 Null; überlagern sich aber ein elektrostatisches und ein magnetostatisches Feld, so ist die Strahlung im Allgemeinen nicht Null, wir müssen uns also die Energie nach der *Poynting*schen Darstellung als in Bewegung befindlich vorstellen, allerdings in geschlossenen Bahnen, so daß der Energieinhalt jeden Volumelements unverändert bleibt. Die *Poynting*sche Vorstellungsweise erscheint im Falle solcher zusammengesetzter statischer Felder also gewaltsam [10]).

4. Eindeutigkeit des Feldes. Vergleich mit der Fernwirkungstheorie. Das Potential φ (oder ψ) ist eindeutig gegeben durch die Dichten ϱ und ω; auf Leitern braucht nur die gesamte Elektrizitätsmenge e oder das Potential gegeben zu sein; denn die Differenz $\varphi'' = \varphi - \varphi'$ der beiden als möglich angenommenen Funktionen φ und φ' genügt solchen Bedingungen, daß in der durch partielle Integration leicht abzuleitenden identischen Gleichung (12) die rechte Seite Null wird.

$$
(12)\quad \begin{aligned} \int \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{grad}^2 \varphi'' dS = -\int \frac{\varphi''}{2} \operatorname{div} \varepsilon \operatorname{grad} \varphi'' dS \\ -\int \frac{\varphi''}{2}\left(\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2''}{\partial n} - \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1''}{\partial n}\right) d\sigma - \int \frac{\varphi''}{2}\, \varepsilon \frac{\partial \varphi''}{\partial n}\, d\sigma. \end{aligned}
$$

Das zweite Integral rechts erstreckt sich über alle Unstetigkeitsflächen von ε, das dritte über alle Leiterflächen und eine unendlich große Fläche. n ist im zweiten Integral rechts die Normalenrichtung auf σ, welche nach der mit dem Index 2 bezeichneten Seite weist, im dritten Integral die ins Dielektrikum hineinweisende Normalenrichtung.

10) Vgl. V 13 *Maxwell*sche Theorie Art. *H. A. Lorentz* Nr. 22 und Anmerkung 42). Auf die oben genannte Unzuträglichkeit hat zuerst *H. Hertz* hingewiesen. Ann. Phys. Chem. (3) 40 (1890), p. 577; Ges. Werke 2, p. 234, Leipzig 1892.

Also ist $\varphi = \varphi'$. Dasselbe gilt auch, wenn die Begrenzung des Raumes nicht im Unendlichen liegt, sondern wenn auf der Begrenzung φ oder $\partial \varphi / \partial n$ gegeben ist, insbesondere wenn eine leitende Hülle den Raum begrenzt.

Hat ε im ganzen Dielektrikum einen konstanten Wert, so gilt wegen II.

$$\Delta \varphi = -\frac{\varrho_e}{\varepsilon} \tag{13}$$

und wegen IV.

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -\frac{\omega_e}{\varepsilon}. \tag{14}$$

Ein Integral von (13) und (14) ist aber[11])

$$\varphi = \int \frac{\varrho_e}{4\pi\varepsilon r} dS + \int \frac{\omega_e}{4\pi\varepsilon r} d\sigma = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum \frac{e}{r}. \tag{15}$$

Dieser Ausdruck genügt allen an φ gestellten Bedingungen; wegen der Eindeutigkeit der Lösung ist er also das einzige Integral. Ist ε nicht konstant, so hat man die Darstellung (15) abzuändern (vgl. Nr. **15** (87)).

Durch Differentiation von (15) nach der beliebigen Richtung s folgt wegen I'.:

$$\mathfrak{E}_s = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum \frac{e}{r^2} \frac{\partial r}{\partial s} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum \frac{e}{r^2} \cos(r, s). \tag{16}$$

Da bei konstantem ε die Feldstärke als „Kraft auf die Menge Eins" definiert ist (vgl. Nr. **18** (94)), so ist (16) der Ausdruck des *Coulombschen Gesetzes*.

5. Allgemeine Eigenschaften des Feldes. Auf Grund der Hauptgleichungen lassen sich über den Verlauf der einzelnen Erregungslinie ($\mathfrak{D}$-Linie) einige allgemeine Aussagen machen: bei stetigem ε ist die $\mathfrak{D}$-Linie stetig und stetig gekrümmt bis auf Flächen, auf denen Flächenelektrizität sitzt. Springt ε an einer ungeladenen Fläche, so gilt wegen (8') und V.

$$\varepsilon_1 \mathfrak{E}_n^{(1)} = \varepsilon_2 \mathfrak{E}_n^{(2)}, \tag{17}$$

$$\mathfrak{E}_s^{(1)} = \mathfrak{E}_s^{(2)}, \tag{18}$$

also

$$\frac{\operatorname{tg}(\mathfrak{E}, n)_1}{\operatorname{tg}(\mathfrak{E}, n)_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \tag{19}$$

Dies ist das Brechungsgesetz der Erregungslinien; mit seiner Hilfe lassen sich Dielektrizitätskonstanten bestimmen[12]).

11) Vgl. Potentialtheorie Art. *Burkhardt-Meyer* II A 7b, Nr. 2.

12) *W. v. Bezold*, Ann. Phys. Chem. (3) 21 (1884), p. 401; die Theorie der Versuchsanordnung ist falsch, hierauf hat *F. Lohnstein*, Ann. Phys. Chem. (3) 44 (1891), p. 164 aufmerksam gemacht. Einwandsfrei ist die Versuchsanordnung von *A. Pérot*, Paris C. R. 113 (1891), p. 415.

Da die Aussagen der vorigen und dieser Nummer auch für magnetische Erscheinungen gelten, wenn man ε, $\mathfrak{E}$, φ mit μ, $\mathfrak{H}$, ψ vertauscht, so folgt aus (19) z. B., daß die magnetischen Erregungslinien aus Eisen (sehr großes μ) fast senkrecht in die Luft austreten.

Aus I. folgt $\int \mathfrak{E}_s ds = 0$ für jede geschlossene Kurve, also können die $\mathfrak{E}$-Linien keine geschlossenen Kurven sein, sie entspringen (münden) an Stellen positiver (negativer) Elektrizität, gehen von Stellen höheren zu Stellen niederen Potentials und stehen senkrecht auf den Äquipotentialflächen (Niveauflächen), also z. B. auch auf den Leiteroberflächen (vgl. I'.).

Ist das Feld von einer leitenden Hülle umschlossen, so ist, da im Leiter $\mathfrak{E} = 0$ (11), das Flächenintegral $\int \mathfrak{D}_n d\sigma = 0$, wenn σ vollständig in der leitenden Hülle verläuft, d. h. es ist gleichviel positive und negative Elektrizität im Innern der Hülle. Die innere Oberfläche wird ebenfalls geladen sein, sie gehört mit zum Felde.

Trennt die leitende Hülle ein inneres Feld von einem äußeren, so gehört die innere (äußere) Oberfläche σ_i (σ_a) der Hülle mit zum inneren (äußeren) Felde; ist die Gesamtladung der Hülle e, und ist e_i die Elektrizitätsmenge der Körper im Innern, so befindet sich nach obigem Satze auf σ_i die Elektrizitätsmenge $-e_i$, also auf σ_a die Menge $e_i + e$.

Nun ist das Feld im Innenraum, unabhängig von den e_a, durch die e_i gegeben. Sind diese speziell $= 0$, so ist, gleichviel welches Feld im Außenraum besteht, kein Feld im Innern vorhanden; diese Erscheinung nennt man die *Schirmwirkung einer leitenden Hülle*[13]).

Da, wie bemerkt, auf σ_i keine Elektrizität vorhanden ist, wenn im Hohlraum des Leiters keine Elektrizität sich befindet, so *befindet sich alle Elektrizität eines Leiters auf seiner äußeren Oberfläche.* Ein elektrisierter Leiter im Innern eines zweiten muß also bei der Berührung mit diesem seine gesamte Elektrizitätsmenge an ihn abgeben, da bei der Berührung das System nur *einen* Leiter bildet. Dieses Experiment der vollständigen Ladungsabgabe ist ein sehr genauer Beweis dafür, daß im *Coulomb*'schen Gesetz die Potenz der Entfernung den Wert 2 hat[14]).

---

13) *E. Almansi,* Linc. Rend. (5) 13 [2] (1904), p. 12 behandelt den Fall hohler Leiter, deren Hohlraum durch Löcher mit dem Außenraume verbunden ist. Er findet, daß die im Innern sitzende Elektrizitätsmenge $e < \sum \frac{aV}{2}$ ist, wo V das Potential des Leiters und a den Radius des kleinsten Kreises auf der Oberfläche bedeutet, durch den das betreffende Loch verdeckt werden kann.

14) *Maxwell*, Treatise 1, Art. 74a. Das Experiment wurde zuerst von

Einige wichtige Reziprozitäts- und Minimalsätze findet man in dem Artikel über *Maxwell*sche Theorie von *H. A. Lorentz* V 13, Nr. 27. Bis auf die über Leiter ausgesprochenen Sätze gelten alle mutatis mutandis auch für magnetostatische Felder.

6. Superposition der Felder. Die Energie. Durch die Werte ϱ', ω' und die Werte von e' oder φ' auf Leitern ist das Feld $\mathfrak{E}'$ und damit auch die Dichte ω' auf den Leitern bestimmt (Nr. 4). Aus den Werten ϱ'', ω'', e'' oder φ'' folge das Feld $\mathfrak{E}''$; dann bestimmt sich aus

$$\varrho = \varrho' + \varrho'', \quad \omega = \omega' + \omega'', \quad e = e' + e'' \text{ oder } \varphi = \varphi' + \varphi'',$$

das Feld

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}' + \mathfrak{E}'',$$

denn dieser Wert genügt wegen der Linearität der Gleichungen allen Bedingungen, wegen der Eindeutigkeit ist es also der einzig mögliche Wert.

Hieraus schließt man, daß das Potential φ der Ladungen $e_1, e_2, \ldots$ die Form hat

$$\varphi = e_1 \varphi_1 + e_2 \varphi_2 + \cdots, \tag{20}$$

wo die φ_ν von den e_ν unabhängige Ortsfunktionen sind.

Der Energieausdruck III. läßt sich auf Grund von (12), wenn wir dort φ statt φ'' setzen, auf die Form bringen

$$W = \tfrac{1}{2} \sum e\varphi. \tag{21}$$

Die Energien zweier Felder überlagern sich nicht, sondern es kommt noch eine *wechselseitige Energie*

$$U = \tfrac{1}{2} \sum (e'' \varphi' + e' \varphi'')$$

hinzu. Für diese wechselseitige Energie gewinnt man durch partielle Integration von $\int \varepsilon \mathfrak{E}' \mathfrak{E}'' dS$ noch die folgenden Darstellungen:

$$U = \sum e'' \varphi' = \sum e' \varphi'' = \int \varepsilon \mathfrak{E}' \mathfrak{E}'' dS. \tag{22}$$

Aus (22) folgt: Bringt man die unendlich kleine Elektrizitätsmenge de zu einem Felde hinzu, so ist die Energiezunahme

$$dW = \varphi de,$$

also

$$\varphi = \frac{\partial W}{\partial e}, \tag{23}$$

Cavendish gemacht; es ergab sich bei einer späteren Wiederholung des Versuchs als Exponent $2 \pm 5 \cdot 10^{-5}$. Eine Kritik der Theorie des Versuchs findet man bei *S. J. Barnett*, Phys. Rev. 15 (1902), p. 175.

d. h. das Potential eines Punktes (Leiters) ist gleich der Energievermehrung, die auftritt, wenn man die unendlich kleine Menge de dem Punkte (Leiter) zufügt, geteilt durch eben diese Menge.

I. Elektrostatik.

A. Die Dielektrizitätskonstante ist im ganzen Raume eine und dieselbe Konstante.

7. Systeme von Leitern. Kapazität. Potentialverstärker. Influenzmaschine. Plattenkondensator. Es seien n Leiter in einer leitenden Hülle vom Potential Null eingeschlossen. Der νte Leiter habe das Potential V_ν und die Elektrizitätsmenge e_ν, dann ist wegen (20)

$$V_\nu = \sum_{k=1}^{n} \beta_{\nu k} e_k. \tag{24}$$

Auflösung nach den e_μ ergibt

$$e_\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\mu i} V_i. \tag{25}$$

Wegen (24) und (23) ist

$$\beta_{\nu\mu} = \frac{\partial V_\nu}{\partial e_\mu} = \frac{\partial}{\partial e_\mu}\left(\frac{\partial W}{\partial e_\nu}\right) = \frac{\partial}{\partial e_\nu}\left(\frac{\partial W}{\partial e_\mu}\right) = \beta_{\mu\nu}, \tag{26}$$

also auch

$$\alpha_{\nu\mu} = \alpha_{\mu\nu}. \tag{27}$$

Die β heißen *Potentialkoeffizienten,* ein α mit verschiedenen Indizes heißt *wechselseitiger* (elektrostatischer) *Induktionskoeffizient,* $\alpha_{\mu\mu}$ heißt die *Kapazität* des Leiters μ, sie ist gleich der Elektrizitätsmenge, welche auf dem Leiter sitzt, wenn sein Potential 1 ist, während die übrigen Leiter das Potential Null haben.

Mit Hilfe von (21) und (24) resp. (25) wird

$$W_{(e)} = \tfrac{1}{2} \sum_\mu \sum_\nu \beta_{\mu\nu} e_\mu e_\nu \tag{28}$$

resp. $\qquad \mu, \nu = 1, 2, \cdots n.$

$$W_{(V)} = \tfrac{1}{2} \sum_\mu \sum_\nu \alpha_{\mu\nu} V_\mu V_\nu. \tag{29}$$

Erteilt man den geladenen Leitern virtuelle Verschiebungen, indem man auf jedem die gesamte Elektrizitätsmenge konstant läßt, so wird die Arbeit gleich der Abnahme der elektrischen Energie[15]), d. h.

---

15) Damit man die Arbeit gleich der ganzen Energieabnahme setzen kann, muß man zeigen, daß die *Joule*sche Wärme bei einer Verschiebung unendlich klein gegen die übrige Energieänderung ist. Dieser Beweis läßt sich führen; vgl. *Kirchhoff,* Vorlesungen 3, p. 76 ff. oder *Cohn*, Elm. Feld, p. 59.

(30) $$\delta A = -\delta W_{(e)} = -\tfrac{1}{2}\sum_{\mu}\sum_{\nu} e_\mu e_\nu \delta\beta_{\mu\nu}.$$

Die $\beta_{\mu\nu}$ enthalten die Parameter, welche die Lage der geladenen Körper bestimmen.

Setzt man in (30) anstatt der e die V mit Hilfe von (25) ein, so folgt

(31) $$\delta A = +\delta W_{(V)} = +\tfrac{1}{2}\sum_{\mu}\sum_{\nu} V_\mu V_\nu \delta\alpha_{\mu\nu}.$$

Die fragliche Arbeit ist also auch gleich der *Zunahme* der Energie bei konstant gehaltenen Potentialen. Natürlich betrachten wir dann kein vollständiges System, weil zum Konstanthalten der Potentiale Energie aus den zur Verfügung stehenden Reservoiren nachströmen muß. Die Kräfte, die sich aus (30) oder dem ganz gleichwertigen Ausdruck (31) ergeben, sind also quadratische Funktionen der Elektrizitätsmengen oder der Potentiale.

Da W wesentlich positiv ist, folgt, daß

$$\alpha_{11}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

positiv sein müssen. Die analogen Bedingungen bestehen für die β.

Folgende Eigenschaften kommen den α und β zu, wenn kein Leiter den anderen umschließt[16]):

1. Die $\alpha_{\nu\nu}$ sind > 0; die $\alpha_{\nu\mu} < 0$ $(\nu \neq \mu)$ und $\sum_{\mu=1}^{n}\alpha_{\nu\mu} > 0$.

2. Die β sind > 0; $\beta_{\nu\nu} > \beta_{\nu\mu}$.

3. Durch Einführung neuer Leiter ins Feld, also auch durch Vergrößerung eines Leiters werden alle $\beta_{\nu\nu}$ verkleinert.

4. Wachsen alle linearen Dimensionen eines Leiters ν unbegrenzt, so werden die $\beta_{\nu\mu}$ und $\beta_{\nu\nu}$ Null wie das Reziproke dieser Dimension. Daraus folgt z. B., daß das Erdpotential sich nicht durch Ableitung von Ladungen in der Nähe der Erde ändert.

5. Bei gleichmäßiger Vergrößerung aller Dimensionen des Feldes ändern sich die α in direktem, die β in umgekehrtem Verhältnis der Lineardimensionen.

6. Haben wir es mit nur zwei geladenen Leitern zu tun, und zwar so, daß alle Erregungslinien, die von einem ausgehen, auf dem anderen endigen (d. h. daß alle anderen Leiter unendlich weit entfernt sind, oder daß der eine Leiter den anderen vollständig umschließt), so ist

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = -\alpha_{12} = \alpha$$

16) Vgl. *Maxwell,* Treatise 1, Art. 89b und 89c.

und daher

(32) $$e_2 = -e_1 = \alpha(V_2 - V_1).$$

Eine solche Anordnung heißt ein *Kondensator*, α ist seine *Kapazität*.

Wir betrachten n Kondensatoren im Raume, die so weit voneinander entfernt sind, daß sie sich gegenseitig nicht beeinflussen. Die beiden Leiter eines Kondensators nennen wir seine Belegungen. Wir können die einzelnen Belegungen auf verschiedene Weise miteinander verbinden. Die Kapazität sehr dünner Drähte ist gegen die endlicher Kondensatoren zu vernachlässigen[17]).

a) *Parallel geschaltete Kondensatoren.* Wir verbinden je eine Belegung aller Kondensatoren miteinander und die anderen Belegungen auch miteinander, so daß wir zwei zusammenhängende leitende Flächen haben. Dann ist

$$e_\nu^{(1)} = \alpha_\nu(V_1 - V_2),$$

$$e^{(1)} = \sum e_\nu^{(1)} = \sum \alpha_\nu \cdot (V_1 - V_2) = \alpha(V_1 - V_2).$$

Die Kapazität ist die Summe der Einzelkapazitäten.

b) *Hintereinanderschaltung* (*Kaskadenbatterie*). Wir verbinden die zweite Belegung des ν ten Kondensators mit der ersten des $(\nu + 1)$ten und laden die erste Belegung des ersten Kondensators aufs Potential V_1, die zweite Belegung des letzten Kondensators aufs Potential V_2, dann ist das Potential der ersten Belegung des $\nu + 1$ ten gleich dem der zweiten Belegung des νten Kondensators:

$$V_{\nu+1}^{(1)} = V_\nu^{(2)}.$$

Ferner sind die absoluten Werte e der Ladungen aller Belegungen einander gleich, also ist

$$V_\nu^{(2)} - V_\nu^{(1)} = \frac{e_\nu^{(2)}}{\alpha_\nu} = \frac{e}{\alpha_\nu},$$

folglich

$$V_2 - V_1 = e\sum_\nu \frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{e}{\alpha}.$$

Die reziproken Werte der Einzelkapazitäten addieren sich also zum reziproken Wert der Gesamtkapazität.

Sind alle n Kapazitäten α einander gleich, so ist die Gesamtkapazität A im Falle a) $A = n\alpha$; im Falle b) $A = \frac{\alpha}{n}$.

Will man sich höhere Potentialdifferenzen verschaffen, als die zur Verfügung stehende Potentialquelle der Potentialdifferenz V liefert, so lade man eine Batterie in Parallelschaltung und schalte sie dann

17) Vgl. *Kirchhoff*, Vorlesungen 3, p. 24.

in Kaskaden[18]): Da zuerst $ne = n\alpha V$, wo α die Kapazität eines einzelnen Kondensators der Batterie ist, und nachher $e = \frac{\alpha}{n} V'$ ist, so wird $V' = nV$. Solche Anordnungen heißen *Potentialverstärker.*

Die Energie einer Batterie ist wegen (21) und (32)

$$W = \tfrac{1}{2} \sum e_\nu V_\nu = \tfrac{1}{2} \sum \alpha_\nu V_\nu^2 = \tfrac{1}{2} \sum \frac{e_\nu^2}{\alpha_\nu}.$$

Hier bedeutet V_ν die Potentialdifferenz der Belegungen des ν^{ten} Kondensators. Beim Potentialverstärker ist also in der ersten Schaltung die Energie $\frac{n\alpha V^2}{2}$, in der zweiten $\frac{1}{2} \frac{\alpha}{n} V'^2 = \frac{\alpha n V^2}{2}$, d. h. die Energie bleibt konstant, man erhält die Potentialerhöhung auf Kosten der zur Verfügung stehenden Elektrizitätsmenge.

Eine *Influenzmaschine* kann auch als Potentialverstärker oder Duplikator aufgefaßt werden. Das Prinzip ist folgendes[19]):

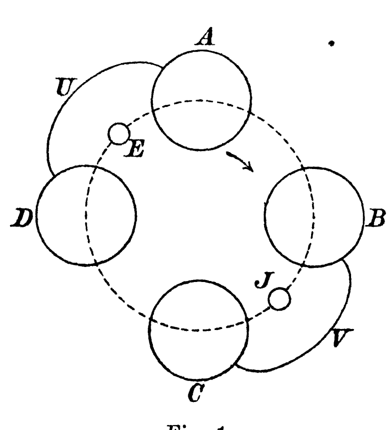


Fig. 1.

Zwei hohle Leiter A und D (vgl. Fig. 1) seien metallisch miteinander verbunden und auf dem Potential U_0, B und C seien gleichfalls miteinander verbunden und auf dem Potential V_0. Die beweglichen Leiter E und J können in A und C mit der Erde (Potential 0) und in B und D mit diesen verbunden werden. Ist E in A mit der Erde verbunden, so ist die Elektrizitätsmenge $-\alpha U_0$ auf E (α Kapazität des Kondensators, bestehend aus E und A), (nach (32)). Diese Ladung wird in B vollständig an B und C abgegeben (vgl. Nr. 5) und erhöht das Potential um $-\frac{\alpha}{c} U_0$ (c Kapazität von B und C zusammen). Nach einer halben Umdrehung ist also

$$V_1 = V_0 - \frac{\alpha}{c} U_0; \qquad U_1 = U_0 - \frac{\alpha}{c} V_0.$$

Nach der $n$ten halben Umdrehung ebenso

18) Über Duplikatoren siehe *W. Thomson*, Proc. Royal. Soc. 1867 und Reprint Art. 352 und Art. 401—426; Historisches, Art. 427—429. Vgl. auch *G. Plantés* „Rheostatische Maschine", Paris C. R. 85 (1877), p. 794 oder auch *W. Kaufmann,* Gött. Nachr. (1901), p. 143 und *W. Hallwachs,* Ann. Phys. Chem. (3) 29 (1886), p. 300.

19) Vgl. *Maxwell,* Treatise 1, Art. 209 (hier finden sich auch historische Angaben) oder *E. Cohn,* Elm. Feld, p. 81.

$$V_n = V_{n-1} - \frac{\alpha}{c} U_{n-1}; \qquad U_n = U_{n-1} - \frac{\alpha}{c} V_{n-1}$$

oder

$$V_n - U_n = (V_{n-1} - U_{n-1})\left(1 + \frac{\alpha}{c}\right) = (V_0 - U_0)\left(1 + \frac{\alpha}{c}\right)^n.$$

Maxwell hat[19]) auch einen Duplikator angegeben, bei dem die ganze geleistete Arbeit in elektrische Energie verwandelt wird, indem das Auftreten von Funken dadurch vermieden wird, daß nur Leiter gleichen Potentials miteinander in Berührung kommen.

Stehen sich zwei Metallplatten von den Potentialen V_1 resp. V_2 in dem kleinen Abstande a gegenüber, und legen wir die z-Achse in die Richtung der Plattenormalen, so wird an Stellen zwischen den Platten, die vom Rande weit entfernt sind,

$$\varphi = V_1 + \frac{V_2 - V_1}{a} z.$$

Die Dichte folgt aus IV.

$$\omega_1 = -\omega_2 = -\varepsilon\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_1 = -\varepsilon\frac{V_2 - V_1}{a}.$$

Sehen wir von den Rändern ab, wo die Elektrizitätsverteilung verwickelter ist, so ist auf der ganzen Fläche σ

$$e_1 = -e_2 = -\varepsilon\frac{V_2 - V_1}{a}\sigma, \tag{33}$$

d. h. die Kapazität ist (vgl. (32)) $\alpha = \frac{\varepsilon\sigma}{a}$.

Zwei Kondensatoren mit verschiedenen Dielektrizis haben also gleiche Kapazitäten, wenn $\varepsilon/\varepsilon' = \sigma' a/\sigma a'$ ist. So kann man Dielektrizitätskonstanten vergleichen[20]). Die genauere Formel für die Kapazität eines Kreisplattenkondensators mit Berücksichtigung der Streuung der Erregungslinien und der Elektrizität auf den einander abgewandten Seiten findet sich unten (Nr. **11**).

Um bei absoluten Messungen mit einem Plattenkondensator möglichst unabhängig von der Randkorrektion zu sein, und um den Einfluß äußerer elektrischer Kräfte von den Kondensatorteilen zu eliminieren, hat *W. Thomson*[21]) einen sogenannten Schutzringkondensator konstruiert. Man nehme große Platten, trenne durch einen feinen Schnitt einen Teil der einen Platte, der weit vom Rande entfernt liegt, ab und sorge für leitende Verbindung beider Teile; dann ist die Kapazität des inneren Teils sehr nahe durch $\frac{\varepsilon\sigma}{a}$ ausgedrückt. (Die genauere Formel findet sich in Nr. **11**.)

---

20) *L. Boltzmann*, Wien Ber. 67^2 (1873), p. 17.

21) *W. Thomson*, Reprint Art. 360.

8. Kräfte eines Leitersystems. Absolutes Elektrometer. Quadrantelektrometer. Die Arbeit bei einer virtuellen Verschiebung ist durch Nr. 7 (30) und (31) gegeben. Ist das Medium zwischen den Leitern homogen, so sind die β der Dielektrizitätskonstante umgekehrt (vgl. (24) u. (15)), die α direkt proportional (vgl. (25) u. (15)); also sind die Kräfte bei gegebenen Elektrizitätsmengen (Potentialen) der Dielektrizitätskonstanten umgekehrt (direkt) proportional[22]).

Zur absoluten Bestimmung von Potentialen eignet sich der *Thomson*sche Schutzringkondensator, das sogenannte absolute Elektrometer (vgl. Nr. 7[23])). Aus (31) und (33) folgt

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha}\delta\alpha = \frac{(V_2 - V_1)^2}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial a}\delta a = -\frac{(V_2 - V_1)^2}{2}\frac{\varepsilon\sigma}{a^2}\delta a,$$

d. h. die Kraft, welche den Plattenabstand zu verkleinern sucht, ist

$$(35) \qquad \frac{\varepsilon\sigma}{2}\left(\frac{V_2 - V_1}{a}\right)^2 = \frac{\varepsilon\sigma}{2}\mathfrak{E}^2.$$

Wegen des genaueren Wertes siehe Nr. **11**. Man hängt die eine Kondensatorplatte an der Wage auf und kompensiert die Kraft (35) durch Gewichte.

Verzichtet man auf absolute Messung der Potentiale, so ist das Quadrantelektrometer von *W. Thomson*[24]) als das bedeutend empfindlichere Instrument vorzuziehen. Eine flache Metallbüchse ist durch zwei zueinander senkrechte Achsenschnitte in 4 Quadranten geteilt (Fig. 2). Je zwei diagonal gegenüberliegende Quadranten sind metallisch miteinander verbunden und befinden sich auf den Potentialen A und B, während eine biskuitförmige Scheibe, die „Nadel", deren Ebene parallel Boden und Deckel der Büchse ist, und die frei um die vertikal stehende Achse der Büchse drehbar ist, auf dem Potential C sich befindet. Sind A, B, C einander gleich, so sind die Schlitze zwischen den Quadranten Symmetrieebenen der Nadel. Der ganze Apparat befindet sich in

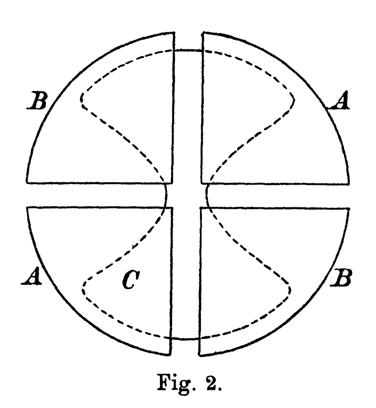


Fig. 2.

22) Dieser Satz wurde von *H. Helmholtz* zuerst ausgesprochen J. f. Math. 72 (1870), p. 117; zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten wurde er zuerst benutzt von *P. Silow*, Ann. Phys. Chem. (2) 156 (1875), p. 389.

23) *W. Thomson*, Reprint Art. 358 u. Phil. Mag. (4) 8 (1854), p. 42.

24) *W. Thomson*, Reprint Art. 345.

einer Metallhülle vom Potential Null. Die Elektrizitätsmengen, die A, B, C entsprechen, seien e_a, e_b, e_c. Dann ist wegen (25) und (27)

$$(36)\qquad \begin{aligned} e_a &= \alpha_{aa}A + \alpha_{ab}B + \alpha_{ac}C,\\ e_b &= \alpha_{ba}A + \alpha_{bb}B + \alpha_{bc}C,\\ e_c &= \alpha_{ca}A + \alpha_{cb}B + \alpha_{cc}C. \end{aligned}\qquad \alpha_{\mu\nu} = \alpha_{\nu\mu}.$$

Wegen der unter 1. in Nr. 7 angegebenen Eigenschaften ist nun $\alpha_{\nu\nu} > 0$, $\alpha_{\nu\mu} < 0$, $\sum_\mu \alpha_{\nu\mu} > 0$. Daher kann man schreiben

$$(36')\qquad \begin{aligned} e_a &= \gamma_{ab}(A - B) + \gamma_{ac}(A - C) + \gamma_a A,\\ e_b &= \gamma_{ba}(B - A) + \gamma_{bc}(B - C) + \gamma_b B,\\ e_c &= \gamma_{ca}(C - A) + \gamma_{cb}(C - B) + \gamma_c C, \end{aligned}$$

wo alle $\gamma > 0$ und $\gamma_{\nu\mu} = \gamma_{\mu\nu}$.

Die Energie ist wegen (21)

$$(37)\qquad W = \tfrac{1}{2}\{\gamma_{ab}(A - B)^2 + \gamma_{ac}(A - C)^2 + \gamma_{bc}(B - C)^2 + \gamma_a A^2 + \gamma_b B^2 + \gamma_c C^2\}$$

Das Drehmoment auf die Nadel wird nach (31)

$$\mathfrak{N} = \frac{\partial W}{\partial \vartheta},$$

wo ϑ der Winkel ist, um den die Nadel aus der Ruhelage abgelenkt ist.

Die Konstruktion des Instruments läßt Schlüsse auf die Abhängigkeit der γ von ϑ zu. Die breite Form der Nadel und die Schmalheit der Schlitze bewirken, daß von den Rändern der Nadel keine Erregungslinien nach den Rändern der Quadranten laufen, so daß sich bei einer unendlich kleinen Drehung $d\vartheta$ die Anzahl Erregungslinien, die zwischen B und C verlaufen, um einen $d\vartheta$ proportionalen Betrag vermehren. Aus Symmetriegründen ist

$$\frac{\partial \gamma_{bc}}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial \gamma_{ac}}{\partial \vartheta} = k,$$

dagegen sind γ_a, γ_b, γ_c, γ_{ab} von ϑ unabhängig, weil die Anzahl Erregungslinien, die von den Quadranten oder von der Nadel zur Hülle, sowie von einem Quadrantenpaar zum anderen gehen, durch die Drehung sich nicht verändern.

Also ist

$$(38)\quad \mathfrak{N} = \frac{k}{2}\{(B - C)^2 - (A - C)^2\} = k(A - B)\left\{(C - A) + \frac{A - B}{2}\right\}.$$

Die verschiedenen Schaltungsweisen der Quadranten und der Nadel

sind von *Hallwachs*[25]) behandelt. Er berücksichtigt auch die Kontaktpotentialdifferenzen zwischen den Metallteilen (s. u. Nr. 20).

9. Zweidimensionale Probleme[26]). **Abbildung. Dichtigkeit der Elektrizität an Kanten.** Wenn eine Verteilung der Elektrizität auf leitenden Zylinderflächen mit parallelen Erzeugenden vorliegt und die Querdimensionen klein sind gegen die Längenerstreckung der Zylinder, und wenn nur nach dem Zustand in den mittleren Teilen gefragt wird, so hängt das Problem allein von den zwei Variablen x und y ab, während es von der den Erzeugenden parallelen Variablen unabhängig ist.

Setzen wir

$$\varrho^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2,$$
$$r^2 = (z-c)^2 + \varrho^2,$$

wo a, b, c die laufenden Koordinaten sind, so wird

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{\omega}{r}\, d\sigma$$

unendlich. Man kann φ aber durch Addition einer unendlich großen Konstanten auf die Form

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int \omega \lg \varrho\, ds, \tag{39}$$

bringen. Diese Addition ist erlaubt, da φ nach Nr. 3 nur bis auf eine additive Konstante definiert ist. ds bedeutet ein Element der Spur der Zylinderflächen in der xy-Ebene.

Wegen der Form von (39) heißt φ das logarithmische Potential zum Unterschied von dem Potential φ der Nr. 4 (15), welches das *Newton*sche Potential heißt.

φ genügt der Gleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \tag{40}$$

---

25) *W. Hallwachs*, Ann. Phys. Chem. (3) 29 (1886), p. 1. Die Theorie ist vervollständigt unter der Annahme, daß bei Drehungen auch die höheren Potenzen des Drehwinkels mit in Betracht kommen. Dann ergibt sich außer dem oben angegebenen konstanten Drehmoment noch eins, das dem Ablenkungswinkel proportional ist. *Gouy,* J. d. phys. (2) 7 (1888), p. 97; *A. B. Chauveau*, J. d. phys. (3) 9 (1900), p. 524. Die Theorie eines Bifilarquadrantelektrometers mit konstanter Empfindlichkeit gibt *A. Hartwich*, Königsberger Diss. 1888 oder Ann. Phys. Chem. (3) 35 (1888), p. 772.

26) Vgl. auch *C. Neumann*, Untersuchungen über das logarithmische und Newtonsche Potential, Leipzig 1877.

welche auch der reelle Teil jeder Funktion $\chi = \varphi + i\psi$ komplexen Arguments $z = x + yi$[27]) befriedigt.

Liegen die leitenden Zylinderflächen sämtlich im Endlichen, so muß φ im Unendlichen wegen (39) die Form

$$\varphi_\infty = -\frac{E}{2\pi\varepsilon}\lg R \tag{41}$$

haben, wo $E = \int \omega\, ds$ die Gesamtelektrizitätsmenge auf der Höheneinheit der Zylinder, R den Abstand von einem beliebigen festen Punkt im Endlichen bedeutet. $\varphi + \frac{E}{2\pi\varepsilon}\lg R$ muß also im Unendlichen verschwinden.

Die Grundgleichungen der *Cauchy*'schen Funktionentheorie sind

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\partial\psi}{\partial n}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\frac{\partial\psi}{\partial s},$$

wenn die zueinander senkrechten Richtungen s und n im Sinne der reellen und imaginären Achse aufeinander folgen. Aus der letzten dieser beiden Beziehungen ergibt sich, daß die Elektrizitätsmenge E auf der Höhe 1 zwischen zwei Punkten s_1 und s_2 einer Randkurve — so wollen wir kurz die Spur eines Zylinders in der xy-Ebene nennen — mit den Werten ψ_1 und ψ_2 sich durch die Formel

$$E = -\int_{s_1}^{s_2} \varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, ds = \varepsilon(\psi_2 - \psi_1) \tag{42}$$

ausdrückt.

Ist ein Zylinder mit beliebig gestalteter Basisfläche zum Potential φ_0 geladen, so läßt sich das Potential außerhalb des Zylinders durch die Lösung einer Abbildungsaufgabe finden. Man braucht nämlich nur den Raum außerhalb der Randkurve s des Zylinders in der z-Ebene auf den Innenraum des Einheitskreises in einer w-Ebene abzubilden, indem man eine Funktion $w = u + vi$ von z sucht, welche auf der Randkurve s den absoluten Wert 1 hat und für $z = \infty$ sich in der Form

$$w = \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots \qquad (a_1 \neq 0) \tag{43}$$

entwickeln läßt. Durch

$$w = e^{\frac{2\pi\varepsilon}{E}(\chi - h)} \tag{44}$$

ist dann das Problem gelöst, wenn der reelle Teil der Konstanten h

27) z ist hier nicht mit der früher so bezeichneten dritten Raumkoordinate zu verwechseln.

gleich dem vorgeschriebenen Potentialwert φ_0 auf s ist. Denn aus (44) folgt

(44') $$\varphi = \varphi_0 + \frac{E}{2\pi\varepsilon} \lg |w|.$$

Wegen (41) und (43) muß $\varphi_0 + \frac{E}{2\pi\varepsilon} \lg |a_1| = 0$ sein, d. h. die Kapazität der Längeneinheit des Zylinders (vgl. Nr. 7) $\frac{E}{\varphi_0} = \frac{2\pi\varepsilon}{\lg \frac{1}{|a_1|}}$ ist durch das erste Glied der Entwicklung von w im Unendlichen gegeben.

Es ist wesentlich, daß nur *ein* Zylinder vorhanden ist, daß also der Raum außerhalb der Randkurve einfach zusammenhängend ist, da sonst die Abbildung auf den Einheitskreis nicht möglich wäre. Das Gleichgewicht der Elektrizität auf mehreren Zylindern mit kreisförmigem Querschnitt behandelt *B. Riemann*[28]) in einer Arbeit, die den ersten Anstoß zur Theorie der automorphen Funktionen gegeben hat.

In der Nähe einer Ecke vom Winkel $(1 - \alpha)\pi$ (im Dielektrikum gerechnet) erhält man das Potential durch Abbildung der z-Ebene auf eine w-Halbebene mittels der Formel

(47) $$w = (z - z_0)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

so daß

(48) $$\chi = \chi_0 + c \cdot (z - z_0)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

wird. Aus (42) berechnet sich die Elektrizitätsmenge auf der Höhe 1 über jeder endlichen Länge s der Randkurve, und aus (48) ergibt sich diese Menge als endlich, auch wenn die Kante sich auf dem betrachteten Stück befindet. Wegen (42) ist die Dichte der Elektrizität gleich dem Faktor von i in $\varepsilon \frac{d\chi}{ds} = \varepsilon \frac{d\chi}{dz} e^{i\gamma} = \varepsilon \frac{c e^{i\gamma}}{1-\alpha} (z - z_0)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$, wo γ der Winkel ist, den die Kante mit der x-Achse einschließt; die Dichte ist also unendlich klein (groß), wenn $\alpha > 0$ (< 0) ist, d. h. wenn die Kante des Zylinders ein-(aus-)springt.

Im dreidimensionalen Felde ergibt sich die Elektrizitätsverteilung in der Nähe einer scharfen Kante nach *A. Sommerfeld*[29]). *Green*[30]) beschäftigt sich mit der Frage der Elektrizitätsdichte an einer Kegelspitze, er findet daß die Dichte bei ein-(aus-)springenden Spitzen un-

---

28) *B. Riemann,* Ges. Werke, 2. Aufl., Leipzig 1892, p. 440.

29) *A. Sommerfeld,* Proc. Lond. Math. Soc. 28 (1897), p. 395; vgl. Potentialtheorie Art. *Burkhardt-Meyer* II A 7b Nr. 9, p. 476.

30) *G. Green,* Essay; s. Ostw. Klassiker Nr. 61, p. 66.

endlich klein (groß) wird, und zwar gibt er auch die Stärke des Null resp. Unendlichwerdens in der Nähe der Spitze an.

Ganz allgemein läßt sich auch die Elektrizitätsverteilung auf einem unendlich langen Prisma von polygonaler Basis berechnen, da mit Hilfe der *Schwarz*schen Derivierten jedes Polygon sich auf den Einheitskreis abbilden läßt[31]). Mit diesem Problem identisch ist das des elektrischen Gleichgewichts auf den beiden Belegungen eines Kondensators, wenn diese Belegungen Prismen von polygonaler Basis mit parallelen Erzeugenden sind und die Basis sich ins Unendliche erstreckt, so daß das Dielektrikum ein einfach zusammenhängender Raum ist.

Ist das Potential auf der einen Belegung Null, auf der anderen konstant $= \varphi_0$, so besteht die Aufgabe darin, das Polygon in der z-Ebene — und zwar den Teil, welcher dem Dielektrikum entspricht — auf einen Streifen in der χ-Ebene abzubilden, der durch die imaginäre Achse $\varphi = 0$ und eine ihr Parallele $\varphi = \varphi_0$ begrenzt ist, so daß die eine Grenze des Streifens der Spur der einen Kondensatorplatte, die andere Grenze der Spur der anderen Platte entspricht.

Man bewerkstelligt dies[31]) durch Abbildung des Polygons in der z-Ebene und des Streifens in der χ-Ebene auf den Teil der t-Ebene, der durch die reelle Achse und einen unendlich großen Halbkreis auf der positiv imaginären Seite der t mit $t = 0$ als Zentrum begrenzt ist.

Den n Ecken des Polygons mögen die Punkte $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ auf der reellen Achse der t-Ebene der Reihe nach entsprechen. Dann wird durch

$$(45) \qquad z = C\int (a_1 - t)^{-\alpha_1}(a_2 - t)^{-\alpha_2} \ldots (a_n - t)^{-\alpha_n}\, dt + C_1$$

diese Abbildung erreicht. Die α sind durch die Polygonwinkel bestimmt, indem $(1 - \alpha_\nu)\pi$ resp. $(\alpha_\nu - 1)\pi$ der ν^{te} innere Polygonwinkel ist, je nachdem der der ν^{ten} Ecke in der z-Ebene entsprechende Kreisbogen in der t-Ebene, der den Punkt a_ν von der Halbebene ausschließt, unendlich klein oder unendlich groß ist. C und C_1 bestimmen sich, indem man willkürlich zwei aufeinanderfolgenden Ecken des Polygons zwei aufeinanderfolgende a zuordnet.

Ebenso läßt sich der Streifen in der χ-Ebene auf die t-Halbebene abbilden, und zwar durch die Funktion

$$(46) \qquad \chi = \varphi_0\left(1 + \frac{i}{\pi}\lg t\right),$$

wo $\lg t$ für positiv reelle Werte von t reell zu nehmen ist.

---

31) *H. A. Schwarz*, J. f. Math. 70 (1869), p. 105; *E. B. Christoffel*, Ann. di mat. (2) 1 (1867); 4 (1870), siehe auch Potentialtheorie Art. *Burkhardt-Meyer* II A 7b Nr. 20.

Eliminiert man t aus (45) und (46), so ist z durch χ und damit auch χ durch z ausgedrückt. Der reelle Teil φ von χ gibt das Potential, der imaginäre Teil ψ durch Anwendung von (42) die Elektrizitätsmengen auf der Höheneinheit der Prismenflächen.

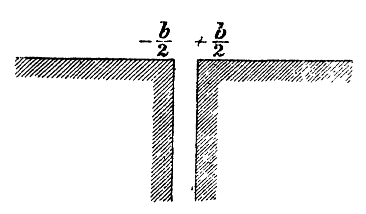


Fig. 3.

Beispiel. Es mögen sich zwei unendlich lange, unendlich dicke und unendlich breite ebene Platten (zwei Viertelräume) im Abstande b gegenüberstehen, wie Fig. 3 es andeutet, die einen Schnitt senkrecht zur Längenerstreckung der Platten darstellt.

Den Punkten

$$z = -\frac{b}{2}, \; -i\infty, \; +\frac{b}{2}$$

mögen die Punkte

$$t = -1, \;\; 0, \;\; +1$$

entsprechen. Die Polygonwinkel in diesen Punkten der z-Ebene sind

$$\frac{3\pi}{2}, \; 0, \; \frac{3\pi}{2},$$

also ergibt (45)

$$z = C\int \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\,dt + C_1$$

oder bei richtiger Bestimmung von C und C_1

$$(45') \qquad z = \frac{b}{2} + \frac{bi}{\pi}\left\{\sqrt{1-t^2} + \lg\frac{t}{\sqrt{1-t^2}+1}\right\}.$$

(45') und (46) stellen die Lösung des Problems dar.

Helmholtz[32]) hat durch die Abbildung zweier geradlinigen Schnitte (also einer zweifach zusammenhängenden Fläche), deren Endpunkte die Ecken eines Rechtecks bilden, auf einen Kreisring das Problem des Plattenkondensators behandelt, dessen Länge sehr groß gegen Breite und Plattenabstand ist. Die Endformel ist jedoch nicht richtig; sie ist von *H. Weber*[33]) verbessert.

10. Anwendung auf das Schutzgitter[34]). Eine geschlossene metallische Hülle schützt das Innere vor der Einwirkung eines äußeren

32) *H. Helmholtz*, Berl. Ber. (1868), p. 215 oder Wissensch. Abh. 1, p. 157, Leipz. 1882.

33) *H. Weber*, Partielle Differentialgleichungen 1, p. 356. Eine eingehende Untersuchung dieses Falles findet sich auch bei *F. Bennecke*, Verh. d. Leop. Carol. Ak. 51 (1887), p. 253; vgl. auch *Maxwell*, Treatise 1, Art. 202 und die Fig. Tafel 13.

34) Vgl. *Maxwell*, Treatise 1, Art. 203 (genauere Behandlung Art. 206) u.

elektrischen Feldes (Nr. 5). Da das Innere dann aber der Beobachtung unzugänglich ist, soll untersucht werden, inwieweit eine Hülle sich durch ein Gitter ersetzen läßt, welches aus leitend miteinander verbundenen Drähten vom Radius c und dem Abstand a gebildet ist.

Befindet sich im Felde ein einziger mit der Elektrizitätsmenge E auf der Höheneinheit geladener metallischer Kreiszylinder, so ist das Potential symmetrisch um den Mittelpunkt

$$\varphi = -\frac{E}{2\pi\varepsilon}\log r$$

d. h.

$$\chi = -\frac{E}{2\pi\varepsilon}\log z. \tag{50}$$

Die Niveauflächen sind mit dem Drahte konzentrische Kreiszylinder. χ bleibt in der Nähe des Drahtes endlich, da (50) nur außerhalb des Leiters gilt, also $|z| \geqq c$ sein muß. Denken wir uns χ aber durch (50) auch ins Innere des Drahtes analytisch fortgesetzt, so wird χ in der Drahtachse logarithmisch unendlich.

Es mögen sich jetzt die Achsen der Gitterdrähte in den Punkten $z_\nu = \pm \nu i a$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) befinden. Wenn c sehr klein gegen a ist, d. h. wenn ein Draht auf seinen Nachbardrähten nicht merklich durch Influenz die Verteilung ändert, so wird χ in der Nähe des bei z_ν befindlichen Drahtes sich durch

$$\chi = -\frac{E}{2\pi\varepsilon}\log(z - z_\nu) + \text{funct. cont.} \tag{51}$$

darstellen lassen.

Die Funktion $e^{2\pi\frac{z}{a}} - 1$ bildet den Punkt $z = 0$ auf die Punkte z_ν ab und einen die Stelle $z = 0$ umgebenden Kreis in eine Reihe die Stellen z_ν umgebende Kurven, die um so eher als Kreise angesehen werden können, je kleiner der Radius des abgebildeten Kreises ist. Da in der ν^{ten} Drahtachse $\left(e^{2\pi\frac{z}{a}} - 1\right)$ genau ebenso unendlich wird wie $\log(z - z_\nu)$, so gilt für das Gitter

$$\chi = -\frac{E}{2\pi\varepsilon}\log\left(e^{2\pi\frac{z}{a}} - 1\right) + \text{funct. cont.} \tag{51'}$$

(51′) ist die Form des Potentials, auch wenn noch beliebige andere geladene Körper im Felde sind, von denen nur vorausgesetzt wird, daß dieselben in einer gegen den Drahtradius großen Entfernung sich befinden. Denn in der Nähe eines Drahtes überwiegt der erste

---

die Zeichnung Tafel 14; siehe auch *H. Weber*, Partielle Differentialgl. 1, p. 441, wo das Problem als Strömungsaufgabe behandelt ist.

Term von (51′), und dieser ergiebt ein Potential φ, welches auf den Drahtoberflächen annähernd konstant ist. Addieren wir zu (51′) die konjugierte Funktion $\varphi - i\psi$, so erhalten wir

$$(52)\quad \varphi = -\frac{E}{4\pi\varepsilon}\log\left\{e^{4\pi\frac{x}{a}} + 1 - 2e^{\frac{2\pi x}{a}}\cos\frac{2\pi y}{a}\right\} + \text{funct. cont.}$$

Lassen wir in (52) die funct. cont. fort, so wird für

$$x = +\infty : \cdots \varphi = -\frac{E}{\varepsilon}\frac{x}{a}$$

und für

$$x = -\infty : \cdots \varphi = 0;$$

d. h. wir haben den Fall, daß parallel der Gitterebene in großer Entfernung vom Gitter eine leitende Ebene steht, die mit der Dichte $-\frac{E}{a}$ geladen ist, auf der also sämtliche vom Gitter ausgehenden Erregungslinien münden (auf dies Problem bezieht sich die Figur bei *Maxwell*[34])).

Sollen auf beiden Seiten des Gitters, und zwar in großer Entfernung von demselben, dem Gitter parallel, geladene Ebenen stehen, so brauchen wir nur in (52) für funct. cont. $-C_1 x + C_2$ zu substituieren. Setzen wir zur Abkürzung $-\frac{E}{4\pi\varepsilon} = C$, so erhalten wir

$$(52')\qquad \varphi = C\log\left\{e^{\frac{4\pi x}{a}} + 1 - 2e^{\frac{2\pi x}{a}}\cos\frac{2\pi y}{a}\right\} - C_1 x + C_2.$$

Die Konstanten C, C_1, C_2 lassen sich durch das Potential V_0 des Gitters, sowie durch die Potentiale V_1 und V_2 der beiden dem Gitter parallelen Ebenen, die in den Abständen b_1 und b_2 zu verschiedenen Seiten des Gitters stehen, ausdrücken.

Da V_0 das Potential des Gitters sein soll, so ergibt sich, daß für $x = 0$, $y = c \pm \nu a$

$$(53)\qquad V_0 = 2C\log 2\sin\frac{\pi c}{a} + C_2 = -\frac{4\pi C}{a}\alpha + C_2,$$

wenn

$$\alpha = -\frac{a}{2\pi}\log 2\sin\frac{\pi c}{a}.$$

Sind b_1 und b_2 positiv und groß gegen a, so sind die Ebenen $x = +b_1$ und $x = -b_2$ Äquipotentialflächen; da sie die Potentiale V_1 resp. V_2 und die Dichten ω_1 und ω_2 haben sollen, so folgt durch Elimination von C, C_1, C_2

$$(54)\qquad \begin{aligned} \frac{\omega_1}{\varepsilon}\left(b_1 + b_2 + \frac{b_1 b_2}{\alpha}\right) &= V_1\left(1 + \frac{b_2}{\alpha}\right) - V_2 - V_0\frac{b_2}{\alpha}, \\ \frac{\omega_2}{\varepsilon}\left(b_1 + b_2 + \frac{b_1 b_2}{\alpha}\right) &= V_2\left(1 + \frac{b_1}{\alpha}\right) - V_1 - V_0\frac{b_1}{\alpha}. \end{aligned}$$

Verbindet man das Gitter leitend mit der Ebene $x = b_1$, so wird $V_0 = V_1$ und

$$\frac{\omega_1}{\varepsilon}\left(b_1 + b_2 + \frac{b_1 b_2}{\alpha}\right) = V_1 - V_2.$$

Das Gitter wirkt also so, als wenn es nicht vorhanden wäre und dafür die Entfernung $b_1 + b_2$ auf $b_1 + b_2 + \frac{b_1 b_2}{\alpha}$ vergrößert wäre.

11. Anwendung auf den Kondensator. Da Formel (33) in Nr. 7 nur für die Kapazität eines Plattenkondensators mit ebenen Platten gilt, behandelt *Clausius*[35]) den Fall, daß zwei gekrümmte parallele Leiterflächen, deren Hauptkrümmungsradien in einem bestimmten Punkte R und R' sind, im Abstande a sich gegenüberstehen.

Wählt man die Tangentialebene in einem Punkte der ersten Platte zur xy-Ebene, den Berührungspunkt zum Koordinatenursprung und die Richtung der Hauptkrümmungslinien zu Koordinatenrichtungen x und y, so ist nach dem *Taylor*schen Satze

$$V = V_1 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_1 z + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_1 \frac{z^2}{2} + \cdots.$$

Setzen wir für z den Abstand a der Platten, so folgt

$$V_2 - V_1 = \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_1 a + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_1 \frac{a^2}{2} + \cdots. \tag{55}$$

Schreitet man vom Koordinatenursprung in der Schnittlinie der xz-Ebene und der Oberfläche der ersten Platte unendlich wenig vorwärts, so ändert sich V nicht, also ist

$$\begin{aligned}(56)\quad dV = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_1 dx + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_1 dz + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_1 \frac{dx^2}{2}\\ + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}\right)_1 dx\,dz + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_1 \frac{dz^2}{2} + \cdots = 0.\end{aligned}$$

Da aber

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_1 = 0 \quad \text{und} \quad dz = \mp \frac{1}{2 R_1} dx^2 + \cdots,$$

wo das obere (untere) Zeichen gilt, wenn die Kurve, in der die xz-Ebene die Platte schneidet, vom Raume zwischen den Platten betrachtet, konvex (konkav) ist, so folgt

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \mp \frac{1}{R_1}\frac{\partial V}{\partial z}\right)_1 dx^2 + \cdots = 0.$$

Also ergibt sich

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_1 = \pm \frac{1}{R_1}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_1; \tag{57}$$

---

35) *R. Clausius*, Mechanische Wärmetheorie 2, p. 39 (2. Aufl., Braunschweig 1879).

ebenso ist

$$(57') \qquad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_1 = \pm \frac{1}{R_1'}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_1.$$

Setzt man diese Werte in die *Laplace*'sche Gleichung ein, so erhält man

$$(58) \qquad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_1 = \left(\mp \frac{1}{R_1} \mp \frac{1}{R_1'}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_1.$$

Schließlich substituieren wir diesen Ausdruck für $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_1$ in (55) und finden

$$V_2 - V_1 = \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_1 a\left[1 + \frac{a}{2}\left(\mp \frac{1}{R_1} \mp \frac{1}{R_1'}\right)\right] + \cdots.$$

Da aber $-\varepsilon\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_1$ gleich der elektrischen Dichte ist, so folgt für die Kapazität

$$(59) \qquad \alpha = \frac{\varepsilon \sigma_1}{a} + \frac{\varepsilon}{2}\int\left(\pm \frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R_1'}\right) d\sigma_1 \text{ [36]}.$$

Beispiel: Von zwei konzentrischen Zylinderflächen mit den Radien R und $R + a$ und der Höhe h werde durch zwei Ebenen, welche durch die Zylinderachse gehen und den Winkel γ miteinander bilden, ein Teil abgeschnitten. Die Kapazität dieses Teils läßt sich nach dem Vorigen berechnen. Es ist nämlich, wenn wir (59) auf die kleinere Fläche anwenden, das obere Zeichen bei R_1 zu wählen und $R_1 = R$ zu setzen; ferner ist $R_1' = \infty$, also finden wir

$$(60) \qquad \alpha = \frac{\varepsilon}{a} Rh\gamma + \frac{\varepsilon}{2} h\gamma = \frac{\varepsilon \sigma_1}{a}\left(1 + \frac{a}{2R}\right)$$

Denselben Wert hätten wir erhalten durch Anwendung von (59) auf die größere Fläche $\sigma_2 = h(R + a)\gamma$; dann hätten wir aber das negative Zeichen vor R_1 zu nehmen gehabt.

Der Wert, den *Clausius*[37]) durch eine sehr umständliche Methode für die Kapazität eines Kondensators aus zwei unendlich dünnen Kreisplatten ohne Vernachlässigung der modifizierten Verteilung in der Nähe der Ränder findet, stimmt mit der *Kirchhoff*schen Formel (s. u.) nicht überein, er ist durch die weitläufigen numerischen Rechnungen gefälscht.

Mit Hilfe einer bedeutend einfacheren und zuverlässigeren Methode, nämlich durch die konforme Abbildung geradliniger Polygone auf-

---

36) *Maxwell,* Art. 102a schließt die Kapazität eines beliebigen Systems auch in Grenzwerte ein, wenn der genäherte Verlauf der Erregungslinien bekannt ist. Er benutzt dabei eine Methode, die von Lord *Rayleigh,* Theory of sound 2 (1878), p. 162, 170 herrührt.

37) *R. Clausius,* Ann. Phys. Chem. (2) 86 (1852), p. 161.

einander behandelt *G. Kirchhoff*[38]) denselben Fall. Da die Methode bei ähnlichen Problemen Anwendung finden kann, soll sie kurz skizziert werden.

Der Plattenradius R soll als unendlich groß, Plattenabstand a und Plattendicke b als unendlich klein gegen R angenommen werden, so daß höhere Potenzen von a/R und b/R vernachlässigt werden können. *Kirchhoff* teilt den ganzen Raum in drei Teile: Raum 1 ist ein ringförmiger Raum, dessen Oberfläche aus Punkten besteht, deren Abstände von den Rändern der Platten unendlich klein gegen R, aber unendlich groß gegen a und b sind. Raum 2 ist der noch übrige Raum zwischen den Platten, Raum 3 der noch übrige Raum außerhalb der Platten.

Es möge jetzt y die Koordinatenrichtung senkrecht zu den Plattenebenen sein, dann ist im Raume 2 das Potential

$$\varphi = \frac{2y}{a},$$

wenn es auf der einen Platte ($y = + a/2$) gleich $+ 1$ und auf der anderen Platte ($y = - a/2$) gleich $- 1$ ist. In Raum 3 ergibt sich die Darstellung von φ nach Nr. 29 Gl. (131) als Potential einer Doppelschicht, deren Begrenzung ein Kreis vom Radius R um den Nullpunkt der Ebene $y = 0$ ist.

φ und seine Differentialquotienten müssen an der Grenze des Raumes 1 stetig in die in den Räumen 2 resp. 3 gültigen Werte übergehen. Durch diese Bestimmungen, sowie durch die Bedingung, daß φ in unendlicher Entfernung ϱ vom Kondensator wie $1/\varrho^2$ verschwinden muß, ist φ eindeutig gegeben. Findet man also ein Potential, welches allen Bedingungen genügt, so ist es das durch die Aufgabe verlangte.

Da die Elektrizitätsmengen auf den Teilen der Platten, die zu Raum 1 und Raum 3 gehören, nur unendlich klein sind, so vernachlässigt man nur Glieder höherer Ordnung, wenn man in diesen Raumteilen die Bedingungen, denen φ zu genügen hat, nur annähernd (mit Vernachlässigung von Größen erster Ordnung) erfüllt. Dies gilt nicht nur für die Grenzbedingungen, sondern auch für die Differentialgleichung selbst, der φ zu genügen hat.

Unter dieser Vernachlässigung hat z. B. in Raum 3 das Potential der Doppelschicht auf den rückseitigen Grenzflächen der Platten Werte, die nicht genau $+ 1$ resp. $- 1$ sind, da der Winkel, unter dem die

38) *G. Kirchhoff*, Berl. Ber. 1877, p. 144 oder Ges. Abhandl., p. 101, Leipz. (1882). Für den speziellen Fall $b/a = 0$ auch Vorlesungen 3, p. 90.

Doppelschicht von Punkten dieser Grenzflächen aus erscheint, von $+2\pi$ resp. -2π in Größen erster Ordnung abweicht.

Unter denselben Vernachlässigungen muß φ in Raum 1 der Gleichung genügen

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \tag{61}$$

wo $x=R-\varrho$ endlich ist (ϱ Abstand des betrachteten Punktes von der Kondensatorachse).

Die Vernachlässigung der höheren Potenzen von a/R und b/R kommt also darauf hinaus, daß im Raume 1 die Krümmung der Plattenränder unberücksichtigt bleibt, in Raum 2 die Werte gelten, die bestehen würden, wenn die Elektrizitätsmengen mit gleichförmiger Dichte auf den inneren Begrenzungsebenen der Platten verteilt wären und in Raum 3 die beiden Belegungen zu einer Doppelschicht mit entsprechend unendlich großer Ladung zusammenrückten.

Wegen (61) ist φ der reelle Teil einer Funktion $w=\varphi+i\psi$ von $z=x+yi$. φ muß $=+1$ sein auf der inneren Grenzfläche der einen Kondensatorplatte, d. h. für $x>0$; $y=+\frac{a}{2}$, ferner am Rande dieser Platte, also für $x=0$; $\frac{a}{2}\leqq y\leqq\frac{a}{2}+b$, und auf der äußeren Grenzfläche dieser Platte, also für $x>0$; $y=\frac{a}{2}+b$. φ ist $=-1$ auf der anderen Platte, also für $x>0$; $y=-\frac{a}{2}$; ferner für $x=0$; $-\frac{a}{2}-b\leqq y<-\frac{a}{2}$, und für $x>0$; $y=-\frac{a}{2}-b$. Es ist also das durch die soeben angegebenen geradlinigen Strecken begrenzte Flächenstück der z-Ebene auf den durch die Geraden $\varphi=\pm1$ der w-Ebene begrenzten Streifen abzubilden. Dies gelingt durch die *Schwarz*sche Methode der konformen Abbildung geradliniger Polygone aufeinander (vgl. Nr. 9 und Anm. [31])). ψ gibt ganz ähnlich wie in Nr. 9 (42) die Elektrizitätsverteilung auf den Platten an.

So erhält man als Kapazität

$$\alpha=\frac{\varepsilon R^2\pi}{a}\left\{1+\frac{a}{R\pi}\left(\lg\frac{16\pi(a+b)R}{a^2}-1+\frac{b}{a}\lg\frac{a+b}{b}\right)\right\} \tag{62}$$
$$=\frac{\varepsilon R^2\pi}{a}(1+k)\text{[38a])}.$$

38a) *N. Bulgakow,* Mém. de l'acad. de St. Pétersbourg (8) 15 (1904), Nr. 3 geht von dem Potential zweier kongruenter abgeplatteter Rotationsellipsoide mit gemeinsamer Achse aus, auf denen er die Elektrizitätsmenge $+e$ resp. $-e$ so verteilt annimmt, wie sie ohne Vorhandensein des anderen Ellipsoids im Gleichgewicht wäre, und konstruiert hierzu die Äquipotentialflächen, von denen er sich dann zwei leitend denkt.

Um wenigstens für unendlich dünne Platten ($b/a = 0$) den Einfluß der Streuung der Erregungslinien an den Rändern, sowie den Einfluß der auf den äußeren Flächen und auf dem Rande selbst sitzenden Elektrizität zu veranschaulichen, ist der in (62) mit k bezeichnete Ausdruck für verschiedene Werte von a/R in der folgenden Tabelle wiedergegeben.

a/R	k
0.0001	0.0004
0.0005	0.0017
0.0010	0.0031
0.0050	0.0131
0.0100	0.0239

Nach demselben Prinzip wird sich auch der Einfluß der Enden beim Zylinderkondensator behandeln lassen. Die pro Längeneinheit gerechnete Kapazität eines sehr langen Zylinderkondensators ohne Berücksichtigung der Streuung an den Enden ergibt sich sofort aus der *Laplace*'schen Gleichung, indem man die Unabhängigkeit des Potentials von der z- und φ-Koordinate benutzt (z parallel der Zylinderachse, φ Azimut gegen eine feste Ebene durch die Zylinderachse)[39].

Kirchhoff[38]) hat nach derselben Methode die genaue Theorie des Schutzringkondensators gegeben (vgl. Nr. 7). a und b bedeuten dasselbe wie oben, der Radius der ausgeschnittenen Kreisscheibe sei $R - c$, der innere Radius des Schutzringes $R + c$, also die Schlitzbreite $2c$. Wird b/c unendlich groß angenommen (sonst wird der Ausdruck komplizierter), so wird

$$(63)\qquad \alpha = \frac{\varepsilon R^2 \pi}{a}\left\{1 - \frac{4a}{R\pi}(\beta \operatorname{tg}\beta + \lg\cos\beta + 4q\sin^2\beta)\right\},$$

wo $c/a = \operatorname{tg}\beta$ und

$$-\lg q = 2\left(1 + \frac{\beta}{\operatorname{tg}\beta} + \frac{b}{c}\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Auch *Maxwell*[40]) hat für den Schutzringkondensator eine Formel abgeleitet:

$$(64)\qquad \alpha = \frac{\varepsilon (R-c)^2 \pi}{a}\left\{1 + \frac{2ac}{(a+\gamma)(R-c)}\left(1 + \frac{c}{R-c}\right)\right\},$$

wo γ genähert $\frac{2c}{\pi}\lg 2$ ist. (63) und (64) sind praktisch gleichwertig[41]).

12. Kugel. Ellipsoid. Zylinder. Ring. Die Einführung krummliniger Koordinaten in die *Laplace*'sche Differentialgleichung ermög-

39) *Maxwell,* Treatise 1, Art. 126.

40) *Maxwell,* Treatise 1, Art. 201.

41) *F. Himstedt,* Ann. Phys. Chem. (3) 35 (1888), p. 126; 36 (1889), p. 759.

licht ohne weiteres die Lösung vieler Probleme[41a]). So ergibt sich z. B. die Kapazität zweier konzentrischer Kugelschalen von den Radien a_1 und a_2 als $\alpha = 4\pi\varepsilon \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1}$ und für eine einzige Kugel entsprechend dem Grenzübergang $a_2 = \infty : \cdots \alpha = 4\pi\varepsilon a_1$.

Auch für Zylinder[42]) und Ellipsoid[43]) lassen sich durch Benutzung von Zylinder- resp. elliptischen Koordinaten Potential und Kapazität bestimmen, durch Spezialisierung des Ellipsoids ergibt sich weiterhin die Kreisscheibe[44]). Für die Dynamik eines kugelförmigen Elektrons ist der Satz wichtig[45]), daß die elektrischen Energieen zweier Ellipsoide von gleicher Form, von denen das eine gleichförmig über sein Volumen geladen ist, während bei dem anderen die Verteilung der nämlichen Gesamtladung der Gleichgewichtsverteilung auf der Oberfläche des leitenden Ellipsoids entspricht, sich wie 6 : 5 verhalten.

Durch die Gleichung

$$x + yi = b\,\frac{1 - e^{\lambda + i\omega}}{1 + e^{\lambda + i\omega}}$$

führe man anstatt x und y die Koordinaten λ und ω in die Gleichung $\Delta\varphi = 0$ ein. Die Kurvenschar $\lambda =$ const. ist ein Kreisbüschel mit imaginären Schnittpunkten und den Punktkreisen $y = 0$, $x = \pm b$; $\omega =$ const. ist der zu $\lambda =$ const. orthogonale Kreisbüschel. Läßt man diese Kurvenschar um die y-Achse rotieren, so erhält man ein System von Kreisringen, von denen jeder durch einen speziellen Wert $\lambda =$ const. gegeben ist. *Riemann*[46]) hat durch Benutzung dieser sogenannten Ringkoordinaten zuerst die *Laplace*sche Gleichung integriert.

41a) Vgl. Potentialtheorie Art. *Burkhardt-Meyer* II A 7 b, Nr. 22.

42) *W. Thomson,* Reprint, p. 38 u. Phil. Mag. (4) 9 (1855), p. 531 mit Anwendungen auf Kabel und Leidener Flaschen; *Maxwell,* Treatise 1, Art. 129 behandelt ebenfalls konzentrische, unendlich lange Zylinder und das absolute Zylinderelektrometer. Wegen des letzteren siehe auch *E. Bichat* u. *R. Blondlot,* J. de phys. (2) 5 (1886), p. 325. *Blavier,* J. de phys. (1) 3 (1874), p. 115 u. 151 gibt die für elektrische Leitungen wichtige Theorie der Potentialverteilung bei nicht koaxialen Zylindern. Wegen der Theorie der Leidener Flaschen siehe auch Anm. 35. *F. Breisig,* Elektrotechn. Zeitschr. 19 (1898), p. 772 berechnet die Kapazität der Kabel bei Berücksichtigung der leitenden Erde. Kabel, die aus mehreren Drähten bestehen, behandelt *T. Levi-Civita,* Rend. R. Acc. dei Linc. (5) 13 (1904), p. 375.

43) Potentialtheorie Art. *Burkhardt-Meyer* II A 7 b, Nr. 15.

44) Vgl. Anm. 43 und *H. Weber,* Partielle Differentialgl. 1, p. 326, siehe auch *R. Gans,* Zeitschr. f. Math. u. Phys. 49 (1903), p. 298; 53 (1906), p. 434.

45) Vgl. *M. Abraham,* Ann. Phys. (4) 10 (1903), p. 146.

46) *B. Riemann,* Ges. Werke 1876, p. 407; *C. Neumann,* Theorie der Elektrizitäts- und Wärmeverteilung in einem Ringe, Halle 1864. *A. Wangerin,* Re-

Die Methode der partikulären Lösungen der Gleichung $\Delta\varphi = 0$ in krummlinigen Koordinaten ergibt Entwicklungen des Potentials nach Kugelfunktionen bei der Kugel und dem Rotationsellipsoid, nach *Bessel*schen Funktionen beim Zylinder, nach *Riemann*schen P-Funktionen (hypergeometrischen Funktionen) beim Ring[47]). *C. Neumann*[46]) und *Wangerin* haben sich weiter mit diesem Problem beschäftigt.

Durch Entwicklung nach Kugelfunktionen findet *Maxwell*[48]) das Potential auf einem nahezu kugelförmigen Leiter.

13. Elektrische Bilder. Zwei Kugeln[48a]). Spiegelungsmethoden zur Befriedigung der Grenzbedingungen bei Randwertaufgaben sind auf allen Gebieten der mathematischen Physik für ebene Grenzflächen anwendbar, speziell auf dem Gebiete der optischen Erscheinungen, von denen der Name der Methode entlehnt ist. In der drei- bez. zweidimensionalen Potentialtheorie kann man aber auch an Kugel- bez. Zylinderflächen spiegeln, da es eine Besonderheit der Potentialgleichung ist, bei der Transformation durch reziproke Radien ungeändert zu bleiben; d. h. ist $\varphi(r, \vartheta, \psi)$ eine Lösung der Gleichung $\Delta\varphi = 0$ in Kugelkoordinaten, so ist auch $\frac{c}{r}\varphi\left(\frac{c^2}{r}, \vartheta, \psi\right)$ eine Lösung, die für $r = c$ denselben Wert annimmt (oder ist $\varphi(r, \psi)$ eine zweidimensionale Lösung in Zylinderkoordinaten, so ist auch $\varphi\left(\frac{c^2}{r}, \psi\right)$ eine Lösung, die für $r = c$ denselben Wert hat). Gibt die erste Lösung das Potential im Innern einer Kugel vom Radius c, so hat man in der zweiten Lösung das Potential für den Außenraum, und zwar in geschlossener Form, ohne daß man nach Kugelfunktionen entwickeln müßte.

Mit Hilfe dieser Methode hat *W. Thomson*[49]) viele auf die Kugel bezügliche Probleme gelöst. Befindet sich z. B. im Punkte p_1 im Innern (Äußern) einer leitenden Kugelschicht vom Radius c, die sich

---

duktion der Potentialgleichung für gewisse Rotationskörper auf eine gewöhnliche Differentialgleichung (gekrönte Preisschrift), Leipzig 1875, behandelt das Problem der Elektrizitätsverteilung auf einem Rotationskörper, dessen Meridian eine Lemniskate ist. Vgl. die historische Bemerkung über das Ringproblem bei *H. Weber,* Partielle Differentialgleichungen 2, p. 406.

47) Potentialtheorie Art. *Burkhardt-Meyer,* II A 7 b, Nr. **14** u. **21**, ebenfalls Kugelfunktionen Art. *Wangerin,* II A. 10, sowie *E. Heine,* Handbuch der Kugelfunktionen, Berlin 1878.

48) *Maxwell,* Treatise 1, Art. 145 a; s. auch *G. L. Dirichlet,* Werke 2, p. 87, Berlin 1897.

48a) Siehe auch Potentialtheorie Art. *Burkhardt-Meyer* II A 7b Nr. **16**.

49) *W. Thomson,* Cambr. and Dubl. Math. J. 1848, 1849, 1850; siehe auch Reprint Art. 55 ff.; Art. 208 ff.

auf dem Potential Null befindet, die Elektrizitätsmenge e_1, so erhält man das Potential im Innen-(Außen-)raum der Kugel, indem man im harmonischen Pol p_2 von p_1 die Elektrizitätsmenge $e_2 = -\frac{e_1 c}{R_1}$ anbringt und die Kugel fortdenkt. Hier bedeutet R_1 den Abstand des Punktes p_1 vom Zentrum. In Wirklichkeit rührt das Auftreten des Zusatzpotentials $\frac{e_2}{4\pi\varepsilon r_2}$ zu $\frac{e_1}{4\pi\varepsilon r_1}$ von der Influenzelektrizität $e_2 = -\frac{e_1 c}{R_1}$ auf der Oberfläche der Kugel her. In derselben Weise kann man die Influenzwirkung eines geladenen Systems auf eine Kugel behandeln[50]).

Wird der Kugelradius unendlich groß, handelt es sich also um die Influenz auf einer unendlich ausgedehnten leitenden Ebene, so geht die Abbildung durch harmonische Pole (Abbildung durch reziproke Radien, Inversion) in Spiegelung an der Ebene über. Die Elektrizitätsmenge im gespiegelten Punkt p_2 ist dann $e_2 = -e_1$.

Durch wiederholt angewandte Spiegelung[51]) ermittelt man z. B. das Potential einer punktförmigen Elektrizitätsmenge 1, die sich im Punkte $p'(x', y', z')$ im Innern eines rechtwinklig parallelepipedischen leitenden Kastens befindet, der auf dem Potential Null ist; die Seitenebenen seien

$$x = \pm \frac{a}{2}; \quad y = \pm \frac{b}{2}; \quad z = \pm \frac{c}{2}.$$

Man lege senkrecht zu den drei Parallelepipedkanten drei Scharen von Ebenen, durch die der ganze Raum in kongruente Parallelepipeda eingeteilt wird, von denen eins das gegebene ist. In jedem Spiegelbild von p' bezüglich dieser Ebenen, welches die Koordinaten

$$ka + (-1)^k x'; \quad mb + (-1)^m y'; \quad nc + (-1)^n z'$$

hat, wo k, m, n die Werte der ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen, denken wir uns die Elektrizitätsmenge $+1$ resp. -1 angebracht, je nachdem $k + m + n$ gerade oder ungerade ist. Dann ist

$$(65) \qquad \varphi = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+m+n}}{R},$$

wo zur Abkürzung

$$(66) \qquad R^2 = \{ka + (-1)^k x' - x\}^2 + \{mb + (-1)^m y' - y\}^2 + \{nc + (-1)^n z' - z\}^2$$

---

50) *W. Thomson,* Reprint Art. 113; siehe auch *Maxwell,* Treatise 1, Art. 159.

51) *B. Riemann,* Schwere, Elektrizität und Magnetismus p. 84; *F. Pockels,* Gött. Abh. 39 (1893), p. 21 (Preisschrift) wendet dies Prinzip auf zwei Kugeln in einem parallelepipedischen Metallkasten an, indem er die *Kirchhoff*schen Formeln für die Attraktion zweier Kugeln benutzt, vgl. Anm. [56]).

gesetzt ist. Die Summe (65) ist nur bedingt, d. h. bei geeigneter Anordnung der positiven und negativen Glieder, konvergent. Aus diesem Grunde empfiehlt sich die folgende Umrechnung. Da

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-R^2 t} \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

ist, so erhalten wir mit Vertauschung der Integrations- und Summationsfolge die absolut konvergente Darstellung

$$(67) \qquad \varphi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} \sum_k \sum_m \sum_n (-1)^{k+m+n} e^{-R^2 t}.$$

Die dreifache Summe zerfällt in das Produkt dreier einfachen Summen, deren jede sich durch Thetafunktionen ausdrücken läßt.

Thomson[51a]) bestimmt die Elektrizitätsverteilung auf einem kreisförmigen Abschnitt einer ebenen oder sphärischen leitenden Fläche, die einer beliebigen Influenz ausgesetzt ist, mit Hilfe der Bildmethode.

Die Methode der Spiegelung läßt sich erweitern für den Fall, daß der halbe Raum die Dielektrizitätskonstante ε_1, der andere halbe Raum die Dielektrizitätskonstante ε_2 hat, und daß sich im ersten Halbraum im Punkte p_1 die Elektrizitätsmenge e_1 befindet. Man kann sich im Spiegelbild p_2 von p_1 bezüglich der Grenzebene der beiden Halbräume die Elektrizitätsmenge $-e_2$ denken. Das Potential in einem Punkte des ersten Halbraums ist $\frac{e_1}{\varepsilon_1 4\pi r_1} - \frac{e_2}{\varepsilon_1 4\pi r_2}$; das Potential im zweiten Halbraum ist $\frac{e_2'}{\varepsilon_2 4\pi r_1}$. Die Grenzbedingungen ergeben

$$e_2 = e_1 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}; \quad e_2' = e_1 \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}$$ [52]).

Diese Methode ist nicht ohne weiteres auf eine dielektrische Kugel übertragbar. Versucht man dies, so erhält man als Bild eines elektrischen Punktes außerhalb einer Kugel erstens seinen harmonischen Pol und zweitens die Verbindungslinie dieses Pols mit dem Zentrum, die in bestimmt angebbarer Weise mit Elektrizität belegt ist. *C. Neumann*[53]) hat dies Problem ausführlich behandelt und zwar für den

---

51a) *W. Thomson*, Reprint Art. 231; vgl. auch *G. Kirchhoff*, Vorlesungen 3, p. 57; *Lipschitz*, J. f. Math. 58, p. 152; 61, p. 1.

52) Siehe z. B. *M. Abraham* u. *A. Föppl*, Theorie der Elektrizität, p. 150, Leipzig 1904. Durch mehrfache Spiegelung läßt sich auch die unendlich ausgedehnte dielektrische Platte behandeln, vgl. *Th. Lohnstein*, Ann. Phys. Chem. (3) 44 (1891), p. 164.

53) *C. Neumann*, Hydrodynamische Untersuchungen, Leipzig 1883, p. 279.

ganz analogen Fall der magnetischen Bilder. Anstatt seines $4\pi k$ ist durchweg $\varepsilon - 1$ zu setzen.

Das Problem der Elektrtzitätsverteilung auf zwei Kugeln von den Radien a_1 und a_2, dem Abstande c der Zentren, die zu den Potentialen C_1 und C_2 geladen sind, wurde zuerst von *Poisson*[54]) behandelt, indem er das Potential φ sowie die Dichtigkeit der Elektrizität nach Kugelfunktionen entwickelt.

Das Potential wird symmetrisch um die gemeinsame Zentrale sein, welche als Polarachse eingeführt wird. Kennt man das Potential auf der Zentralen, so ist es auch in jedem anderen Punkte des Raumes bekannt; denn denken wir uns das Potential auf der Zentralen nach Potenzen des Abstandes r_1 vom Zentrum der ersten Kugel entwickelt:

$$V_a = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_1}{r_1} A_\nu \left(\frac{a_1}{r_1}\right)^\nu \qquad r_1 > a_1,$$

$$V_i = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu \left(\frac{r_1}{a_1}\right)^\nu \qquad r_1 < a_1,$$

so wird die allgemeine Lösung

$$(68)\qquad \begin{aligned} V_a &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_1}{r_1} A_\nu P_\nu (\cos\vartheta) \left(\frac{a_1}{r_1}\right)^\nu \qquad r_1 > a_1, \\ V_i &= \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu P_\nu (\cos\vartheta) \left(\frac{r_1}{a_1}\right)^\nu \qquad r_1 < a_1, \end{aligned}$$

wo $P_\nu(\cos\vartheta)$ die Kugelfunktion ν^{ter} Ordnung erster Art bedeutet.

Der Abstand eines willkürlichen Punktes der Zentralen vom Zentrum der ersten Kugel sei x, der Abstand eines Punktes vom Zentrum der zweiten Kugel y; das Potential der auf der ersten Kugel befindlichen Elektrizität sei $f(x)$, das der auf der zweiten Kugel befindlichen $g(y)$.

Ist $x < a_1$ und $x' = \frac{a_1^2}{x} > a_1$ der harmonische Pol von x, so ist $f(x') = \frac{a_1}{x'} f\left(\frac{a_1^2}{x'}\right)$, wie am Anfang dieser Nr. bemerkt wurde; ebenso ist $g(y') = \frac{a_2}{y'} g\left(\frac{a_2^2}{y'}\right)$.

Sind x und y' derselbe Punkt innerhalb der ersten Kugel, also $y' = c - x$, so gilt

$$(69)\qquad f(x) + g(y') = f(x) + \frac{a_2}{c-x} g\left(\frac{a_2^2}{c-x}\right) = C_1;$$

ebenso

54) *Poisson,* Mém. de l'inst. 12, 1, p. 1 (1811); 2, p. 163 (1811).

$$(70) \qquad g(y) + f(x') = g(y) + \frac{a_1}{c-y} f\left(\frac{a_1^2}{c-y}\right) = C_2.$$

Gleichung (70) gilt für jeden Punkt $y < a_2$, also z. B. für $y = \frac{a_2^2}{c-x}$.

Substituiert man diesen Wert in (70), so kann g aus (69) eliminiert werden; man erhält für $-a_1 \leqq x \leqq +a_1$

$$f(x) - \frac{a_1 a_2}{c^2 - a_2^2 - cx} f\left(\frac{a_1^2(c-x)}{c^2 - a_2^2 - cx}\right) = C_1 - C_2 \frac{a_2}{c-x}.$$

Die Lösung dieser Funktionalgleichung ergibt $f(x)$. Aus $f(x)$ erhält man die Dichtigkeit ω für $x = a_1$, nämlich

$$(72) \qquad \omega = \varepsilon \left(\frac{f(x)}{a_1} + 2\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=a_1}$$

und die gesamte Elektrizitätsmenge E_1 auf der ersten Kugel

$$(73) \qquad E_1 = 4\pi\varepsilon a_1 f(0).$$

Berühren die beiden Kugeln einander, so verhalten sich die Elektrizitätsmengen E_2 und E_1 auf denselben wie

$$(74) \qquad \frac{E_2}{E_1} = \frac{\int\limits_0^1 \left(t^{-\frac{a_2}{a_1+a_2}} - 1\right)\frac{dt}{1-t}}{\int\limits_0^1 \left(t^{-\frac{a_1}{a_1+a_2}} - 1\right)\frac{dt}{1-t}}.$$

Ist a_2 sehr klein gegen a_1, so wird

$$(74') \qquad \frac{E_2}{E_1} = \frac{a_2^2}{a_1^2}\frac{\pi^2}{6}$$

oder die Dichte nach Trennung der beiden Kugeln

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Diese Resultate sind für die genaue Diskussion der *Coulomb*schen Versuche zur Ermittlung des *Coulomb*schen Gesetzes von Wichtigkeit, da die Influenz der beiden Kugeln aufeinander berücksichtigt werden muß. Die Dichtigkeit ω an den Punkten der beiden Kugeln, die einander am nächsten liegen, ist von Interesse, weil eine solche Anordnung als Funkenmikrometer zur Bestimmung von Funkenpotentialen benutzt wird. Schließlich gibt das Problem der Berührung einer kleinen und einer großen Kugel einen Anhalt über die Theorie der Probekugel[54a]).

54a) Eine allgemeinere Behandlung der Theorie des Probekörpers: *E. Almansi,* Nuov. Cim. (5) 4 (1902), p. 81, 280; 5 (1903), p. 242.

Der *Poisson*schen Methode schließen sich die Entwicklungen von *Plana*[55]) und *Kirchhoff*[56]) an. Die *Kirchhoff*schen Resultate für die Dichtigkeit weichen von denen *Poissons* und *Planas* für den Fall eines unendlich kleinen Abstandes der beiden Kugeln ab; der Grund liegt in unerlaubten Potenzentwicklungen bei letzteren.

Durch die Methode der elektrischen Bilder hat *W. Thomson*[57]) 1853 unter Benutzung des „Prinzips der sukzessiven Influenzen" von *Murphy*[58]) das Problem gelöst. (In spezieller Form als ein Verfahren sukzessiver Spiegelungen bereits oben bei dem Problem des rechteckigen Kastens benutzt.)

Das *Murphy*sche Prinzip behandelt ganz allgemein die Influenz zweier Leiter, von denen der eine auf dem Potential 1, der zweite auf dem Potential Null ist, nach folgendem konvergenten Verfahren[58]). Man denke den zweiten Leiter fort und lade den ersten mit der Elektrizitätsmenge e_0, so daß auf ihm das Potential 1 entsteht. Diese Verteilung denke man sich nun fixiert; sie influenziere auf dem abgeleiteten Leiter 2 die Ladungsverteilung e_1, die man sich wiederum fest denkt, und berechne die durch e_1 hervorgerufene Influenzladung e_2 auf dem ersten Leiter, während dieser abgeleitet gedacht wird, usf.; dann ist $e_0 + e_2 + e_4 + \cdots$ die Ladung des ersten, $e_1 + e_3 + \cdots$ die des zweiten Leiters; denn sie genügen allen an sie gestellten Bedingungen. Bei hinreichender Entfernung der beiden Körper wird das Verfahren auch numerisch gut brauchbar sein.

Da nun eine zum Potential C_1 geladene Kugel nach außen so wirkt, als ob die Menge $C_1 = \frac{e_1}{4\pi\varepsilon a_1}$ im Zentrum konzentriert wäre, so wird ihre fixiert gedachte Verteilung auf die zweite abgeleitete Kugel so wirken, als ob in dem Bild des Zentrums der ersten Kugel bezüglich der zweiten die Menge $-e_1\frac{a_2}{c} = -4\pi\varepsilon C_1\frac{a_1 a_2}{c}$ vorhanden wäre, während die zweite Kugel fehlt. Von diesem Bild kann man wieder das Bild bezüglich der ersten Kugel konstruieren usf. Die

55) *Plana,* Mem. della r. Acc. di Torino 7 (1845).

56) *G. Kirchhoff,* J. f. Math. 59 (1861), p. 89 oder Ges. Abhandlungen p. 78; sehr konvergente Reihen gibt er Ann. Phys. Chem. (3) 27 (1887), p. 673 oder Ges. Abhandlungen Nachtrag, p. 131; vgl. auch *R. A. Herman,* Quaterly Journ. of Math. 22 (1887), p. 204. *E. W. Barnes,* ibid. 35 (1904), p. 155 löst das Problem mit Hilfe von Γ-Funktionen.

57) *W. Thomson,* Reprint Art. 128 und Phil. Mag. 4, 5, p. 287 (1853).

58) *R. Murphy,* Elementary principles of the theories of electricity, heat and molecular actions, Cambridge 1833, p. 93. Wegen Konvergenzbeweise siehe Potentialtheorie Art. *Burkhardt-Meyer* II A 7b Nr. 28 besonders Anm. 183; ferner *A. Korn,* Lehrbuch der Potentialtheorie, p. 354.

Summierung der Wirkung sämtlicher so konstruierten Elektrizitätsmengen gibt die Verteilung, wenn die erste Kugel auf dem Potential C_1, die zweite auf dem Potential Null sich befindet. Dazu füge man in derselben Weise die Wirkung hinzu, die sich durch Ladung der zweiten Kugel zum Potential C_2 und Ableitung der ersten Kugel ergibt. Bei *Thomson* finden sich auch numerische Tabellen über Kapazität und Anziehungskraft zweier Kugeln[59]).

Die Methode der elektrischen Bilder zur Lösung des Zweikugelproblems wurde von *F. Neumann*[60]) und *Riemann*[61]) aufgegriffen. *Liouville*[62]) hat, angeregt durch die *Thomson*sche Abbildungsmethode durch reziproke Radien, die Aufgabe darauf zurückgeführt, zwei sich ausschließende Kugeln als konzentrische abzubilden.

Schließlich sei noch die Methode der bipolaren Koordinaten erwähnt. Läßt man die in Nr. 12 erwähnte Kurvenschar um die x-Achse rotieren, so werden die Flächen $\lambda =$ const. Kugeln. Zwei Werten von λ entsprechen die betrachteten Kugeloberflächen; diese Koordinaten stammen von *Thomson*[63]), die Methode wurde von *C. Neumann*[64]) weiter ausgearbeitet und z. B. auf die Influenz einer punktförmigen Elektrizitätsmenge auf zwei abgeleitete Kugeln angewandt[64a]).

B. Die Dielektrizitätskonstante hat in verschiedenen Teilen des Raumes verschiedene Werte.

14. Ungeladene Dielektrika im Felde. Leiter als Grenzfall des Dielektrikums. Kondensator mit geschichtetem Dielektrikum. Wir betrachteten bisher den Fall, daß das Dielektrikum zwischen den Leitern homogen war, also ε im ganzen Raume eine und dieselbe Konstante war, jetzt wenden wir uns der Frage zu, wie das Feld verändert wird, wenn in ein gegebenes Feld, dessen Dielektrikum die Dielektrizitätskonstante 1 hat, ein ungeladener homogener Körper der

59) *W. Thomson,* Reprint Art. 142.

60) *F. Neumann,* Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen, p. 277, Leipzig 1887 (Vorlesungen vom Winter 1856/57).

61) *B. Riemann,* Schwere, Elektrizität und Magnetismus, Hannover 1880; 2. Ausgabe, p. 189 (Vorlesungen vom Sommer 1861).

62) *J. Liouville,* in *Thomson,* Reprint Art. 229 ff.

63) *W. Thomson,* Reprint Art. 211, 212.

64) *C. Neumann*, Stationärer Temperaturzustand, Halle 1862; Hydrodynamische Untersuchungen, Leipzig 1883, p. 283.

64a) Eine Zusammenstellung der Resultate *Poissons* und eine eingehende Behandlung zweier sich berührender Kugeln gibt *J. B. Goebel,* J. f. Math. 124 (1902), p. 157; 125 (1903), p. 267.

Dielektrizitätskonstante ε gebracht wird. Dabei soll die Elektrizitätsverteilung des ursprünglichen Feldes ungeändert bleiben. Im Innern des Körpers gilt:

$$\text{div}\,\varepsilon\mathfrak{E} = \varepsilon\,\text{div}\,\mathfrak{E} = 0, \tag{75}$$

an seiner Oberfläche

$$\mathfrak{E}_n^a - \varepsilon\mathfrak{E}_n^i = 0, \tag{76}$$

wo die Indizes a und i die äußere resp. innere Seite der Oberfläche andeuten.

Aus (75) folgt mit Berücksichtigung von (76)

$$\int \text{div}\,\varepsilon\mathfrak{E}\,dS_i = \int \varepsilon\mathfrak{E}_n^i d\sigma = \int \mathfrak{E}_n^a d\sigma = 0. \tag{77}$$

Wird ε unendlich groß, so folgt aus (76)

$$\mathfrak{E}_n^i = 0 \tag{77'}$$

und aus (77′) zusammen mit (75) (vgl. Nr. 4)

$$\mathfrak{E}_i = 0. \tag{78}$$

(77) und (78) stimmen aber überein mit den Bedingungen, welchen das Feld eines an die Stelle unseres Nichtleiters gebrachten ungeladenen Leiters genügt. Genau das Analoge, wie bei der Bestimmung des Feldes, gilt auch bei den ponderomotorischen Kräften (vgl. Formel (95)). Der Fall des Leiters ist also in dem allgemeineren des Dielektrikums rechnerisch mit enthalten, nämlich für $\varepsilon = \infty$. Dies ist jedoch nur eine Rechenregel und sagt nichts über die Dielektrizitätskonstante der Leiter aus; letztere ist durch elektrostatische Versuche nicht zu ermitteln, da im Leiter stets das Feld Null ist.

Die allgemeinen Bedingungen im elektrostatischen Felde ergeben die Kapazität eines Plattenkondensators mit n planparallelen Schichten der Dicke a_ν und der Dielektrizitätskonstante ε_ν.

Da das elektrische Feld aus Symmetriegründen gleichförmig und parallel der Plattennormale ist, so folgt aus (I′) für die Potentialdifferenz der Platten

$$V_{II} - V_I = \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{E}_\nu a_\nu,$$

und da keine der dielektrischen Schichten geladen ist, folgt für die Dichte auf den Platten

$$\omega_{II} = -\omega_I = \varepsilon_1\mathfrak{E}_1 = \varepsilon_2\mathfrak{E}_2 = \cdots \varepsilon_\nu\mathfrak{E}_\nu = \cdots \varepsilon_n\mathfrak{E}_n \text{ (vgl. IV und (17)).}$$

Ist die Plattenfläche σ, so berechnet sich die Kapazität α zu

$$\alpha = \frac{\sigma}{\sum_\nu \frac{a_\nu}{\varepsilon_\nu}}.$$

Man kann also durch Veränderung eines Abstandes a_ν eine gleichzeitige Änderung der Dielektrizitätskonstante einer Schicht hinsichtlich ihres Einflusses auf die Kapazität kompensieren; so sind Dielektrizitätskonstanten bestimmt worden [65]).

Führt man die Elektrizitätsmenge e der Belegung ein, so erhält man in der Formel $V_{II} - V_I = e\sum \frac{a}{\varepsilon\sigma}$ ein Analogon zum *Ohm*schen Gesetz [66]). ε nennt man deshalb auch gelegentlich dielektrische Leitfähigkeit, $\sum \frac{a}{\varepsilon\sigma}$ dielektrischen Widerstand.

15. Influenz. Wahre und freie Elektrizität. Bevor wir zur Lösung bestimmter Probleme übergehen, wollen wir einige allgemeine Fragen erledigen, die uns zeigen, wie die Vor-*Maxwell*sche Theorie diese Fälle im Sinne einer Fernwirkung behandelt hat.

Es fragt sich, wie das Feld $\mathfrak{E}_0$ geändert wird, wenn statt Luft ($\varepsilon = 1$) ein Körper aus anderem Material der Dielektrizitätskonstante ε ins Feld gebracht wird, während die Elektrizitätsverteilung ϱ, ω, e unverändert bleibt; dann ist

$$\text{div}\, \varepsilon\mathfrak{E} = \text{div}\, \mathfrak{E}_0 = \varrho \tag{79}$$

und für jede Leiteroberfläche

$$\int \varepsilon \mathfrak{E}_n d\sigma = \int \mathfrak{E}_{0n} d\sigma. \tag{80}$$

Für das Zusatzfeld $\mathfrak{G} = \mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0$ folgt aus (79)

$$\text{div}\, \mathfrak{G} = \text{div}\, \mathfrak{E} - \text{div}\, \mathfrak{E}_0 = -\text{div}\, (\varepsilon - 1)\mathfrak{E} \tag{81}$$

und ebenso aus (80)

$$\int \mathfrak{G}_n d\sigma = \int \mathfrak{E}_n d\sigma - \int \mathfrak{E}_{0n} d\sigma = -\int (\varepsilon - 1)\mathfrak{E}_n d\sigma. \tag{82}$$

Setzen wir

$$-\text{div}\, (\varepsilon - 1)\mathfrak{E} = \varrho', \quad -\int (\varepsilon - 1)\mathfrak{E}_n d\sigma = e', \tag{83}$$

so folgt

$$\text{div}\, \mathfrak{G} = \varrho', \quad \int \mathfrak{G}_n d\sigma = e'. \tag{84}$$

$\mathfrak{G}$ genügt denselben allgemeinen Bedingungen wie $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}_0$, ist also durch die ϱ', ω', e' eindeutig gegeben. Diese Werte sind wegen (83) zwar erst bekannt, wenn $\mathfrak{E}$ gefunden, also die Aufgabe gelöst ist, aber die *Form* von (84) zeigt, daß $\mathfrak{G}$ als das Feld gewisser ge-

65) *Gordon,* Phil. Trans. 1879, p. 417; *Donle,* Ann. Phys. Chem. (3) 40 (1890), p. 307; *Winkelmann,* Ann. Phys. Chem. (3) 38 (1889), p. 161; 40 (1890), p. 732; *E. Cohn,* Ann. Phys. Chem. (3) 46 (1892), p. 135.

66) *P. Drude,* Physik des Äthers, Stuttgart 1894, p. 274 und Ann. Phys. Chem. (3) 57 (1896), p. 223.

dachter Elektrizitätsmengen aufgefaßt werden kann, die nur dort sich befinden, wo der dielektrische Körper in die Luft eingebettet ist ($\varepsilon \neq 1$).

Nach *Hertz*[67]) heißen die ϱ, ω, e die wahren, die ϱ', ω', e' die induzierten, die $\varrho + \varrho'$, $\omega + \omega'$, $e + e'$ die freien Dichten resp. Elektrizitätsmengen.

$\mathfrak{E}_0$ hat das Potential (vgl. Nr. 4 (15))

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi} \sum \frac{e}{r}. \tag{85}$$

Wegen (84) lautet das Zusatzpotential

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \sum \frac{e'}{r}, \tag{86}$$

also

$$\varphi = \varphi_0 + \chi = \frac{1}{4\pi} \sum \frac{e + e'}{r}, \tag{87}$$

d. h. man kann bei beliebigen dielektrischen Körpern im ganzen Felde auf Grund der vor-*Faraday*schen Anschauungen das Potential nach dem *Coulomb*schen Gesetz berechnen, wenn man statt der wahren Elektrizitätsmengen die freien wählt. Während aber die wahre Elektrizität an der Materie haftet, tut dies die freie nicht, sie hängt vom Felde selbst ab.

16. Influenz auf Ellipsoid und Kugel. Clausius-Mossottische Theorie. Wird ein Ellipsoid der Dielektrizitätskonstante ε in ein gleichförmiges Feld $\mathfrak{E}_0$ der Dielektrizitätskonstante 1 gebracht, so wird das Zusatzpotential[68])

$$\chi = \int \left(\frac{\mathfrak{E}_{0x} \cos nx}{\frac{1}{\varepsilon - 1} + A} + \frac{\mathfrak{E}_{0y} \cos ny}{\frac{1}{\varepsilon - 1} + B} + \frac{\mathfrak{E}_{0z} \cos nz}{\frac{1}{\varepsilon - 1} + C} \right) \frac{d\sigma}{4\pi r}, \tag{88}$$

das Integral über die Ellipsoidoberfläche erstreckt. Hier bedeutet r den Abstand des Oberflächenelements $d\sigma$ vom Aufpunkt; es ist

---

67) *H. Hertz,* Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft, Leipzig 1892, p. 225 u. 236; Ann. Phys. Chem. (3) 40 (1890), p. 577.

68) Vgl. *Poisson,* Mém. de le ac. de France 5 (1824), p. 492; vgl. auch *Maxwell,* Treatise 2, Art. 437 ff. *F. Neumann* löst das Problem für Rotationsellipsoide Journ. f. Math. 37 (1848), p. 21. Die Induktion in einem unendlich langen Kreiszylinder behandelt *G. Kirchhoff* Journ. f. Math. 48 (1854), p. 348 und Ges. Abhandl., p. 193. Das für den Magnetismus wichtige Problem der Induktion in einem endlichen Kreiszylinder durch ein gleichförmiges Feld parallel der Achse hat *G. Green* gelöst Essay, p. 66, doch ist der Gültigkeitsbereich seiner Formel auf paramagnetische Körper beschränkt (vgl. *Maxwell,* Treatise 2, Art. 439).

$$A = \tfrac{1}{2} abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)L}, \quad B = \tfrac{1}{2} abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)L},$$

$$C = \tfrac{1}{2} abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)L}, \quad L = \sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}.$$

Im Innern des Ellipsoides ist das Feld homogen, man hat nämlich für die Komponenten der Feldstärke die konstanten Werte

$$(89) \quad \mathfrak{E}_x = \frac{\mathfrak{E}_{0x}}{1+(\varepsilon-1)A}; \quad \mathfrak{E}_y = \frac{\mathfrak{E}_{0y}}{1+(\varepsilon-1)B}; \quad \mathfrak{E}_z = \frac{\mathfrak{E}_{0z}}{1+(\varepsilon-1)C}.$$

Ist das Ellipsoid eine Kugel, so wird $a = b = c$ der Radius und $A = B = C = \frac{1}{3}$, dann ist im Innern

$$(89') \qquad \mathfrak{E} = \frac{3\,\mathfrak{E}_0}{\varepsilon+2}.$$

Im Außenraum lautet das Zusatzpotential

$$(90) \qquad \chi = \frac{a^3}{|\mathfrak{r}|^3}\,\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\,(\mathfrak{E}_0\cdot\mathfrak{r}),$$

wo $\mathfrak{r}$ der Radiusvektor vom Kugelzentrum zum Aufpunkt ist. Ist die Kugel leitend, so wird (vgl. Nr. **14**)

$$(90') \qquad \chi = \frac{a^3}{|\mathfrak{r}|^3}\,(\mathfrak{E}_0\cdot\mathfrak{r}).$$

Die Kugel ist durch den Einfluß des äußeren Feldes polarisiert. *Clausius*[69]) nahm wie *Mossotti* an, daß ein Dielektrikum aus solchen kleinen polarisierbaren leitenden Kugeln bestände, die voneinander isoliert seien. Diese Kugeln denkt er sich regellos im Körper verteilt; sie rufen je nach Konzentration und Größe verschiedene Dielektrizitätskonstanten hervor. $a^3(\varepsilon-1)/(\varepsilon+1) = \frac{3}{4\pi} v_d(\varepsilon-1)/(\varepsilon+2)$ ist ein Maß für die Störung, welche eine dielektrische Kugel ausübt, wenn v_d das Volumen der Kugel ist; $\frac{3}{4\pi} v_l$ ist die Störung, welche die leitenden Kugeln vom Gesamtvolumen v_l hervorrufen. Sollen diese Störungen einander gleich sein, so muß $v_l : v_d = (\varepsilon-1)/(\varepsilon+2)$ sein. Eine strenge Ableitung dieser Beziehung für einen beliebig geformten Körper aus (90) gibt *Poincaré*.[70]) Da v_l als Volumen der leitend gedachten Moleküle unveränderlich ist, so folgt

$$(91) \qquad \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\,\frac{1}{d} = \text{const.},$$

---

69) *R. Clausius*, Mech. Wärmetheorie 2, p. 62, Braunschweig 1879.

70) Vgl. *H. Poincaré*, Électricité et optique 1, p. 48, Paris 1890; siehe auch *G. Adler*, Wien Ber. 99[2a] (1890), p. 1044 und den Art. über Elektronentheorie von *H. A. Lorentz* V 14 Nr. 43 u. 47.

wo d die mit Druck und Temperatur veränderliche Dichte des dielektrischen Körpers bedeutet. (91) ist unter dem Namen der *Lorentz-Lorenz*'schen Gleichung bekannt[71]). Bei Gasen ist ε nahezu $= 1$, also $\varepsilon + 2$ nahezu $= 3$, (91) ergibt also für Gase Proportionalität von $\varepsilon - 1$ mit dem Druck[72]).

17. Hohlkugel und Hohlzylinder im gleichförmigen Feld. Von Wichtigkeit, wenigstens für den analogen Fall des Magnetismus (Nr. **23**) ist das Problem der Hohlkugel im gleichförmigen Felde, weil man im Innern des Hohlkörpers von hoher Dielektrizitätskonstante (Permeabilität) ein geschwächtes gleichförmiges Feld erhält.

Wir unterscheiden die Potentiale $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, die für $r < a_1$, $a_1 < r < a_2$, $r > a_2$ gültig sind, wo a_1 und a_2 die Radien der Hohlkugel sind.

Da die *Laplace*sche Differentialgleichung überall gültig ist, hat φ überall die Form

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\vartheta)\left(A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\right).$$

Die Konstanten bestimmen sich aus den Bedingungen, daß φ überall endlich und stetig ist, daß für $r = \infty$

$$\varphi = -\mathfrak{E}_{0x}x - \mathfrak{E}_{0y}y - \mathfrak{E}_{0z}z$$

ist, wo die Konstanten $\mathfrak{E}_{0x}, \mathfrak{E}_{0y}, \mathfrak{E}_{0z}$ die Komponenten des ungestörten Feldes sind, und daß für

$$r = a_1 : \cdots\cdot \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \varepsilon\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}$$

$$r = a_2 : \cdots\cdot \quad \varepsilon\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} = \frac{\partial\varphi_3}{\partial r}.$$

Die Durchrechnung ergibt für das Innere[73]):

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0\frac{1}{1 + \frac{2}{9}\frac{(\varepsilon-1)^2}{\varepsilon}\left(1 - \frac{a_1^3}{a_2^3}\right)}. \tag{92}$$

Im Innern bleibt das Feld also gleichförmig. Wird $\varepsilon = \infty$, so wird $\mathfrak{E} = 0$, wir haben die Schutzwirkung leitender Hüllen (vgl. Nr. **5**). Für großes ε wird das Feld sehr geschwächt.

Für den unendlich langen Hohlzylinder, dessen Achse senkrecht zum Feld gerichtet ist, erhalten wir auf dieselbe Weise

---

71) Eine optische Ableitung geben *R. Lorenz,* Ann. Phys. Chem. (3) 11 (1880), p. 77; 20 (1883), p. 19 und *H. A. Lorentz,* Ann. Phys. Chem. (3) 9 (1880), p 642.

72) *L. Boltzmann,* Wien Ber. 69^2 (1874), p. 795.

73) *Maxwell,* Treatise 2, Art. 431.

$$(93) \qquad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \frac{1}{1 + \frac{(\varepsilon - 1)^2}{4\varepsilon}\left(1 - \frac{a_1^2}{a_2^2}\right)}.$$

Ein allgemeines Näherungsverfahren, welches bei einem beliebigen Körper in einem beliebigen Felde anwendbar ist, wird in Nr. **25** für den analogen magnetischen Fall entwickelt.

18. Spannungen und Kräfte. Aus der Abnahme der elektrischen Energie bei einer virtuellen Verschiebung ergeben sich die Kräfte elektrischen Ursprunges; sie lassen sich durch Spannungen ausdrücken [74]).

Aus diesen erhält man die auf die Volumeinheit wirkende Kraft

$$(94) \qquad \mathfrak{f} = \varrho\mathfrak{E} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}^2 \operatorname{grad} \varepsilon.$$

(94) zeigt, daß die Feldstärke $\mathfrak{E}$ nur im homogenen Medium die Kraft auf die Elektrizitätsmenge 1 darstellt; in inhomogenen Medien kommt noch eine Kraft hinzu, die die Richtung des stärksten Gefälles der Dielektrizitätskonstanten hat.

An der Grenze eines Dielektrikums gegen Luft findet ein normal nach außen wirkender Zug statt

$$(95) \qquad \frac{\varepsilon - 1}{2}\mathfrak{E}^2\left\{1 - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\cos^2(\mathfrak{E}, n)\right\},$$

wo $\mathfrak{E}$ die Feldstärke außerhalb des Körpers ist.

Ist ε nahezu $= 1$, so ist der Zug von der Richtung, in der die Erregungslinien die Oberfläche treffen, unabhängig. Durch hydrostatischen Druck kann man die elektrischen Druckkräfte an der Grenze einer Flüssigkeit gegen ein Gas kompensieren und so ε bestimmen [75]). Ist die Umgebung nicht Luft, sondern ein Medium der Dielektrizitätskonstante ε_0, so ist ε in (95) durch $\varepsilon/\varepsilon_0$ zu ersetzen und der ganze Ausdruck mit ε_0 zu multiplizieren.

19. Kräfte auf starre Körper [76]). Handelt es sich um die Kräfte auf starre Körper, so dürfen wir zu (94) die Kraft

$$(96) \qquad \mathfrak{f}' = \varrho'\mathfrak{E} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}^2 \operatorname{grad} \varepsilon$$

addieren, weil diese bei der Integration über den ganzen Körper keinen Beitrag liefert (ϱ' ist durch (82) definiert). Es folgt

---

74) Vgl. *Maxwell*sche Theorie Art. *H. A. Lorentz* V 13, Nr. **23**; *Maxwell*, Treatise 1, Art. 105; *H. Hertz*, Ann. Phys. Chem. (3) 41 (1890), p. 396; *Faraday*, Experimental researches in electricity, p. 409, London 1839. Näheres über diese Spannungen und die mit denselben zusammenhängenden Erscheinungen der sogenannten Elektrostriktion findet man in dem Art. von *F. Pockels* V 16.

75) *G. Quincke*, Ann. Phys. Chem. (3) 19 (1883), p. 705.

76) Vgl. *E. Cohn*, Elm. Feld, p. 99.

(97) $$\mathfrak{f} = (\varrho + \varrho')\mathfrak{E},$$
wo
$$\varrho + \varrho' = \operatorname{div} \mathfrak{E}.$$

$\mathfrak{E}$ bedeutet also die Kraft auf die freie Elektrizitätsmenge 1. In der Elektronentheorie [77]) ist, wie in der ursprünglichen Vor-*Maxwell*schen Theorie, die Dielektrizitätskonstante kein Grundbegriff, sondern sie wird durch das Verhalten der induzierten Ladungen (verschobenen Elektrizitätsmengen) erklärt; dort ist die Feldstärke in der Tat die Kraft auf die freie Elektrizitätsmenge 1, so daß das *Coulomb*sche Gesetz in der Elektrostatik der Elektronentheorie mit $\varepsilon = 1$ ausnahmslos und allgemein gilt.

Ist der starre Körper ungeladen, so folgt aus (94)
$$\mathfrak{f} = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{E}^2 \operatorname{grad} (\varepsilon - 1);$$
wir führen anstatt grad ε in (94) das damit identische grad $(\varepsilon - 1)$ ein, weil auf der Oberfläche des Körpers, d. h. außerhalb der Grenzschicht, $\varepsilon - 1 = 0$ ist, und weil daher in der durch partielle Integration erhaltenen Gesamtkraft

(98) $$\mathfrak{F} = \int \frac{\varepsilon - 1}{2} \operatorname{grad} \mathfrak{E}^2 dS$$

das hinzutretende Oberflächenintegral verschwindet. Ebenso ist das Drehmoment

(98′) $$\mathfrak{N} = \int \frac{\varepsilon - 1}{2} [\mathfrak{r} \cdot \operatorname{grad} \mathfrak{E}^2] dS.$$

Ist $\varepsilon - 1$ sehr klein, so kann man $\mathfrak{E}_0^2$ anstatt $\mathfrak{E}^2$ setzen und erhält

(99) $$\mathfrak{F} = \int \frac{\varepsilon - 1}{2} \operatorname{grad} \mathfrak{E}_0^2 dS.$$

Ein dielektrischer Körper wird also nach Punkten größter Feldstärke getrieben [78]).

Ist die Energie des Feldes W, und nennen wir W_0 die Energie, die unter gleichen Umständen vorhanden wäre, wenn der dielektrische Körper durch Luft ersetzt würde, so würde bei einer virtuellen Verschiebung des Körpers $\delta W_0 = 0$ sein, weil in diesem Falle durch die Verschiebung nichts an dem Felde geändert würde; da aber $\delta A = -\delta W$ ist, so gilt auch [79])

---

77) Vgl. Elektronentheorie Art. *H. A. Lorentz* V 14, Nr. 2 u. 3.

78) Vgl. das magnetische Analogon bei *W. Thomson,* Reprint Art. 670.

79) Vgl. *Cohn,* Elm. Feld, p. 85. Wichtig ist, daß in (100) $\mathfrak{E}$ nur in S bekannt zu sein braucht.

(100) $$\delta A = -\delta(W - W_0) = \delta \int \frac{\varepsilon - 1}{2} (\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{E}_0) dS.$$

Für das Ellipsoid vom Volumen S im gleichförmigen Felde folgt hieraus (vgl. (89))

(101) $$\delta A = \delta \frac{\varepsilon - 1}{2} S \left\{ \frac{\mathfrak{E}_{0x}^2}{1 + (\varepsilon - 1)A} + \frac{\mathfrak{E}_{0y}^2}{1 + (\varepsilon - 1)B} + \frac{\mathfrak{E}_{0z}^2}{1 + (\varepsilon - 1)C} \right\}.$$

Ist das Ellipsoid um die vertikale c-Achse drehbar, und bildet die a-Achse mit der Horizontalkomponente $\mathfrak{E}_h$ den Winkel ϑ, so ist das Drehmoment zu wachsenden ϑ

(101′) $$\mathfrak{N} = \tfrac{1}{2} \mathfrak{E}_h^2 S \sin 2\vartheta \left(\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon - 1} + B} - \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon - 1} + A} \right).$$

Mit $a > b$ wird $A < B < 1$ (vgl. Nr. **16**), d. h. das Ellipsoid stellt sich im gleichförmigen Felde auf jeden Fall mit seiner großen Achse in die Feldrichtung. Ist die Umgebung nicht Luft, sondern hat sie die Dielektrizitätskonstante ε_0, so ist (101′) mit ε_0 zu multiplizieren und ε durch $\varepsilon/\varepsilon_0$ zu ersetzen; der soeben ausgesprochene Satz gilt, gleichgültig ob $\varepsilon \gtrless \varepsilon_0$ ist.

Ist $\varepsilon - 1$ klein, so folgt aus (100) die translatorische Kraft (vgl. (99))

$$\mathfrak{F} = \frac{\varepsilon - 1}{2} S \operatorname{grad} \mathfrak{E}_0^2.$$

Im Falle der Kugel wird aus (101)

$$\mathfrak{F} = \tfrac{3}{2} S \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \operatorname{grad} \mathfrak{E}_0^2;$$

ist die Kugel leitend, so hat man:

$$\mathfrak{F}' = \tfrac{3}{2} S \operatorname{grad} \mathfrak{E}_0^2.$$

Durch Vergleich von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ hat *Boltzmann*[80]) an festen Körpern ε bestimmt. (101′) wurde von *Graetz* und *Fomm*[81]) zur Bestimmung von Dielektrizitätskonstanten verwendet.

Ein Feld, welches von zwei gleichen, aber entgegengesetzten Elektrizitätsmengen, die auf der X-Achse gleich weit vom Nullpunkt entfernt sind, herrührt, hat in der Nähe des Nullpunkts die Form[82])

$$\mathfrak{E}_0^2 = \text{const.} + a^2 x^2 - b^2 (y^2 + z^2).$$

---

80) *L. Boltzmann,* Wien. Ber. 68^2 (1873), p. 81; 70^2 (1874), p. 307; Ann. Phys. Chem. (2) 153 (1874), p. 525.

81) *L. Graetz* und *L. Fomm,* Ann. Phys. Chem. (3) 53 (1894), p. 85; 54 (1895), p. 626, ferner *L. Lombardi,* Nuov. Cim. (4) 2 (1895), p. 360 und Mem. d. Acc. di Torino (2) 45 (1895), p. 171.

82) *W. Thomson,* Reprint Art. 670.

Bringt man in dieses Feld ein dünnes Stäbchen von kleinem $\varepsilon - 1$, welches um den Coordinatenursprung in der xy-Ebene drehbar ist, so folgt aus (98')

$$\mathfrak{N} = -\frac{\varepsilon - 1}{2}(a^2 + b^2)\sin 2\vartheta \cdot K, \tag{102}$$

wo K das Trägheitsmoment bezüglich der Drehungsachse ist. Das Stäbchen sucht sich also in Richtung des Feldes ($\vartheta = 0$) zu stellen. Setzt man in (102) $\varepsilon/\varepsilon_0$ statt ε und multipliziert mit ε_0 (ε_0 Diel. Const. der Umgebung), so folgt, daß es sich senkrecht zum Felde stellt, wenn $\varepsilon < \varepsilon_0$. Diese Tendenz ist eine Eigenschaft der bestimmten Feldanordnung, nicht allgemein gültig, wie aus der Bemerkung nach (101') folgt[83]). Das Drehmoment läßt sich zur Bestimmung von ε benutzen. Voraussetzung ist: ε nahezu 1.

20. Elektromotorische Kräfte. Sind Inhomogenitäten in den Leitern vorhanden, z. B. in der Grenzschicht zweier aneinander stoßender verschiedener Leiter, oder Temperaturgefälle in einem sonst homogenen Leiter, so muß man eine eingeprägte elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}^{el}$ annehmen. Es ist dann

$$\text{I. rot } \mathfrak{E} = 0$$

$$\mathfrak{J} = \sigma(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^{el}), \tag{5'}$$

also in der Elektrostatik

$$\mathfrak{E} = -\mathfrak{E}^{el} \tag{11'}$$

in Leitern.

Ferner gelten (3) und (8). Damit (11') mit I. verträglich ist, d. h. damit ein statischer Zustand existieren kann, muß

$$\text{rot } \mathfrak{E}^{el} = 0 \tag{103}$$

sein. Aus (103) folgt

$$\int \mathfrak{E}^{el}_s \, ds = 0 \tag{104}$$

für jede geschlossene Kurve. (104) drückt das Gesetz der *Volta*schen Spannungsreihe aus.

Die Energie bleibt $W_e = \int \frac{\varepsilon}{2}\mathfrak{E}^2 dS$, aber jetzt befindet sie sich zum Teil im Innern der Leiter, wo wegen (11') $\mathfrak{E}$ nicht mehr verschwindet. Dieser Teil der Energie beträgt $\int \frac{\varepsilon}{2}\mathfrak{E}^{el^2} dS$, die gesamte Energie lautet also

$$\int_{S_i} \frac{\varepsilon}{2}\mathfrak{E}^{el^2} dS + \int_{S_a} \frac{\varepsilon}{2}\mathfrak{E}^2 dS,$$

83) Vgl. *E. Cohn*, Elm. Feld, p. 118.

wo S_i den Innenraum, S_a den Außenraum der Leiter bedeutet. Da wir aus der Abnahme der Energie die Kräfte erhalten, so wird elektrische Arbeit bei Deformation der Leiter geleistet, und diese Kräfte zusammen mit den übrigen Kräften (z. B. elastischen Kräften und Kapillarkräften) bestimmen das Gleichgewicht.

Auf Grund dieser Darstellung läßt sich der *Volta*sche Fundamentalversuch behandeln, ferner die *Thomson*sche Methode[84]) zur Messung der elektrischen Differenz von Metallen. Die Resultate beider Methoden stimmen miteinander überein, aber sie stimmen nicht mit den Potentialdifferenzen aus Messungen der *Peltier*schen Wärme, die viel geringere elektrische Differenzen gibt; daher ist es wahrscheinlich, daß der größte Teil der elektrischen Differenz bei den Versuchen von *Volta* und *Thomson* in der Gasschicht an der Grenze Metall—Dielektrikum zu suchen ist. Von der letzteren Annahme ausgehend kann man die Erscheinungen darstellen, wenn man anstatt (3)

$$\mathfrak{D} = \varepsilon(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^{ed}) \tag{3'}$$

einführt, also eine im inhomogenen Dielektrikum wirksame elektromotorische Kraft, wie *Lorentz* das getan hat[85]).

21. Kristalle. In Kristallen bleibt die Form der *Maxwell*schen Gleichungen erhalten; nur gilt anstatt (3) die kompliziertere Beziehung

$$\mathfrak{D} = (\varepsilon)\mathfrak{E}.^{86)} \tag{3''}$$

Genau wie sich aus (1) und (2) $W_e = \int \frac{\varepsilon}{2}\mathfrak{E}^2 dS$ ergab (Nr. 2), gilt allgemein:

$$W_e = \int dS \int_0^{\mathfrak{D}} \mathfrak{E}\, d\mathfrak{D}. \tag{105}$$

Ist das System konservativ, d. h. durch den augenblicklichen Wert von $\mathfrak{E}$ bestimmt, so folgt $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$[87]) und

$$W_e = \int \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{D})\, dS. \tag{105'}$$

Durch die ε ist ein Ellipsoid bestimmt, dessen Hauptachsen zu Koordinatenachsen gewählt werden sollen; dann geht (3'') über in

---

84) *W. Thomson,* Reprint Art. 400 und Phil. Mag. (5) 46 (1898), p. 82.

85) Elektronentheorie Art. *H. A. Lorentz* V 14, Nr. 44. Wichtig ist die Erklärung der Kontaktpotentialdifferenz auf elektronentheoretischer Grundlage: *H. A. Lorentz*, Amsterdam Akad. v. Wet. (1905), p. 556.

86) Wegen der Bezeichnungsweise siehe *Maxwell*sche Theorie Art. *H. A. Lorentz* V 13, Nr. 3.

87) Vgl. *Maxwell,* Treatise 1, Art. 101f.

$$(3''') \qquad \mathfrak{D}_x = \varepsilon_1 \mathfrak{E}_x; \quad \mathfrak{D}_y = \varepsilon_2 \mathfrak{E}_y; \quad \mathfrak{D}_z = \varepsilon_3 \mathfrak{E}_z.$$

Es existiert auch hier ein Potential φ.[87a]) Anstatt (100) in Nr. **19** gilt

$$(106) \quad \delta A = \tfrac{1}{2}\delta\int\{(\varepsilon_1 - 1)\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_{0x} + (\varepsilon_2 - 1)\mathfrak{E}_y\mathfrak{E}_{0y} + (\varepsilon_3 - 1)\mathfrak{E}_z\mathfrak{E}_{0z}\}\,dS.$$

Wird eine anisotrope Kugel in ein gleichförmiges Feld $\mathfrak{E}_0$ gebracht, das parallel der x-Achse gerichtet ist, so ist

$$(107) \qquad \mathfrak{E}_x = \frac{3}{\varepsilon_1 + 2}\mathfrak{E}_{0x} \text{ (vgl. Nr. **16** (89'))},$$

also die Kraft

$$(108) \qquad \mathfrak{F}_x = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1 + 2} S \frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{E}_0^2 \text{ (vgl. Nr. **19**)}^{88}).$$

Eine um die z-Achse drehbare Kugel erfährt in einem Felde $\mathfrak{E}_0$, dessen horizontale Komponente $\mathfrak{E}_{0h}$ den Winkel ϑ mit der x-Achse bildet, wegen (106) und (107) das Drehmoment[88a])

$$(109) \qquad \mathfrak{N} = \frac{9}{2}\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{(\varepsilon_1 + 2)(\varepsilon_2 + 2)}\mathfrak{E}_{0h}^2 S \sin 2\vartheta.$$

22. Rückstand. Ob es dielektrischen Rückstand, der analog der magnetischen Hysteresis ist (Nr. **32**), in reinen Materialien überhaupt gibt, ist nicht absolut sicher. Die Versuche widersprechen sich bei homogenen Körpern[89]); dagegen hat *Maxwell*[90]) gezeigt, daß bei inhomogenen Körpern, in denen das Verhältnis der Dielektrizitätskonstante zur Leitfähigkeit ε/σ Ortsfunktion ist, Rückstandserscheinungen auftreten müssen. Nimmt man an, daß die Erregung zur Zeit t proportional dem Wert der Feldstärke zu einer etwas früheren Zeit ist, so muß bei Schwingungen eines Körpers im Felde eine Dämpfung infolge der dielektrischen Hysteresis auftreten[91]).

87a) *J. Curie,* Ann. chim. phys. (6) 17 (1889), p. 385 bestimmte Dielektrizitätskonstanten von Kristallen, indem er senkrecht zu den Hauptachsen geschnittene Kristallplatten zwischen die Belegungen eines Kondensators brachte.

88) *L. Boltzmann,* Wien. Ber. 70² (1874), p. 342. *Romich* u. *Nowak,* ibid. p. 380.

88a) *R. Fellinger,* Ann. Phys. (4) 7 (1902), p. 333 bestimmt aus dem Drehmoment von Kristallellipsoiden im homogenen Felde Dielektrizitätskonstanten; die Methode ist der in Anm. 81) erwähnten analog. Ebenso *Borel,* Diss. Génève 1893.

89) Siehe die Literaturzusammenstellung bei *L. Graetz,* Winkelmanns Handbuch d. Physik 4¹, p. 157.

90) *Maxwell,* Treatise 1, Art. 328.

91) *W. Schaufelberger,* Ann. Phys. Chem. (3) 67 (1899), p. 307; *F. Beaulard,* Éclairage électrique 37 (1903), p. 404.

II. Magnetostatik.

23. Unterschiede der magnetostatischen und elektrostatischen Probleme. In Nr. **3** sind die Grundgleichungen der Magnetostatik zusammengestellt, in Nr. **4** ist der Eindeutigkeitsbeweis erbracht, in Nr. **5** und **6** sind einige allgemeine Eigenschaften des Feldes und der Energie angegeben. Es wäre alles wörtlich aus der Elektrostatik zu entnehmen, indem man $\mathfrak{E}$, φ, ε, ϱ_e, ω_e, W_e durch $\mathfrak{H}$, ψ, μ, ϱ_m, ω_m, W_m ersetzt, wenn nicht folgende wichtige Unterschiede beständen.

a) Es gibt keine Leiter des Magnetismus, also kein in Strenge vollständiges Feld außer dem unendlichen Raum; doch wir sahen in Nr. **14**, daß ungeladene Dielektrika von unendlich großer Dielektrizitätskonstante analoges Verhalten zeigen wie Leiter. So zeigt auch ein Körper von sehr hoher Permeabilität μ (weiches Eisen) ähnliche Eigenschaften (Schirmwirkung) wie Leiter in der Elektrostatik. Die Schirmwirkung einer Hohlkugel und eines Hohlzylinders, die zum magnetischen Schutz von Meßinstrumenten gebraucht werden, berechnet sich genau wie in Nr. **17** (92) und (93). Näheres hierüber in dem Artikel von *H. du Bois* V 17.

b) Wahre Dichten kommen nur in ferromagnetischen Körpern (Magneten) vor, aber es ist in jedem Magneten

$$\Sigma m = \int \varrho_m dS = 0.$$

Deshalb kann man

$$\varrho_m = -\operatorname{div} \mathfrak{M}^e \tag{110}$$

setzen, wo der Faktor $\mathfrak{M}^e$ die (eingeprägte) wahre Magnetisierung heißt, die nur in Magneten von Null verschieden ist. Integriert man nämlich (110) über einen ganzen Magneten, so ergibt sich $\Sigma m = 0$, weil $\mathfrak{M}^e$ auf einer den Magneten eng umschließenden Fläche bereits Null ist.

$\mathfrak{M}^e$ ist durch ϱ_m nicht gegeben, sondern es können noch geschlossene $\mathfrak{M}^e$-Linien in beliebiger Zahl und Anordnung hinzukommen, die aber, da sie quellenlos sind, kein ϱ_m ergeben (110), also wegen der Eindeutigkeit nichts zu $\mathfrak{H}$ beitragen. Jedem Anfangspunkt einer $\mu\mathfrak{H}$-Linie entspricht der Endpunkt einer $\mathfrak{M}^e$-Linie und umgekehrt.

Die Einführung von $\mathfrak{M}^e$ ist vorteilhaft, da $\mathfrak{M}^e$ im Magneten beliebig gegeben sein darf, nur daß $\mathfrak{M}^e$ stetig und differenzierbar an der Oberfläche in Null übergehen muß, während ϱ_m der Bedingung $\Sigma m = 0$ genügen muß.

c) Während ε immer > 1 ist, ist in den paramagnetischen Körpern $\mu > 1$, in den diamagnetischen < 1.[92]) Diese Tatsache wurde von *Faraday*[93]) durch die Drehmomente in einem Magnetfelde (der Form wie am Ende von Nr. **19**) nachgewiesen. Es gilt auch hier die Bemerkung von der Nichtallgemeinheit der Erscheinung wie in Nr. **19**.

24. Gibt es wahren Magnetismus? Diese Frage ist gleichbedeutend mit der, ob die Erregungslinien Endpunkte haben; die Antwort fällt verschieden aus, je nachdem die Erregung definiert wird[94]).

In unserer Darstellung existiert wahrer Magnetismus[95]); er ist gegeben durch die Beziehungen $\varrho_m = \operatorname{div} \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$.

Im Gegensatz hierzu zeigen wir, daß wir zwei analoge Vektoren $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{H}'$ definieren können, derart daß $0 = \operatorname{div} \mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}' = \mu \mathfrak{H}'$ wird. Setzen wir nämlich

$$\mathfrak{B}' = \mu \mathfrak{H} + \mathfrak{M}^e = \mathfrak{H} + \mathfrak{M} \tag{111}$$

ein ($\mathfrak{M}$ heißt Magnetisierung, sie setzt sich additiv zusammen aus der induzierten Magnetisierung $(\mu - 1)\mathfrak{H}$ und der wahren Magnetisierung $\mathfrak{M}^e$), so ist wegen II[a] und (110)

$$\operatorname{div} \mathfrak{B}' = 0. \tag{112}$$

Ferner ist wegen I[a]

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\mathfrak{B}'}{\mu} - \frac{\mathfrak{M}^e}{\mu} \right) = 0. \tag{113}$$

Setzen wir schließlich noch

$$\mathfrak{B}' = \mu \mathfrak{H}'; \quad \frac{\mathfrak{M}^e}{\mu} = \mathfrak{H}_e', \tag{114}$$

so haben wir

$$\operatorname{div} \mu \mathfrak{H}' = 0, \tag{112'}$$

$$\operatorname{rot} (\mathfrak{H}' - \mathfrak{H}_e') = 0. \tag{113'}$$

In dieser Darstellung gibt es keine magnetischen Mengen, man muß sich das Feld $\mathfrak{H}'$ durch *Ampère*'sche Molekularströme erzeugt denken. $\mathfrak{H}_e'$ ist als magnetomotorische Kraft zu deuten; diese bleibt

92) $\varkappa = \frac{\mu - 1}{4\pi}$ heißt Suszeptibilität; dieselbe kann also > 0 und < 0 sein.

93) *Faraday,* Researches 2, p. 217.

94) *Maxwell*sche Theorie Art. *H. A. Lorentz* V 13, Nr. 19; *E. Cohn,* Elm. Feld, p. 299; *R. Gans* und *R. H. Weber,* Ann. d. Phys. (4) 16 (1905), p. 172.

95) Diese Darstellung weicht von der *Lorentz*schen ab; siehe Art. *Maxwell*sche Theorie V 13, Nr. 15.

konstant bei Veränderungen in der Konfiguration der Magnete[96]). Während die Felddarstellung an Einheitlichkeit gewinnt, wenn man $\mathfrak{H}'$ einführt, da dann, gleichgültig, ob ein permanenter oder Elektromagnet vorliegt, div $\mu\mathfrak{H}' = 0$ und rot $\mathfrak{H}'$ gegeben ist, hat die Energie, in $\mathfrak{H}$ ausgedrückt, die einheitliche Form $\frac{1}{2}\int \mu\mathfrak{H}^2 dS$, dagegen in $\mathfrak{H}'$ die Form $\frac{1}{2}\int \mu\mathfrak{H}'^2 dS$ oder $-\frac{1}{2}\int \mu\mathfrak{H}'^2 dS$, je nachdem ein Elektromagnet oder ein permanenter Magnet vorliegt. Für permanent magnetische Kreise gilt das Analogon des *Ohm*schen Gesetzes[96]) ebenso wie für elektromagnetische Kreise[97]). Man kann μ die magnetische Leitfähigkeit, $\sum \frac{l}{\mu\sigma}$ den magnetischen Widerstand nennen[66]). Nähere Ausführungen hierzu im Artikel V 17 von *H. du Bois.*

25. Influenz. Wahrer und freier Magnetismus. Die Theorie der magnetischen Influenz wurde von *Poisson*[98]) auf Grund molekularer Hypothesen über die Konstitution polarisierbarer Substanzen aufgestellt; von diesen Hypothesen machten sich *W. Thomson*[99]), *F. Neumann*[100]), *Kirchhoff*[101]) und *Duhem*[101a]) frei, indem sie die Theorie auf einige Erfahrungstatsachen gründeten, die heute ihren Ausdruck in den *Maxwell*schen Gleichungen gefunden haben. Es gilt das Analoge wie in Nr. **15**, die induzierte und freie Dichte drücken sich analog aus. Entsprechend gibt es eine induzierte Magnetisierung

$$\mathfrak{M}' = (\mu - 1)\mathfrak{H}.$$

Ist im ganzen Raum $\mu = 1$, so ist (vgl. Nr. **15**)

$$(115) \qquad \psi_0 = \frac{1}{4\pi}\sum \frac{m}{r} = -\frac{1}{4\pi}\left\{\int \frac{\operatorname{div}\mathfrak{M}^e}{r} dS + \int \frac{\mathfrak{M}^e_n}{r} d\sigma\right\}$$

oder durch partielle Integration

96) *R. Gans* und *R. H. Weber,* Ann. d. Phys. (4) 16 (1905), p. 172; *R. H. Weber,* Ann. d. Phys. (4) (1905), p. 178 und *E. Kempken,* Tübinger Diss. 1906 und Ann. d. Phys. (4) 20 (1906) p. 1017.

97) Vgl. Anm. 96) und *H. du Bois,* Magnetische Kreise, p. 186, Berlin und München (1894).

98) *Poisson,* Mém. de l'acad. de France 5 (1826), p. 247, 488; 6 (1827), p. 441, vgl. auch *Maxwell,* Treatise 2, Art. 385.

99) *W. Thomson,* Reprint Art. 604.

100) *F. Neumann,* J. f. Math. 37 (1848), p. 21; Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus, Leipzig 1881.

101) *G. Kirchhoff,* J. f. Math. 48 (1854), p. 348; Ges. Abhandlungen, p. 193 und p. 223.

101a) *P. Duhem,* De l'aimantation par influence, Diss. Paris 1888, verwendet die thermodynamischen Prinzipien.

$$(115') \qquad \psi_0 = \frac{1}{4\pi} \int \left(\mathfrak{M}^e \operatorname{grad}' \frac{1}{r} \right) dS,$$

wo der Strich am grad bedeuten soll, daß die Differentiationen nach den laufenden Koordinaten von S auszuführen sind.

(115′) zeigt, daß der Magnet aufgefaßt werden kann als bestehend aus kleinen Elementarmagneten[98]).

$$(116) \qquad \int \mathfrak{M}^e dS = \mathfrak{m}$$

und

$$(116') \qquad \int \mathfrak{M}' dS = \mathfrak{m}'$$

heißen wahres und induziertes Moment (ersteres auch kurz: Moment)[101b]) des Magneten.

Ist $\mu \neq 1$, so kommt zu ψ_0 noch χ_m hinzu, und wir haben

$$(117) \qquad \psi = \psi_0 + \chi_m = \frac{1}{4\pi} \sum \frac{m + m'}{r}, \text{ vgl. } (87),$$

wo

$$\chi_m = \frac{1}{4\pi} \sum \frac{m'}{r} = \frac{1}{4\pi} \int \left(\mathfrak{M}' \operatorname{grad}' \frac{1}{r} \right) dS, \text{ vgl. (86) und (116')}.$$

Wird ein polarisierbares Ellipsoid (d. h. $\mu \neq 1$) in ein gleichförmiges Feld gebracht, so gelten die Analoga von (88) und (89). Aus (89) folgt für die induzierte Magnetisierung

$$(89_1) \qquad \mathfrak{M}_x' = \frac{\mathfrak{H}_{0x}}{\frac{1}{\mu - 1} + A}; \quad \mathfrak{M}_y' = \frac{\mathfrak{H}_{0y}}{\frac{1}{\mu - 1} + B}; \quad \mathfrak{M}_z' = \frac{\mathfrak{H}_{0z}}{\frac{1}{\mu - 1} + C}.$$

Speziell für die Kugel ergibt sich das Analogon von (89′); aus dieser Gleichung folgt, daß die Erregungslinien in die Kugel hineingezogen oder aus ihr herausgedrängt werden, je nachdem $\mu \gtrless 1$ ist[102]).

Denkt man sich in ein gegebenes Feld mit festen Magnetismusmengen, das sich aus einem Potential ψ_0 ableitet, einen polarisierbaren Körper gebracht, so muß das Potential $\psi = \psi_0 + \chi$ des wirklichen Feldes außer der *Laplace*schen Gleichung noch an der Oberfläche des Körpers der Gleichung

$$(118) \qquad \mu \frac{\partial \psi_i}{\partial n} = \frac{\partial \psi_a}{\partial n}$$

genügen, d. h. das Zusatzpotential χ genügt der Gleichung

$$(119) \qquad (\mu - 1) \frac{\partial \chi_i}{\partial n} + \left(\frac{\partial \chi_i}{\partial n} - \frac{\partial \chi_a}{\partial n} \right) = -(\mu - 1) \frac{\partial \psi_0}{\partial n}.$$

101b) Die bei magnetischen Messungen als Moment bezeichnete Größe ist in Wirklichkeit nicht das wahre, sondern das freie Moment (vgl. Nr. 27 und 28).

102) *W. Thomson,* Reprint Art. 632.

Bei willkürlich gegebenem ψ_0 läßt sich diese Gleichung in geschlossener Form bis jetzt nur in Spezialfällen integrieren. *Poisson*[98]) führt dies für die Kugel und Hohlkugel durch Entwicklung von ψ_0 nach Kugelfunktionen aus, *Somigliana*[103]) und gleichzeitig *Boggio*[104]) kommen ohne solche Entwicklungen aus, sie erhalten das induzierte Potential direkt durch bestimmte Integrale. *F. Neumann* löst das Problem für das Rotationsellipsoid[100]), *Kirchhoff*[101]) für unendlich lange Zylinder und den Kreisring; der Kreisring sowie das dreiachsige Ellipsoid sind von *Giuliani*[105]) behandelt; *C. Neumann*[106]) dehnt die Methode auf zwei Körper, speziell zwei Kugeln im Magnetfeld aus. *Boggio*[107]) nimmt das Zweikugelproblem auf und behandelt auch den Grenzfall, daß zwei Halbräume mit parallelen Begrenzungen einander gegenüberstehen.

Bei einem beliebig gestalteten Körper denke man sich χ nach Potenzen von $\mu - 1$ entwickelt, also

$$\chi = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\mu - 1)^{\nu} \chi^{(\nu)}, \tag{120}$$

so folgen durch Substitution von (120) in (119) die Rekursionsformeln

$$\begin{gathered} \frac{\partial \chi_a^{(1)}}{\partial n} - \frac{\partial \chi_i^{(1)}}{\partial n} = \frac{\partial \psi_0}{\partial n}, \\ \frac{\partial \chi_a^{(\nu+1)}}{\partial n} - \frac{\partial \chi_i^{(\nu+1)}}{\partial n} = \frac{\partial \chi_i^{(\nu)}}{\partial n}, \end{gathered} \tag{121}$$

welche die Lösung haben (vgl. Nr. 4 (14) und (15))

$$\begin{gathered} \chi^{(1)} = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \psi_0}{\partial n} \frac{d\sigma}{r}, \\ \chi^{(\nu+1)} = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \chi_i^{(\nu)}}{\partial n} \frac{d\sigma}{r}. \end{gathered} \tag{122}$$

Diese Methode der sukzessiven Induktionen stammt von *Beer*[108]) die Reihen von *C. Neumann*[109]), *L. Weber*[110]), *Riecke*[111]), *Wassmuth*[112])

---

103) *Somigliana*, Rend. del r. Ist. Lomb. (2) 36 (1903).

104) *T. Boggio*, ibid. (2) 37 (1904), p. 123; Nuovo Cim. (5) 11 (1906), p. 1

105) *G. Giuliani*, Nuovo Cim. (3) 11 (1882).

106) *C. Neumann*, Hydrodynamische Untersuchungen p. 282, Leipzig (1883 vgl. auch *R. A. Herman*, Quaterly J. of Math. 22 (1887), p. 204.

107) *T. Boggio*, Rend. del r. Ist. Lomb. (2) 37 (1904), p. 405.

108) *A. Beer*, Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik. Braunschweig 1865, p. 155.

109) *C. Neumann*, Untersuchungen über das log. und *Newton*sche Potential, Leipzig 1877.

110) *L. Weber*, Zur magnetischen Induktion, Kiel 1877; Arch. Math. Phys 61 (1877), p. 286.

Korn[112a]) sind Potenzreihen nach Potenzen von $\mu - 1$, $\frac{\mu - 1}{\mu}$ oder $\frac{\mu - 1}{\mu + 1}$. Anstatt dessen kann man auch ψ nach Potenzen von $\frac{1}{\mu}$ entwickeln, muß aber die Lösung für $\mu = \infty$, d. h. für den Fall, daß in ein gegebenes elektrostatisches Feld ein ungeladener Leiter gebracht wird, vorher gefunden haben[113]).

26. Energie und Kräfte. Die Energie drückt sich nach Nr. 6 (21) aus als

$$W = \tfrac{1}{2} \sum m\psi, \tag{21_1}$$

und dies wegen (110) und Ia' als

$$\int (\mathfrak{M}^e \mathfrak{H})\, dS.$$

Die Spannungen sind Analoga der elektrischen, sie ergeben Kräfte analog (94). Die magnetischen Drucke an der Grenze zweier Körper gehorchen den (95) entsprechenden Formeln. Auf Grund dieser Formeln hat *Quincke*[114]) Permeabilitäten von Flüssigkeiten und Gasen bestimmt, indem er den magnetischen Druck durch hydrostatischen Druck kompensiert hat.

Über die magnetischen Spannungen und die sogenannte Magnetostriktion findet sich Näheres in dem Art. von *F. Pockels* V 16.

27. Kräfte auf starre Körper. Wie in Nr. **19** ergibt sich durch Einführung der freien Mengen das *Coulomb*sche Gesetz. Die Arbeit bei einer unendlich kleinen Verschiebung eines Magneten zu Stellen höherer Feldstärke ist

$$\delta A = \int ((\mathfrak{M}^e + \mathfrak{M}') \cdot \delta \mathfrak{H}_0)\, dS.\text{[115])} \tag{123}$$

Ist $\mathfrak{H}_0$ im Magneten gleichförmig, so ist wegen (116) und (116')

$$\delta A = ((\mathfrak{m} + \mathfrak{m}') \cdot \delta \mathfrak{H}_0). \tag{123'}$$

(101), (101') und (102) gelten analog für den Magnetismus; man hat diese Formeln zur Bestimmung der Permeabilität benutzt[116]).

---

111) *E. Riecke,* Ann. Phys. Chem. (3) 13 (1881), p. 465; man beachte die Konvergenzfragen.

112) *A. Wassmuth,* Ann. Phys. Chem. (3) 51 (1894), p. 367.

112a) *A. Korn,* München Ber. 31 (1902), p. 435.

113) Vgl. *G. Kirchhoff,* Vorlesungen 3, p. 160.

114) *G. Quincke,* Ann. Phys. Chem. (3) 24 (1885), p. 347; *H. du Bois,* Ann. Phys. Chem. (3) 35, (1888), p. 137.

115) *E. Cohn,* Elm. Feld, p. 209.

116) *H. A. Rowland,* Americ. Journ. of science and arts (3) 9 (1873), p. 357; *H. A. Rowland* und *W. Jacques,* Journ. of science and arts (3) 18 (1879), p. 360;

28. Magnetisches Moment. Horizontalintensität. Kompaß. Gleichung (123) in Nr. 27 ist die Grundlage der *Gauß*'schen Methode[117]) zur Bestimmung magnetischer Momente und der Horizontalkomponente der erdmagnetischen Kraft. Da aber die in (123') vorkommenden freien Mengen nicht an der Materie haften, ist die Theorie nicht ganz streng. *Dorn*[118]) hat Korrektionen wegen der induzierten Momente angebracht.

Um das Feld eines symmetrisch um eine Achse magnetisierten Magneten (z. B. der Erde) außerhalb der Kugel, die ihn gerade umschließt, darzustellen, wählen wir seinen Mittelpunkt zum Ursprung eines Kugelkoordinatensystems, seine Achse zur Achse desselben. Ist R die Entfernung des Aufpunktes vom Ursprung, ϑ der Winkel, den R mit der Polarachse bildet, so ist, da ψ der *Laplace*schen Gleichung im Außenraum genügt,

$$(124) \qquad \psi = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n (\cos \vartheta) \frac{1}{R^{n+1}},$$

wo P_n die Kugelfunktion n^{ter} Ordnung erster Art bedeutet.

Da die magnetische Verteilung in Punkten, die bezüglich der Ebene $\vartheta = \pi/2$ spiegelbildlich liegen, bis aufs Vorzeichen dieselbe sein soll, so fallen die geraden Indizes in (124) fort, es bleibt

$$(124') \qquad \psi = \frac{1}{4\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{2\nu+1} P_{2\nu+1} (\cos \vartheta) \frac{1}{R^{2(\nu+1)}},$$

wo die C gegebene Konstanten sind.

Um zu sehen, inwieweit dieser Magnet durch zwei punktförmige magnetische Mengen $\pm m$ auf der Magnetachse im Abstande $\pm l$ vom Mittelpunkt ersetzt werden kann, berechnen wir auch das Potential dieser Anordnung. Es ergibt sich

$$(125) \qquad \psi = \frac{m}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{2m}{4\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{l^{2\nu+1}}{R^{2(\nu+1)}} P_{2\nu+1} (\cos \vartheta).$$

Die beiden ersten Glieder von (125) sind immer mit denen von (124') durch geeignete Wahl von m und l zur Deckung zu bringen, wenn man nämlich setzt

---

G. Wiedemann, Ann. Phys. Chem. (2) 126 (1865), p. 8; *v. Ettingshausen*, Ann. Phys. Chem. (3) 17 (1882), p. 304; Wien Ber. (2) 96² (1887), p. 777; *Eaton*, Ann. Phys. Chem. (3) 15 (1882), p. 225; *Schuhmeister*, Wien Ber. (2) 83² (1881), p. 46; *S. Henrichsen*, Ann. Phys. Chem. (3) 34 (1888), p. 180.

117) *C. F. Gauß*, Werke 5, Göttingen 1877, p. 79; Ostwalds Klassiker Nr. 53.

118) *Dorn*, Ann. Phys. Chem. (3) 35 (1888), p. 270.

$$2ml = C_1, \quad 2ml^3 = C_3.$$

Nur wenn man sich auf die beiden ersten Glieder als Näherung beschränkt, sind Pole von bestimmter Lage und Stärke für den Magneten anzugeben. $C_1 = \mathfrak{m}$ ist das (freie) magnetische Moment des Magneten[118a]).

Gauß nennt einen Punkt auf der Linie $\vartheta = 0$ oder $\vartheta = \pi$ in der ersten Hauptlage befindlich, in der Ebene $\vartheta = \pi/2$ in der zweiten Hauptlage befindlich.

Bildet der um eine vertikale Achse drehbare Magnet mit horizontaler Magnetachse den Winkel φ mit der Horizontalkomponente $\mathfrak{H}_h$ des gleichförmigen Feldes $\mathfrak{H}$, so ist nach (123′) das Drehmoment

$$\mathfrak{N} = -|\mathfrak{m}| \cdot |\mathfrak{H}_h| \cdot \sin\varphi. \tag{126}$$

Die Direktionskraft $\frac{\mathfrak{N}}{\varphi}$ und damit $|\mathfrak{m}| \cdot |\mathfrak{H}_h|$ kann man durch Beobachtung der Schwingungsdauer des Magneten um seine Gleichgewichtslage bestimmen.

Durch die Ablenkungen eines kleinen Hilfsmagneten ergibt sich $\frac{|\mathfrak{m}|}{|\mathfrak{H}_h|}$, so daß man $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{H}_h$ einzeln kennt[119]).

Bei der Behandlung der Theorie des Kompasses ist es notwendig, den von der Erdkraft in den Eisenteilen des Schiffes induzierten Magnetismus sowie den permanenten Magnetismus der Eisenmassen zu berücksichtigen. Nimmt man die Permeabilität des Eisens bei den schwachen in Betracht kommenden Feldstärken des Erdfeldes als konstant an, so überlagern sich die von den einzelnen Komponenten des Erdfeldes durch Induktion erzeugten Felder einfach. In der Theorie des Schiffsmagnetismus wählt man gewöhnlich die x-Achse in Richtung der Längsachse des Schiffes (positiv nach vorn), die y-Achse nach Steuerbord (rechte Seite des Schiffes), die z-Achse kielwärts. Dann ist an der Stelle des Kompasses

$$\begin{aligned} X' &= X + aX + bY + cZ + P, \\ Y' &= Y + dX + eY + fZ + Q, \\ Z' &= Z + gX + hY + kZ + R. \end{aligned} \tag{127}$$

X', Y', Z' sind die Komponenten der auf den Kompaß tatsächlich wirkenden Feldstärke, X, Y, Z die der ungestörten Stärke des Erdfeldes, wie es bei Abwesenheit des Schiffes vorhanden wäre; P, Q, R

118a) Vgl. *E. Riecke,* Ann. Phys. Chem. (2) 149 (1873), p. 62; (3) 8 (1879), p. 299.

119) Ausführliches über die Theorie des Erdmagnetismus findet man bei *E. Mascart,* Traité de magnétisme terrestre, Paris 1900.

sind die durch den permanenten Magnetismus hervorgerufenen Feldstärken. Die Größen $a, b, \ldots k$ sind in jedem Schiffe Konstanten, die durch die Verteilung und durch die physikalische Beschaffenheit des weichen Eisens bestimmt sind. (127) ist die von *Poisson*[120]) aufgestellte Grundgleichung der Kompaßtheorie, aus ihr folgen alle für die Nautik wichtigen Beziehungen für die Kompaßabweichungen[121]).

Führt man in (127) $\mathfrak{H}'$, die Horizontalintensität der tatsächlich vorhandenen Feldstärke, ein, nennt man ζ' resp. ζ den Kompaßkurs resp. magnetischen Kurs des Schiffes, d. h. die östliche Abweichung der Fahrtrichtung vom Norden der Kompaßrose resp. vom magnetischen Meridian und setzt man

$$\zeta - \zeta' = \delta,$$

so daß δ die östliche Deviation der Nadel aus dem Meridian bedeutet, so gilt, wenn die Koeffizienten a bis k unendlich klein sind,

$$\delta = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \sin \zeta' + \mathfrak{C} \cos \zeta' + \mathfrak{D} \sin 2\zeta' + \mathfrak{E} \cos 2\zeta'. \tag{128}$$

$\mathfrak{B} \sin \zeta'$ und $\mathfrak{C} \cos \zeta'$ wechseln, wenn der Kompaßkurs ζ' zwischen 0 und 2π variiert, je einmal das Zeichen, deshalb nennt man diese Glieder die semizirkulare Abweichung; $\mathfrak{D} \sin 2\zeta'$ und $\mathfrak{E} \cos 2\zeta'$ wechseln dagegen zweimal das Zeichen, sie heißen die quadrantale Abweichung.

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ sind auf einem Schiffe Konstanten, während $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ mit dem Ort des Schiffes auf der Erde variieren, da sie Funktionen der magnetischen Inklination und Horizontalintensität sind.

P, Q und R werden durch permanente Magnete, a bis k durch weiche Eisenstäbe in der Nähe des Kompasses kompensiert[122]).

29. Magnetische Doppelschichten[123]). Für die Theorie der elektrischen Ströme ist eine besondere Art von Magneten wichtig: eine sehr dünne Schale, deren Flächenelemente $d\sigma$ heißen, von der Dicke h und der Permeabilität μ, sei normal zur Schale magnetisiert. Die Magnetisierung sei $\mathfrak{M}^e$

---

120) *Poisson,* Mém. de l'inst. 5 (1824), p. 533; 16 (1838), p. 479.

121) Eingehend behandelt von *F. J. Evans* und *A. Smith,* Admiralty manual for the deviations of the compass (7. Aufl.), London 1901; s. auch *C. H. Wind,* Magneetkracht en electriciteit, Leiden 1903, p. 381—396 und Anm. 119; *E. Rottok,* Die Deviationstheorie und ihre Anwendung in der Praxis (2. Aufl.), Berlin 1903, p. 43; Der Kompaß an Bord, herausgeg. v. d. *deutschen Seewarte* (2. Aufl.), Hamburg 1906; Lehrbuch der Navigation, herausgeg. vom *Reichsmarineamt* (2. Aufl.) 1, Berlin 1906, p. 53.

122) Wegen der Lage der Eisenstäbe vgl. die Rechnungen bei *Maxwell,* Treatise 2, Art. 441 und die Abbildungen bei *Wind* (Anm. 121).

123) Vgl. Potentialtheorie Art. *Burkhardt-Meyer,* II A 7 b, Nr. 6.

(129) $$\Phi = \frac{|\mathfrak{M}^e|\,h}{\mu}$$

heißt die Stärke der Schale. Im folgenden nehmen wir den für die Theorie der elektrischen Ströme einzig interessierenden Fall an, daß Φ für die ganze Fläche konstant ist.

Für die wechselseitige Energie der Doppelschicht (Stärke Φ_1, Fläche σ_1) und eines beliebigen Feldes (Stärke $\mathfrak{H}_2$) folgt

(130) $$U = -\Phi_1 \int \mathfrak{B}'_{2n} d\sigma_1 .$$

$\mathfrak{B}'$ ist durch (111) definiert.

Dieser Ausdruck ist nur von der Randkurve abhängig. Führt man die freie Magnetisierung $\mathfrak{M}^e/\mu$ der Doppelschicht ein, so folgt wegen (115') und (117)

(131) $$\psi = \frac{\Phi}{4\pi} \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = \Phi \frac{\alpha}{4\pi},$$

wenn α der körperliche Winkel ist, unter dem die Doppelschicht vom Aufpunkte aus erscheint.

Aus (131) ergibt sich der konstante Sprung Φ des Potentials beim Durchschreiten der Doppelschicht.

Hat man zwei Doppelschichten Φ_1 und Φ_2, so ist

(132) $$U = -\Phi_1 \Phi_2 q_{12} = -\Phi_1 \Phi_2 q_{21},$$

wo q_{12} die Anzahl Erregungslinien sind, die die erste Doppelschicht, wenn $\Phi_1 = 1$ ist, durch σ_2 schickt. Eine für die Theorie der Ströme (wechselseitiger Induktionskoeffizient) wichtige Formel von *F. Neumann* ist

(133) $$q_{12} = q_{21} = \frac{\mu}{4\pi} \int\limits_{s_1}\int\limits_{s_2} \frac{(d\mathfrak{s}_1 \cdot d\mathfrak{s}_2)}{r},$$

wo s_1 und s_2 die Randkurven der Doppelschichten sind[124]).

30. Kristalle. Die Anfänge einer theoretischen Behandlung rühren von *Poisson*[125]) her; als dann *Plücker*[126]) die experimentelle Grundlage geschaffen hatte, arbeitete *W. Thomson*[127]) eine Theorie aus, die der in Nr. 21 gegebenen entspricht.

---

124) Vgl. Fernwirkung Art. *R. Reiff* und *A. Sommerfeld*, V 12, Nr. 5.

125) *Poisson*, Mém. de l'acad. 5 (1821), p. 247, 488; 6 (1823), p. 441; Ann. Phys. Chem. (2) 1 (1824), p. 301; 3 (1825), p. 429.

126) *J. Plücker*, Ann. Phys. Chem. (2) 72 (1847), p. 315.

127) *W. Thomson*, Phil. Mag. (4) 1 (1851), p. 177; Reprint Art. 604. Man vgl. auch *A. Beer*, Einleitung in die Elektrostatik, Braunschweig 1865, p. 221; *P. Duhem*, Anm. 101[a]); *W. Voigt*, Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Krystalle, Leipzig 1898.

Nach der (109) entsprechenden Formel hat *Stenger*[128]) die Differenz der Permeabilitäten von Kristallen in verschiedenen Richtungen bestimmt.

Sehr viel komplizierter wird das Problem, wenn die Permeabilität μ nicht mehr konstant, sondern von der Feldstärke abhängig ist, in den sogenannten ferromagnetischen Kristallen. Für die induzierte Magnetisierung macht *Voigt*[129]) den Ansatz

$$(134)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{M}_x' &= \mathfrak{H}_x[\mu_1 - 1 + f_1], \\ \mathfrak{M}_y' &= \mathfrak{H}_y[\mu_2 - 1 + f_2], \\ \mathfrak{M}_z' &= \mathfrak{H}_z[\mu_3 - 1 + f_3], \end{aligned}$$

wo die f Funktionen der Komponenten von $\mathfrak{H}$ sind und zwar bei zentrisch-symmetrischen Kristallen gerade Funktionen; von diesen nehmen wir an, daß sie sich als Reihen darstellen lassen, die sich z. B. für das reguläre System wesentlich vereinfachen.

Es wird dann nämlich

$$(134')\qquad \begin{aligned} \mathfrak{M}_x' &= \mathfrak{H}_x(\mu - 1 - k_1\mathfrak{H}_x^2 - k_2\mathfrak{H}^2 - k_3\mathfrak{H}_x^4 - k_4\mathfrak{H}_x^2\mathfrak{H}^2 - k_5\mathfrak{H}^4 - \cdots), \\ \mathfrak{M}_y' &= \mathfrak{H}_y(\mu - 1 - k_1\mathfrak{H}_y^2 - k_2\mathfrak{H}^2 - k_3\mathfrak{H}_y^4 - k_4\mathfrak{H}_y^2\mathfrak{H}^2 - k_5\mathfrak{H}^4 - \cdots), \\ \mathfrak{M}_z' &= \mathfrak{H}_z(\mu - 1 - k_1\mathfrak{H}_z^2 - k_2\mathfrak{H}^2 - k_3\mathfrak{H}_z^4 - k_4\mathfrak{H}_z^2\mathfrak{H}^2 - k_5\mathfrak{H}^4 - \cdots). \end{aligned}$$

Bei Berücksichtigung höherer Glieder findet also keine Isotropie mehr statt.

Auf Grund dieser Theorie, die *Voigt* auch auf nicht zentrisch-symmetrische Kristalle mit drei einander gleichwertigen aufeinander senkrechten zweizähligen Achsen erweitert, wird die Influenz in Ellipsoiden berechnet zur Diskussion der Versuche von *Weiß*[129a]).

31. Ferromagnetische Körper. Bei ferromagnetischen Körpern ist μ Funktion von $|\mathfrak{H}|$. Von diesem Ansatz aus hat *Cohn*[130]) die Theorie entwickelt. Aus den Grundgleichungen der *Maxwell*'schen Theorie folgt, daß

$$(135)\qquad W_m = \int dS \int_0^{\mu\mathfrak{H}} (\mathfrak{H} \cdot d\mu\mathfrak{H}) = \int dS \left\{ \mu\mathfrak{H}^2 - \int_0^{\mathfrak{H}} (\mu\mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{H}) \right\}.$$

128) *F. Stenger*, Ann. Phys. Chem. (3) 20 (1883), p. 304; 35 (1888), p. 331.

129) *W. Voigt*, Gött. Nachr. 1900, p. 331; 1903, p. 17; Phys. Zeitschr. 4 (1903), p. 136; siehe auch *S. Sano*, Phys. Zeitschr. 4 (1903), p. 8; *Wallerant*, Paris C. R. 133 (1901), p. 630.

129a) *P. Weiß*, Paris C. R. 138 (1904), p. 35; 140 (1905), p. 1532 und p. 1587; J. de phys. (3) 5 (1895), p. 435; (4) 3 (1904), p. 194; 4 (1905), p. 469). In diesen Arbeiten finden sich auch thermodynamische Betrachtungen über die Magnetisierung von Kristallen.

130) E. *Cohn*, Elm. Feld, p. 510.

Für das magnetostatische Feld bleiben $\mathrm{I}^{a\prime}$ und II^{a} bestehen. Da aber $\mu = f(|\mathfrak{H}|)$ ist, so sind die Gleichungen nicht mehr linear, die Superposition zweier Felder findet nicht mehr statt. Aus (135) folgt für die Spannungen

$$(136)\qquad X_x = \mu\mathfrak{H}_x^2 - \int_0^{\mathfrak{H}}(\mu\mathfrak{H}\cdot d\mathfrak{H}),\qquad X_y = Y_x = \mu\mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_y,$$

$$Y_y = \mu\mathfrak{H}_y^2 - \int_0^{\mathfrak{H}}(\mu\mathfrak{H}\cdot d\mathfrak{H}),\qquad Y_z = Z_y = \mu\mathfrak{H}_y\mathfrak{H}_z,$$

$$Z_z = \mu\mathfrak{H}_z^2 - \int_0^{\mathfrak{H}}(\mu\mathfrak{H}\cdot d\mathfrak{H}),\qquad Z_x = X_z = \mu\mathfrak{H}_z\mathfrak{H}_x,$$

d. h. auf eine zu $\mathfrak{H}$ senkrechte Fläche wirkt der normale Zug $\mu\mathfrak{H}^2 - \int_0^{\mathfrak{H}}(\mu\mathfrak{H}\cdot d\mathfrak{H}) = \int_0^{\mu\mathfrak{H}}(\mathfrak{H}\cdot d\mu\mathfrak{H})$, und auf jede zu $\mathfrak{H}$ parallele Fläche ein normaler Druck $\int_0^{\mathfrak{H}}(\mu\mathfrak{H}\cdot d\mathfrak{H})$. Die Hauptspannungen sind also nicht mehr numerisch gleich.

Die Kraft auf die Volumeinheit ist

$$(94_1)\qquad \mathfrak{f} = \varrho_m\mathfrak{H} - \int_0^{\mathfrak{H}}(\mathfrak{H}\,d\mathfrak{H})\,\mathrm{grad}\,\mu.$$

Hier sind die Differentiationen von μ bei örtlich konstant gedachtem $\mathfrak{H}$ vorzunehmen.

32. Hysterese. Ist die Induktion $\mathfrak{B}$ nicht durch den augenblicklichen Wert von $\mathfrak{H}$ gegeben, sondern sind frühere Werte von $\mathfrak{H}$ mit maßgebend, so wird, wenn $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ einen Zyklus von Werten angenommen haben, die Energiemenge[131])

$$(137)\qquad \left(\int\right)(\mathfrak{H}\cdot d\mathfrak{B}) = -\left(\int\right)(\mathfrak{B}\cdot d\mathfrak{H})$$

pro Volumeneinheit als Hysteresewärme abgegeben. Hier bedeutet $\left(\int\right)$, wie in der Thermodynamik üblich, das über den durchlaufenen Zyklus erstreckte Integral. Diese Größe ist immer positiv, da wachsenden $\mathfrak{H}$ kleinere $\mathfrak{B}$ entsprechen als abnehmenden. Eingehend können wir die Hysterese nicht behandeln, einerseits da sie aus dem Rahmen der Statik, dann aber auch, weil sie aus dem der *Maxwell*'schen Theorie herausfällt. (137) ist die einzige allgemein gültige Beziehung.

131) *Warburg,* Ann. Phys. Chem. (3) 13 (1881), p. 140.

Man unterscheidet statische Hysterese, Wechselstromhysterese und Rotationshysterese; bei ersterer ändert sich die Feldstärke nur sehr langsam, bei den beiden letzteren im allgemeinen schnell, und zwar bleibt bei der Wechselstromhysterese die Feldrichtung konstant, es variiert nur die Amplitude, während bei der rotierenden Hysterese die Stärke des Feldes konstant bleibt und nur die Richtung sich ändert. Literaturangaben und Kritisches findet man bei *M. Wien*[132]), ein Referat über den Stand der Frage bei *Warburg*[133]).

Weitere Ausführungen über Hysterese bringt der Art. V 17 von *H. du Bois.*

132) *M. Wien,* Ann. Phys. Chem. (3) 66 (1898), p. 859.

133) *E. Warburg,* Rapports Congrès internat. de phys. 2, (Paris 1900), p. 509 und Phys. Zeitschr. 2 (1901), p. 367.

(Abgeschlossen im Oktober 1906.)

V 16. BEZIEHUNGEN ZWISCHEN ELEKTROSTATISCHEN UND MAGNETOSTATISCHEN ZUSTANDSÄNDERUNGEN EINERSEITS UND ELASTISCHEN UND THERMISCHEN ANDERERSEITS.

VON

F. POCKELS

IN HEIDELBERG.

Inhaltsübersicht.

1. Maxwellsches Spannungssystem im Dielektrikum.
2. Bedeutung der Maxwellschen Spannungen für die Elektrostriktion.
3. Spannungen, welche durch den Einfluß von Deformationen auf die dielektrischen Konstanten bedingt werden.
4. Elektrostriktion von Flüssigkeiten.
5. Elektrostriktion isotroper fester Körper. Behandlung nach den Methoden der Elastizitätstheorie.
6. Fortsetzung. Energetische Behandlung.
7. Magnetostriktion.
8. Piëzoelektrizität und Elektrostriktion azentrischer Kristalle. Allgemeiner Ansatz.
9. Spezialisierung für die einzelnen Kristallgruppen.
10. Anwendung auf besondere Fälle.
11. Polare Pyroëlektrizität und reziproker Wärmeeffekt.
12. Molekulartheorien der Pyro- und Piëzoelektrizität.
13. Zentrische Pyro- und Piëzoelektrizität.
14. Pyro- und Piëzomagnetismus.

Literatur.

W. Voigt, Kompendium der theoretischen Physik (Leipzig 1896), 2. Bd., 4. Teil, §§ 11—15 u. 20.

W. Voigt, Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Krystalle (Leipzig 1898), §§ 3 u. 6 und Zusätze V—VII u. IX.

Winkelmanns Handbuch der Physik, 2. Aufl. (1905), Bd. 4, p. 162—168 (Elektrostriktion von *L. Graetz*) u. p. 766—793 (Pyro- u. Piëzoelektrizität von *F. Pockels*); Bd. 5, p. 301—338 (Beziehungen des Magnetismus zur Mechanik von *F. Auerbach*).

G. Wiedemann, Die Lehre von der Elektrizität, 2. Aufl. (Leipzig 1894), Bd. 2 II Kap. 3, III Kap. 3, Bd. 3 B Kap. 7.

Th. Liebisch, Physikalische Krystallographie (Leipzig 1891), Kap. 7 und 10.

F. Pockels, Über die durch dielektrische und magnetische Polarisation hervorgerufenen Volum- und Formänderungen (Elektrostriktion u. Magnetostriktion), Arch. Math. Phys. (2) 12 (1893), p. 57—95. (Historisch-kritische Übersicht.)

Wichtigste grössere Monographien über Teilgebiete:

P. Sacerdote, Recherches théoriques sur les déformations électriques des diélectriques solides isotropes. Paris, Thèses Nr. 1012. 1899. [Zitiert als *Sacerdote,* Thèse.]

W. Voigt, Allgemeine Theorie der piëzo- und pyroëlektrischen Erscheinungen an Kristallen, Göttingen, Abh. Ges. d. Wiss. 36, 1890. [*Voigt,* Allg. Theorie.]

---

1. Maxwellsches Spannungssystem im Dielektrikum. Der zuerst von *Faraday* ausgesprochenen Vorstellung, daß die scheinbaren Fernwirkungen zwischen elektrisch geladenen Körpern auf einen Spannungszustand im dielektrischen Zwischenmedium zurückzuführen seien, hat *Maxwell*[1]) einen exakten mathematischen Ausdruck gegeben, indem er zeigte, daß sich in der Tat ein Spannungssystem angeben läßt, welches die dem Coulombschen Gesetze entsprechenden ponderomotorischen Kräfte liefert und zugleich der Bedingung genügt, daß sich die Spannungen an jedem von elektrischer Ladung freien Volumelement eines homogenen Dielektrikums das Gleichgewicht halten, — einer Bedingung, ohne welche ein solcher Spannungszustand in einem flüssigen oder gasförmigen Medium gar nicht denkbar wäre. Jenes Spannungssystem besteht in einem *isotropen* Medium aus einem Zug parallel den elektrischen Kraftlinien und einem gleich grossen Druck in allen zu letzteren senkrechten Richtungen; das Maß für diesen Zug bezw. Druck ist $\frac{1}{2}\varepsilon\mathfrak{E}^2$, wenn ε die Dielektrizitätskonstante, $\mathfrak{E}$ die elektrische Feldstärke in absolutem elektrostatischem Maße bezeichnet. (Vgl. *H. A. Lorentz,* Maxwellsche Theorie, V 13, Nr. 22.) Ein ganz analoges Spannungssystem ist den ponderomotorischen Kräften in einem *magnetischen* Felde äquivalent, soweit dieses nur isotrope, nicht ferromagnetische Körper ohne permanenten Magnetismus enthält.

Das allgemeinere Spannungssystem, welches in einem *kristallinischen* Medium (und mit Berücksichtigung der etwaigen Änderung der Dielektrizitätskonstante bezw. magnetischen Permeabilität durch Deformation des Mediums) anzunehmen ist, hat zuerst *H. Hertz*[2]) (für

1) *Maxwell,* Treatise 1, § 105—111.

2) *H. Hertz,* Ann. Phys. Chem. 41 (1890), p. 389.

den Fall des *magnetischen* Feldes) aufgestellt; seine Ableitung ist in etwas modifizierter Weise in dem genannten Artikel *Lorentz* V 13, Nr. 23 wiedergegeben. Ein anderer Weg, den zuerst *Helmholtz*[3]), dann *Kirchhoff*[4]) und *Lorberg*[5]) zur Berechnung der Spannungen in isotropen Körpern mit durch Deformationen veränderlicher Dielektrizitätskonstante eingeschlagen haben, führt in folgender Weise zu dem Spannungssystem in einem kristallinischen Dielektrikum.

Man berechne die durch beliebige, aber stetig verteilte virtuelle Verrückungen $\delta\mathfrak{v}_x$, $\delta\mathfrak{v}_y$, $\delta\mathfrak{v}_z$ der materiellen Punkte des Dielektrikums erzeugte Variation der elektrischen Energie. Die letztere kann man, indem man zunächst alle etwa vorhandenen Unstetigkeitsflächen des Mediums durch stetige Übergangsschichten und alle flächenhaften Ladungen durch dünne Schichten mit stetig variierender Raumdichte ϱ ersetzt denkt, durch ein Raumintegral über den ganzen unendlichen Raum darstellen. Eine solche Form ist (vgl. Art. *Gans* über Elektrostatik und Magnetostatik V 15, Nr. 6) $\frac{1}{2}\int\varrho\varphi\,dS$, eine andere $\frac{1}{2}\int(\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{D})\,dS$, wo (gemäß den im Art. *Lorentz* V 13 eingeführten Bezeichnungen) φ das elektrische Potenial, $\mathfrak{D} = (\varepsilon)\mathfrak{E}$ die elektrische Erregung ist. Für den vorliegenden Zweck ist es nun bequemer, nach dem Vorgange von *Helmholtz* (l. c.) den durch Kombination der beiden vorstehenden gebildeten Ausdruck

$$\int W_e'\,dS = \int\{\varrho\varphi - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{D})\}\,dS \tag{1}$$

zu benutzen, weil derselbe infolge der für φ geltenden Differentialgleichung

$$\operatorname{div}(\varepsilon)\operatorname{grad}\varphi = -\varrho$$

die Eigenschaft besitzt, bei einer beliebigen Variation *des Potentials allein* ungeändert zu bleiben, wenn man von einem elektrostatischen Gleichgewichtszustande ausgeht. Man kann daher ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit bei der Berechnung von $\delta W_e'$ das Potential φ von der Variation ausschließen, oder, mit anderen Worten, das Feld bei der Vornahme der virtuellen Verrückungen $\delta\mathfrak{v}$ als ungeändert bleibend ansehen. Die Variation von W_e' wird sich demgemäß aus drei Teilen zusammensetzen, die herrühren: 1) von der Veränderung der elektrischen Raumdichte, die ge-

3) *Helmholtz*, Ann. Phys. Chem. 13 (1881), p. 385; Berlin Sitzungsber. 1881, p. 191.

4) *Kirchhoff*, Berlin Sitzungsber. 1884, p. 137; Ann. Phys. Chem. 24 (1885), p. 52.

5) *H. Lorberg*, Ann. Phys. Chem. 21 (1884), p. 300.

geben ist durch $\delta\varrho = -\operatorname{div}\varrho\,\delta\mathfrak{v}$; 2) davon, daß an eine bestimmte Stelle x, y, z des Raumes und somit des als unverändert angenommenen Feldes ein anderes Massenelement gelangt, nämlich dasjenige, welches sich vorher am Orte $x - \delta\mathfrak{v}_x$, $y - \delta\mathfrak{v}_y$, $z - \delta\mathfrak{v}_z$ befand; 3) von den Veränderungen, welche die dielektrischen Konstanten ε_{hk} (vgl. Art. *Lorentz* V 13, Nr. 8 und 22b) infolge der Verrückungen $\delta\mathfrak{v}_x$, $\delta\mathfrak{v}_y$, $\delta\mathfrak{v}_z$ erleiden. Diese Änderungen $\delta\varepsilon_{hk}$ sind selbst von zweierlei Art. Erstens ändern sich nämlich die ε_{hk} durch die *Drehung* $\delta\mathfrak{r} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}(\delta\mathfrak{v})$, welche das Massenelement infolge des Verrückungssystems erfährt, weil sie abhängig sind von der Orientierung des Koordinatensystems gegen die elektrischen Symmetrieachsen des Dielektrikums, d. h. gegen diejenigen Richtungen, in bezug auf welche sich die Koeffizienten ε_{hk} der symmetrischen linearen Vektorfunktion $\mathfrak{D} = (\varepsilon)\mathfrak{E}$ auf ε_{11}, ε_{22}, ε_{33} reduzieren (vgl. Art. *Abraham*: Geometrische Grundbegriffe IV 14 Nr. 22); zweitens werden sie im allgemeinen auch durch die *Deformation* des Massenelements, welche mit dem Verrückungssystem verbunden ist, geändert werden. Diesen etwaigen Einfluss einer Deformation auf die Dielektrizitätskonstanten wollen wir jedoch vorerst von der Betrachtung *ausschließen*, und die Anteile der gesamten Spannungen, welche dadurch zunächst vernachlässigt werden, nachträglich (in Nr. **3**) gesondert untersuchen. Dann sind die $\delta\varepsilon_{hk}$ also lediglich die durch unendlich kleine *Drehungen* $\delta\mathfrak{r}_x$, $\delta\mathfrak{r}_y$, $\delta\mathfrak{r}_z$ des Massenelements gegen die festen Koordinatenachsen bedingten Änderungen der ε_{hk}, für welche man aus deren Transformationsformeln (cf. Art. *Abraham* IV 14, p. 42, 28) leicht findet:

$$\delta\varepsilon_{11} = 2(\varepsilon_{13}\delta\mathfrak{r}_y - \varepsilon_{12}\delta\mathfrak{r}_z),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\delta\varepsilon_{23} = (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})\delta\mathfrak{r}_x - \varepsilon_{12}\delta\mathfrak{r}_y + \varepsilon_{13}\delta\mathfrak{r}_z,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Dabei bestimmen sich die Drehungskomponenten aus den Verrückungen gemäß den Formeln (vgl. Art. *Abraham* IV 14, Nr. **16**):

$$\delta\mathfrak{r}_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta\mathfrak{v}_z}{\partial y} - \frac{\partial\delta\mathfrak{v}_y}{\partial z}\right), \quad \delta\mathfrak{r}_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta\mathfrak{v}_x}{\partial z} - \frac{\partial\delta\mathfrak{v}_z}{\delta x}\right),$$
$$\delta\mathfrak{r}_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta\mathfrak{v}_y}{\partial x} - \frac{\partial\delta\mathfrak{v}_x}{\partial y}\right).$$

Man erhält nun durch Zusammenfassung der genannten drei Variationen zunächst:

$$(2)\quad \begin{aligned}\delta\int W_e' dS = \int \{ &-\varphi\operatorname{div}(\varrho\,\delta\mathfrak{v}) + \tfrac{1}{2}(\operatorname{grad}(\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{D})_{\varphi=\text{const}}\cdot\delta\mathfrak{v}) \\ &- [\mathfrak{E}_x^2(\varepsilon_{13}\delta\mathfrak{r}_y - \varepsilon_{12}\delta\mathfrak{r}_z) + \cdots \\ &+ \mathfrak{E}_y\mathfrak{E}_z((\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})\delta\mathfrak{r}_x - \varepsilon_{12}\delta\mathfrak{r}_y + \varepsilon_{13}\delta\mathfrak{r}_z) + \cdots]\}\,dS,\end{aligned}$$

wo der Index $\varphi = \text{const.}$ bedeutet, daß sich die Differentiation nur auf die ε_{hk} erstrecken soll. Indem man nun die Glieder, welche Differentialquotienten der Verrückungen als Faktoren enthalten, durch partielle Integration umformt, kann man die rechte Seite auf die Form $-\int \{\mathfrak{F}_x \delta \mathfrak{v}_x + \mathfrak{F}_y \delta \mathfrak{v}_y + \mathfrak{F}_z \delta \mathfrak{v}_z\} dS$ bringen, wobei sich ergibt:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{F}_x = \varrho \mathfrak{E}_x - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{D})_{\varphi = \text{const.}} \\ + \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_x - \mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_y) - \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_z - \mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_x)\right\}. \end{aligned}$$

Nach dem Energieprinzip und dem Prinzip der virtuellen Verrückungen sind dann $\mathfrak{F}_x$, $\mathfrak{F}_y$, $\mathfrak{F}_z$ die Komponenten der auf die Volumeinheit des Dielektrikums wirkenden Kraft. Ersetzt man hierin noch ϱ durch div $\mathfrak{D}$ (gemäß Gl. VI′ in V 13, Nr. **11**), so kann man nach einfacher Umformung (wobei die Gleichung rot $\mathfrak{E} = 0$ zu benutzen ist) schreiben

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x - \frac{1}{2}(\mathfrak{E},\mathfrak{D})\right) \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_x + \mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_y) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_z + \mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_x), \end{aligned}$$

und die Komponenten der auf die Volumeinheit des Dielektrikums wirkenden ponderomotorischen Kraft sind somit in der Form gewonnen:

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{F}_x &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \\ \mathfrak{F}_y &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}, \\ \mathfrak{F}_z &= \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z}, \end{aligned}\right.$$

wobei gilt

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} A_x &= \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x - \mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_y - \mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_z), \\ B_y &= \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_y - \mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_z - \mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x), \\ C_z &= \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_z - \mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x - \mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_y), \\ B_z &= C_y = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_z + \mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_y), \\ C_x &= A_z = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_x + \mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_z), \\ A_y &= B_x = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_y + \mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_x). \end{aligned}\right.$$

Diese Darstellung gestattet aber die Deutung, daß die resultierende ponderomotorische Kraft von einem *Spannungszustand* des Dielektrikums herrühre, dessen 6 Komponenten — in der nach

Kirchhoff üblichen Weise bezeichnet[6]) (vgl. IV 14, Nr. 19) — die vorstehenden Größen $A_x, \ldots B_z, \ldots$ sind, welche nur von dem Felde und den dielektrischen Konstanten des Mediums an der betrachteten Stelle abhängen, wie es der Vorstellung der Feldwirkung entspricht. — Für isotrope Medien, wo $\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$ wird, gehen obige Ausdrücke über in

$$(5') \qquad A_x = \frac{\varepsilon}{2}(\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2), \ldots, \qquad B_z = \varepsilon \mathfrak{E}_y \mathfrak{E}_z, \ldots;$$

das sind aber (wie man sofort erkennt, wenn man eine Koordinatenachse parallel der Feldrichtung legt) in der Tat die Komponenten eines Zuges $\frac{\varepsilon}{2}\mathfrak{E}^2$ parallel den Kraftlinien und eines gleichgroßen Druckes senkrecht zu denselben, also des für diesen Fall von *Maxwell* abgeleiteten Spannungssystems[7]). Die Gleichung (3) reduziert sich hier auf

$$(3') \qquad \mathfrak{F} = \varrho \mathfrak{E} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}^2 \operatorname{grad} \varepsilon,$$

woraus ersichtlich ist, daß auf das *Innere* eines *homogenen* isotropen Dielektrikums, sofern es keine wahre Ladung trägt, *keine* ponderomotorische Kraft wirkt.

Es möge noch hervorgehoben werden, daß die vorstehende vollständige Zurückführung der ponderomotorischen Kräfte auf ein System von Spannungen keineswegs *notwendig* ist, um die Erscheinungen der *Elektrostriktion*, d. h. der Deformation dielektrischer Körper im elektrischen Felde, zu erklären, und daß also auch nicht aus diesen Erscheinungen auf die Existenz der Maxwellschen Spannungen geschlossen werden kann. Nach der Fernewirkungstheorie würden die ponderomotorischen Kräfte (3) zum einen Teil herrühren von den nach dem *Coulomb*schen Gesetz auf die wahren und die influenzierten oder scheinbaren elektrischen Ladungen ausgeübten Fernewirkungen, zum anderen Teil aber ebenfalls von Spannungen, die jedoch *nur im ponderabeln Dielek-*

6) Wir weichen hier, um mit der Lorentzschen Darstellung in V 13 Nr. 23 und V 15 Nr. 39 in Übereinstimmung zu bleiben, von der Kirchhoffschen Bezeichnung allerdings hinsichtlich des *Vorzeichens* ab, indem wir einen *Zug*, nicht einen Druck, positiv rechnen.

7) Für den allgemeinen Fall, daß die Erregung nicht in die Feldrichtung fällt, hat *Maxwell* ein Spannungssystem angegeben (Treatise 2, § 641, 642), welches von dem obigen darin abweicht, daß nicht $B_z = C_y$, $C_x = A_z$, $A_y = B_x$ ist. Diese Abweichung kommt daher, daß *Maxwell* diejenigen Anteile der Spannungen nicht berücksichtigt hat, welche infolge des Zusammenhanges des Mediums aus den auf die Volumelemente ausgeübten Drehungsmomenten $[\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{E}]\, dS$ resultieren. (Vgl. auch V 13, Nr. 23, S. 110.)

trikum vorhanden wären[8]). Diese letzteren Spannungen werden aus den unter (5) angegebenen erhalten, indem man von denselben diejenigen Spannungen subtrahiert, welche nach der Feldwirkungstheorie in dem gleichen Felde im freien Äther anzunehmen wären und aus den Ausdrücken (5) durch Gleichsetzung von $\mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{E}$ hervorgehen. Speziell in isotropen Medien sind also die auch nach der Fernewirkungstheorie im ponderabelen Dielektrikum wirkenden Spannungen gegeben durch

$$(6)\quad A_x' = \frac{\varepsilon - 1}{2}(\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2),\quad B_z' = C_y' = (\varepsilon - 1)\mathfrak{E}_y\mathfrak{E}_z.$$

Beispielsweise folgt aus (4) und (5), daß auf die zu den Kraftlinien senkrechte Grenzfläche zweier verschiedener Dielektrika (unterschieden durch die Indizes $_1$ und $_2$) der Druck

$$-\frac{1}{2}(\varepsilon_1\mathfrak{E}_1^2 - \varepsilon_2\mathfrak{E}_2^2)\quad\text{oder}\quad -\frac{\varepsilon_1}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)\mathfrak{E}_1^2$$

wirkt. Derselbe ist nach der Feldwirkungstheorie die Differenz der Drucke $-\frac{\varepsilon_1}{2}\mathfrak{E}_1^2$ und $-\frac{\varepsilon_2}{2}\mathfrak{E}_2^2$, nach der Fernewirkungstheorie dagegen setzt er sich zusammen aus der Differenz der Drucke $-\frac{\varepsilon_1 - 1}{2}\mathfrak{E}_1^2$ und $-\frac{\varepsilon_2 - 1}{2}\mathfrak{E}_2^2$ und aus der durch $\frac{1}{2}(\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2)(\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1)$ gegebenen Coulombschen Fernwirkung auf die an der Grenzfläche influenzierte Belegung von der Dichte $(\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1)$. Ist die Grenzfläche der Dielektrika dagegen den Kraftlinien parallel, so trägt sie keine influenzierte Ladung, und in der Tat wird dann die Differenz der beiderseitigen Drucke dieselbe, sei es, daß man diese nach (5′) oder (6) berechnet, weil das Feld dann auf beiden Seiten der Grenzfläche übereinstimmt.

2. Die Bedeutung der Maxwellschen Spannungen für die Elektrostriktion. Wenn es nun auch für die Wirkungen der ponderomotorischen Kräfte gleichgültig ist, ob man dieselben ganz oder nur teilweise auf Spannungen der Dielektrika zurückführt, so hat die erstere Auffassung doch den Vorzug der Einheitlichkeit und grösseren Einfachheit und soll daher im folgenden zugrunde gelegt werden.

Die Einführung des den ponderomotorischen Kräften äquivalenten Spannungssystems erweist sich besonders zweckmäßig zur Berechnung der *Oberflächendrucke*, welche sich ergeben, wenn man die bisher vorausgesetzten stetigen Übergangsschichten unendlich dünn werden,

---

8) Es ist wohl zu beachten, daß man durch Einführung der scheinbaren elektrischen Ladungen wohl dem Einfluß des Dielektrikums auf das *Feld* vollständig Rechnung tragen kann, aber die ponderomotorischen Kräfte nur insoweit richtig erhält, als es sich um ihre Gesamtwirkungen auf starre Körper handelt.

also in Diskontinuitätsflächen (Trennungsflächen verschiedener Dielektrika oder eines Dielektrikums und eines Konduktors) übergehen läßt. Denn die Komponenten der auf die Flächeneinheit der Grenze zwischen einem Medium (1) und einem anderen (2) wirkenden Kraft $\bar{\mathfrak{F}}_{1,2}$ sind einfach gegeben durch

$$(7)\quad \bar{\mathfrak{F}}_{x_{1,2}} = -\bar{A}_{n_1} - \bar{A}_{n_2},\ \bar{\mathfrak{F}}_{y_{1,2}} = -\bar{B}_{n_1} - \bar{B}_{n_2},\ \bar{\mathfrak{F}}_{z_{1,2}} = -\bar{C}_{n_1} - \bar{C}_{n_2},$$

wo n_1, n_2 die *äußeren* Normalen für die beiden Medien bedeuten, und A_n usw. sich in bekannter Weise durch die $A_x, \ldots A_y$ ausdrücken, z. B. $A_n = A_x \cos(n, x) + A_y \cos(n, y) + A_z \cos(n, z)$ ist. Bei der Berechnung der $A_x, \ldots$ ist zu berücksichtigen, daß die tangentialen Komponenten der elektrischen Feldstärke, und für Grenzflächen, die keine wahre Ladung besitzen, auch die normalen der elektrischen Erregung beiderseits übereinstimmen. Ist das angrenzende Medium ein *Konduktor*, so sind dort $A_x, \ldots A_y$ sämtlich Null zu setzen, und da die Kraftlinien die Konduktoroberfläche senkrecht treffen, so wirkt auf dieselbe die volle Spannung parallel den Kraftlinien, d. i. in einem isotropen Dielektrikum $\frac{\varepsilon}{2}\mathfrak{E}^2$, als normaler Zug. Aber auch an Grenzflächen zweier *isotroper Dielektrika*, die keine wahre Flächenladung besitzen, ist der resultierende Oberflächendruck stets *normal* gerichtet, auch wenn die Kraftlinien die Grenzfläche schiefwinklig treffen. Denn legt man die x-Achse in die Normale n_1 der Oberfläche des Mediums (1), und berücksichtigt, daß dann $\varepsilon_1 \mathfrak{E}_{x_1} = \varepsilon_2 \mathfrak{E}_{x_2}$ und $\mathfrak{E}_{y_1} = \mathfrak{E}_{y_2}$, $\mathfrak{E}_{z_1} = \mathfrak{E}_{z_2}$ ist, so erhält man aus (5'):

$$(7')\quad \begin{aligned} -(A_{n_1} + A_{n_2}) = A_{x_2} - A_{x_1} &= \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\left(\bar{\mathfrak{E}}_1^{\,2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2}\bar{\mathfrak{E}}_{n_1}^{\,2}\right) \\ &= \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\left(\bar{\mathfrak{E}}_2^{\,2} + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1}\bar{\mathfrak{E}}_{n_2}^{\,2}\right), \\ B_{n_1} + B_{n_2} = 0, \quad C_{n_1} &+ C_{n_2} = 0, \end{aligned}$$

d. h. es wirkt auf die Grenzfläche ein normaler Druck von vorstehendem Betrage, und zwar ist derselbe von (1) gegen (2) hin gerichtet, wenn $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ ist.

Aus diesem Oberflächendruck erklären sich die bekannten Bewegungstendenzen ungeladener dielektrischer Körper im elektrischen Felde (vgl. Art. *Gans* über Elektrostatik V 15, Nr. **18**, **19**). Außer diesen resultierenden Kräften und Drehungsmomenten wird aber ein solcher Körper im allgemeinen *Deformationen* erleiden, und diese sind es, mit denen wir es im vorliegenden Abschnitt allein zu tun haben. Um dieselben zu bestimmen, hat man die durch (4) und (7) gegebenen Volum- und Oberflächenkräfte $\mathfrak{F}$ bezw. $\bar{\mathfrak{F}}_{hk}$ elektrischen Ursprungs als äußere Einwirkungen

in die Bedingungen des elastischen Gleichgewichts einzusetzen; dies ergibt, falls andere äußere Kräfte fehlen, für jeden Punkt im Innern die Gleichungen:

$$(8) \qquad \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = -\mathfrak{F}_x,$$

. . . .

und für jede Stelle der Grenzfläche zweier Medien (1), (2):

$$(9) \qquad X_{n_1} + X_{n_2} = \overline{\mathfrak{F}}_{x_{1,2}},$$

. . . .

worin die $X_x, \ldots X_n, \ldots$ die *elastischen* Spannungen bedeuten (über das Vorzeichen vgl. Anm. 6, S. 355).

Man könnte versucht sein, diese Gleichungen einfach durch die Annahme

$$X_x = -A_x, \ldots; \quad Y_z = -B_z, \ldots$$

zu lösen, also die Deformationen, die wir nach *Kirchhoff* mit $x_x, \ldots y_z, \ldots$ bezeichnen, aus den durch (5) gegebenen $A_x, \ldots, B_z, \ldots$ gemäß den Formeln

$$-x_x = s_{11} A_x + s_{12} B_y + s_{13} C_z + s_{14} B_z + s_{15} C_x + s_{16} A_y$$

. . . .

zu berechnen, wo die s_{hk} die bei Auflösung der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie (Gl. (49) in dem Art. *Abraham* IV 14) nach den Deformationskomponenten auftretenden Koeffizienten sind. Diese Annahme, welche bedeuten würde, daß die Maxwellschen Spannungen in jedem Volumelement des Dielektrikums durch entgegengesetzt gleiche *elastische* Spannungen kompensiert würden, ist aber, von ganz speziellen Fällen abgesehen, deshalb nicht zulässig, weil die so berechneten Deformationskomponenten $x_x, \ldots y_z, \ldots$ im allgemeinen nicht denjenigen 6 Bedingungsgleichungen (Gl. (33) im Abrahamschen Art. IV 14, Nr. **18**) genügen würden, welche zwischen ihnen zufolge ihrer Definition (ebenda IV 14 (32)) durch die ersten Differentialquotienten der Verrückungen $\mathfrak{v}_x, \mathfrak{v}_y, \mathfrak{v}_z$ nach x, y, z *stets* bestehen müssen; auch würden die ihnen entsprechenden $\mathfrak{v}_x, \mathfrak{v}_y, \mathfrak{v}_z$ meist mit gewissen für die Oberfläche des Dielektrikums zu stellenden Bedingungen (Befestigungsbedingungen) unvereinbar sein. Für *Flüssigkeiten* ist die Unzulässigkeit der Annahme $X_x = -A_x$ usw. ohne weiteres klar, da in solchen im Gleichgewichtszustande keine anderen Spannungen *elastischen* Ursprungs, als ein allseitig gleicher Druck, bestehen können, insbesondere also nicht solche, die das *Maxwell*sche Spannungssystem kompensieren würden.

Noch verkehrter wäre es, die Deformationen gemäß den linearen Grundgleichungen der Elastizitätstheorie aus den Maxwellschen Spannungen $A_x, \ldots$ selbst (statt aus $-A_x, \ldots$) zu berechnen. Obgleich dies selbstverständlich ist, da ja die Maxwellschen Spannungen nicht elastischen, sondern elektrischen Ursprungs sind, so scheint ein Hinweis auf dieses mögliche Mißverständnis doch angebracht, da dasselbe bisweilen zu Einwänden gegen die Zulässigkeit der Maxwellschen Anschauung von der Feldwirkung Anlaß gegeben hat[9]).

3. Spannungen, welche durch die Veränderlichkeit der dielektrischen Konstanten bedingt werden. Wie zuerst *Helmholtz*[10]) für Flüssigkeiten, dann *Kirchhoff*[11]) für isotrope feste Körper gezeigt hat, bedürfen die Maxwellschen Spannungen einer Ergänzung, wenn die dielektrischen Konstanten des Mediums sich durch Deformationen desselben ändern würden. Daß eine solche Veränderlichkeit des dielektrischen Verhaltens bei allen ponderabeln Körpern existieren wird, ist in hohem Grade wahrscheinlich; für einige Substanzen ist sie auch durch direkte Versuche nachgewiesen worden[12]).

Man kann nun die Änderungen der dielektrischen Konstanten jedenfalls in erster Annäherung den Deformationskomponenten proportional setzen und demgemäß die 36 Differentialquotienten

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_x} = \delta_{11}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y_y} = \delta_{12}, \ldots \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_y} = \delta_{16}, \\
(10)\qquad &\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_x} = \delta_{21}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_y} = \delta_{26}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_x} = \delta_{61}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_y} = \delta_{66}
\end{aligned}
$$

als neue individuelle Konstanten des Dielektrikums einführen. Bei einem asymmetrischen Kristall sind dieselben sämtlich voneinander unabhängig (insbesondere brauchen, im Gegensatz zum System der Elastizitätskonstanten, die Konstanten mit vertauschten Indizes nicht einander gleich zu sein). Besitzt das Medium Symmetrieeigenschaften, so verringert sich die Zahl der unabhängigen δ_{hk}, und zwar ordnen sich

9) So z. B. ancheinend bei *H. Poincaré*, Electricité et optique, 1, chap. IV. *Maxwell* selbst warnte ausdrücklich vor diesem Mißverständnis (Treatise 1, § 110).

10) Berlin Sitzungsber. 1881, p. 191.

11) Berlin Sitzungsber. 1884, p. 137.

12) So für Kautschuk von *O. M. Corbino* und *F. Cannizzo* (Rom Linc. Rend. (5) 7² (1898), p. 286) und *A. Lampa* (Wiener Anz. 1902, p. 223), für Glas von *Corbino* (N. Cim. (4) 4 (1896), p. 240) und *A. Wüllner* u. *M. Wien* (Ann. Phys. 11) (1903), p. 619), für Ebonit von *U. Panichi* (N. Cim. (4) 8 (1898), p. 89).

die 32 kristallographischen Symmetrieklassen nach dem System dieser Konstanten in 9 verschiedene Gruppen[13]). Für *isotrope* Körper wird

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = \delta_1, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{23} = \delta_{32} = \delta_2,$$
$$\delta_{44} = \delta_{55} = \delta_{66} = \tfrac{1}{2}(\delta_1 - \delta_2),$$

während alle übrigen δ_{hk} verschwinden; von den beiden übrigbleibenden Konstanten δ_1, δ_2 bestimmt die erstere die Änderung der Dielektrizitätskonstante durch eine Dilatation parallel den Kraftlinien, die letztere diejenige durch eine Dilatation senkrecht zu den Kraftlinien.

Berücksichtigt man nun unter Benutzung von (10) bei der in Nr. 1 angegebenen Berechnung von $\delta W_e'$ die Veränderung der ε_{hk} durch die mit den virtuellen Verrückungen $\delta\mathfrak{v}$ verbundenen Deformationen und formt die dadurch neu auftretenden Glieder, wie $-\frac{1}{2}\mathfrak{E}_x^2\delta_{11}\frac{\partial\delta\mathfrak{v}_x}{\partial x}$, $-\mathfrak{E}_y\mathfrak{E}_z\delta_{44}\left(\frac{\partial\delta\mathfrak{v}_y}{\partial z}+\frac{\partial\delta\mathfrak{v}_z}{\partial y}\right)$ usw., durch partielle Integration um, so kommen zu den ponderomotorischen Kräften $\mathfrak{F}_x, \mathfrak{F}_y, \mathfrak{F}_z$ Anteile hinzu, welche von vornherein die Form haben

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}, \qquad \frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}, \qquad \frac{\partial \Gamma_x}{\partial x}+\frac{\partial \Gamma_y}{\partial y}+\frac{\partial \Gamma_z}{\partial z},$$

also als von *Spannungen* herrührend erscheinen. Für diese *die Maxwellschen ergänzenden Spannungen* ergeben sich dabei nachstehende Werte[14]):

$$(11)\quad \begin{aligned} A_x &= -\tfrac{1}{2}\{\delta_{11}\mathfrak{E}_x^2+\delta_{21}\mathfrak{E}_y^2+\delta_{31}\mathfrak{E}_z^2+2\delta_{41}\mathfrak{E}_y\mathfrak{E}_z+2\delta_{51}\mathfrak{E}_z\mathfrak{E}_x \\ &\qquad +2\delta_{61}\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_y\}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ B_z = \Gamma_y &= -\tfrac{1}{2}\{\delta_{14}\mathfrak{E}_x^2+\delta_{24}\mathfrak{E}_y^2+\delta_{34}\mathfrak{E}_z^2+2\delta_{44}\mathfrak{E}_y\mathfrak{E}_z \\ &\qquad +2\delta_{54}\mathfrak{E}_z\mathfrak{E}_x+2\delta_{64}\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_y\}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

sie sind also, wie die Maxwellschen Spannungen, homogene quadratische Funktionen der Feldkomponenten. Für *isotrope* feste Körper

---

13) Die Spezialisierung des Konstantensystems δ_{hk} für die einzelnen Kristallklassen findet sich z. B. in *Voigts* Kompendium d. theoret. Physik 1, p. 143—144. Sie ist genau dieselbe, wie für die Konstanten der inneren Reibung (vgl. ibid. 2, p. 136) oder für dasjenige Konstantensystem, welches die Änderungen des optischen Verhaltens durch Deformationen charakterisiert (vgl. *F. Pockels*, Ann. Phys. Chem. 39 (1889), p. 152, 158).

14) Die allgemeinen Ergänzungsspannungen, jedoch für das *magnetische* Feld und ausgedrückt durch die Komponenten der *Erregung* statt durch diejenigen des Feldes, hat zuerst *H. Hertz* aufgestellt (Ann. Phys. Chem. 41 (1890), p. 393.)

nehmen sie nach dem oben über die δ_{hk} gesagten die einfachere Form an:

$$(11') \qquad \begin{aligned} A_x &= -\tfrac{1}{2}\delta_1 \mathfrak{E}_x^2 - \tfrac{1}{2}\delta_2(\mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_z &= \Gamma_y = \tfrac{1}{2}(\delta_2 - \delta_1)\mathfrak{E}_y\mathfrak{E}_z, \end{aligned}$$

bestehen also aus einem Druck $\frac{1}{2}\delta_1\mathfrak{E}^2$ in der Richtung der Kraftlinien und einem solchen $\frac{1}{2}\delta_2\mathfrak{E}^2$ senkrecht zu diesen, oder anders ausgedrückt, in einem *allseitig gleichen Druck* $\frac{1}{2}\delta_2\mathfrak{E}^2$ und einem *Zug parallel den Kraftlinien* von der Größe $\frac{1}{2}(\delta_2 - \delta_1)\mathfrak{E}^2$. Im Gegensatz zu dem *Maxwell*schen ergibt dieses Spannungssystem auch für das Innere eines *homogenen* isotropen Dielektrikums eine resultierende Volumkraft, nämlich

$$(12) \qquad \mathfrak{F}' = -\tfrac{1}{4}(\delta_1 + \delta_2)\,\mathrm{grad}\,(\mathfrak{E}^2)$$

und liefert zu den Oberflächendrucken Beiträge, welche im allgemeinen *nicht* senkrecht zur Oberfläche stehen, und deren X-Komponente ist:

$$(13) \qquad \bar{\mathfrak{F}}'_x = \tfrac{1}{2}\delta_2\bar{\mathfrak{E}}^2\cos(n, X) + \tfrac{1}{2}(\delta_1 - \delta_2)\bar{\mathfrak{E}}_x\bar{\mathfrak{E}}_n.$$

4. Elektrostriktion von Flüssigkeiten. Da in Flüssigkeiten irgendwelche Verrückungen der Teilchen die physikalischen Eigenschaften nur vermöge der mit ihnen verbundenen *Dichteänderung* beeinflussen können, so wird $\delta_2 = \delta_1 = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\vartheta}$, wo $\vartheta = x_x + y_y + z_z$ die kubische Dilatation bezeichnet; somit erhält man statt der Gl. (11'), wenn der Index an $\delta_2 = \delta_1$ fortgelassen wird,

$$(11'') \qquad A_x = B_y = \Gamma_z = -\tfrac{1}{2}\delta\mathfrak{E}^2, \quad B_z = \Gamma_x = A_y = 0.$$

Die Ergänzungsspannungen bestehen hier also einfach in einem *allseitig gleichen Drucke* $p = \frac{1}{2}\delta\mathfrak{E}^2$. Mit dieser, dem Quadrat der Feldstärke proportionalen Kraft strebt also die Flüssigkeit sich auszudehnen, bezw. falls δ negativ ist[15]), sich zu kontrahieren. Ist nun das Gesamtvolum der Flüssigkeit keiner Beschränkung durch einschließende Wände unterworfen, so wird tatsächlich an jeder Stelle der Flüssigkeit die jenem Expansions- bezw. Kontraktionsbestreben entsprechende Volumänderung, nämlich

$$(14) \qquad \vartheta = \frac{\delta}{2}\mathfrak{E}^2 \cdot \frac{1}{C},$$

15) Dieser Fall ist der wahrscheinlichere, sowohl aus theoretischen Gründen, als nach Analogie mit der z. B. von *W. Cassie* (Phil. Trans. 1890, p. 1), *D. Negreano* (Paris C. R. 114 (1892), p. 345), *F. Ratz* (Zeitschr. phys. Chem. 19 (1896), p. 94), *R. Abegg* (Ann. Phys. Chem. 60, p. 54; 62, p. 256 (1897)) beobachteten Abnahme der Dielektrizitätskonstante durch Temperaturerhöhung.

wo C der Kompressionsmodul ist, eintreten. Diese Volumänderung ist dann die einzige Wirkung der Ergänzungsspannungen, insbesondere liefern dieselben *keinen Beitrag zu den Oberflächendrucken*, da sie eben an jeder Stelle durch die obiger Dilatation entsprechende *elastische* Spannung *kompensiert* werden.

Die Versuche, welche angestellt worden sind, um die in Rede stehende Volumänderung von Flüssigkeiten im elektrischen Felde nachzuweisen, haben infolge störender Nebenwirkungen bisher nicht zu sicheren Resultaten geführt[16]). Für *Gase* läßt sich die zu erwartende Druck- bezw. Volumänderung im voraus nach Sinn und Größe angeben[17]); denn bei ihnen ist erfahrungsmäßig $\varepsilon - 1$ proportional der Dichte[18]), woraus für δ der Wert $-(\varepsilon - 1)$ folgt. Ist das Gas in einem Gefäß eingeschlossen, so muß also im elektrischen Felde sein Druck eine Verminderung vom Betrage $\frac{1}{2}(\varepsilon - 1)\mathfrak{E}^2$ erfahren. Eine solche Druckverminderung, welche mit der so berechneten der Größenordnung nach übereinstimmt, ist an Luft und Kohlensäure auch experimentell nachgewiesen worden[19]).

5. Elektrostriktion isotroper fester Körper. Ihre Behandlung nach den Methoden der Elastizitätstheorie. Für die Vergleichung der Theorie mit Beobachtungen bezw. die Bestimmung der Konstanten δ_1, δ_2 kommen praktisch nur solche Fälle in Betracht, wo das Dielektrikum die (relativ zu ihrer Flächenausdehnung dünne) isolierende Zwischenschicht eines *Kondensators* bildet, da nur bei dieser Anordnung die Feldstärke im Dielektrikum groß genug gemacht werden kann, um meßbare Deformationen hervorzubringen. Der weitaus größte Teil der Oberfläche des Dielektrikums wird dann von den Kraftlinien des elektrischen Feldes senkrecht durchsetzt, erleidet also — auch bei Berücksichtigung der Ergänzungsspannungen — nur einen *senkrechten* Druck oder Zug. Dabei sind die Fälle zu unterscheiden, ob die leitenden „Belegungen" des Kondensators dem

---

16) Dagegen will *D. Hurmuzescu* (Arch. sc. phys. nat. Genève 4 (1897), p. 431) an Eisensalzlösungen im *magnetischen* Felde eine Kontraktion beobachtet haben.

17) *D. J. Korteweg*, Ann. Phys. Chem. 9 (1880), p. 59; *G. Lippmann*, Ann. chim. phys. (5) 24 (1881), p. 159.

18) Die analoge Annahme macht *G. T. Walker* (Aberration and other problems connected with the electromagnetic field, Cambridge 1900) für die magnetische Permeabilität von Flüssigkeiten auf Grund molekulartheoretischer Überlegungen. Er meint eine Bestätigung derselben in gewissen Beobachtungen *Quinckes* zu finden, welche aber in Wirklichkeit nur die Wirkung des Oberflächendruckes zeigen, also nach dem oben gesagten keinen Schluß auf die Konstante δ gestatten.

19) *R. Gans*, Habilitationsschrift Tübingen 1903.

festen Dielektrikum direkt anliegen oder von demselben durch Luft- oder Flüssigkeitsschichten getrennt sind. Im ersten Falle erleiden die in Rede stehenden Oberflächen des Dielektrikums den *Druck* $\frac{\varepsilon - \delta_1}{2} \bar{\mathfrak{E}}^2$, im zweiten, wenn ε' die Dielektrizitätskonstante der flüssigen oder gasförmigen Zwischenschicht ist, zufolge Gl. (7') und dem in Nr. 4 Gesagten den *Zug* $\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon(\varepsilon - \varepsilon')}{\varepsilon'} + \delta_1\right)\bar{\mathfrak{E}}^2$, wo beidemal $\bar{\mathfrak{E}}$ die Feldstärke innerhalb des festen Dielektrikums unmittelbar an seiner Oberfläche bedeutet. Dazu kommt noch die durch (12) gegebene Kraft auf das Innere des Dielektrikums, die nur im Falle eines ebenflächigen Kondensators (wo das Feld homogen ist) verschwindet. Es entsteht nun die Aufgabe, aus den so gegebenen Oberflächen- und Volumkräften die Spannungen und Deformationen im Innern des Dielektrikums zu berechnen, eine Aufgabe, welche rein elastizitätstheoretischer Natur ist. Streng gelöst ist dieselbe nur für den Hohlkugel- und unendlich langen Zylinderkondensator[20]. Für ersteren möge die Lösung hier für den Fall unmittelbar anliegender Belegungen mitgeteilt werden.

Sind r_i, r_a die Radien der inneren und äußeren Belegung, φ_i, φ_a deren Potentiale, so ist die Feldstärke

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_r = \frac{\varphi_i - \varphi_a}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{C}{r^2},$$

folglich nach (12) die auf das Innere der dielektrischen Kugelschale wirkende Volumkraft:

$$\mathfrak{F}_r = (\delta_1 + \delta_2)\frac{C^2}{r^5}\,; \tag{15}$$

außerdem wirkt, wie aus (5') und (11') folgt, auf die innere bezw. äußere Begrenzung der normale, gegen das Dielektrikum hin gerichtete Druck:

$$\bar{\mathfrak{F}}_i = \tfrac{1}{2}(\varepsilon - \delta_1)\frac{C^2}{r_i^4}\,, \qquad \bar{\mathfrak{F}}_a = \tfrac{1}{2}(\varepsilon - \delta_1)\frac{C^2}{r_a^4}\,. \tag{16}$$

Aus den allgemeinen elastischen Gleichgewichtsbedingungen eines isotropen Körpers:

$$-\mathfrak{F}_x = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = (\lambda + \mu)\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \mu \Delta \mathfrak{v}_x$$

. . . .

folgt im vorliegenden Falle, wo nach Symmetrie nur *radiale* Verrückungen $\mathfrak{v}_r = \varrho$ vorhanden sind, welche gleich $\frac{dU(r)}{dr}$ gesetzt werden

20) *G. Kirchhoff*, Ann. Phys. Chem. 24 (1885), p. 70; *P. Sacerdote*, Journ. de phys. (3) 8 (1899), p. 464; Thèse, p. 14.

können,

$$-\int \mathfrak{F}_r dr = \mu \Delta U + (\lambda + \mu)\vartheta$$

oder, da hier $\vartheta = \frac{d\varrho}{dr} + \frac{2\varrho}{r}$ und somit $\Delta U = \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dU}{dr} = \vartheta$ ist,

$$\vartheta = \frac{1}{r^2}\frac{d(r^2\varrho)}{dr} = -\frac{1}{\lambda + 2\mu}\left\{A + \int_{r_i}^{r} \mathfrak{F}_r dr\right\}.$$

Durch nochmalige Integration ergibt sich nun:

$$\varrho = -\frac{1}{\lambda + 2\mu}\left\{\frac{1}{3}Ar + \frac{B}{r^2} + \frac{1}{r^2}\int_{r_i}^{r} r^2 dr \int_{r_i}^{r} \mathfrak{F}_r dr\right\}$$

oder nach Einsetzen von $\mathfrak{F}_r$ aus (15):

$$(17)\quad \varrho = \frac{-1}{\lambda + 2\mu}\left\{\frac{1}{3}Ar + \frac{B}{r^2} - \frac{(\delta_1 + \delta_2)C^2}{4r^2}\left[\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r} - \frac{r^3 - r_i^3}{3r_i^4}\right]\right\},$$

worin A, B Integrationskonstanten bezeichnen, die aus der Oberflächenbedingung für $r = r_i$

$$-(R_r)_i = -(\lambda + 2\mu)\left(\frac{d\varrho}{dr}\right)_i - 2\lambda\left(\frac{\varrho}{r}\right)_i = \mathfrak{F}_i = \tfrac{1}{2}(\varepsilon - \delta_1)\frac{C^2}{r_i^4}$$

und der analogen für $r = r_a$ zu bestimmen sind. Diese Berechnung vereinfacht sich erheblich in dem (wie oben gesagt) praktisch allein wichtigen Falle, daß $r_a - r_i$ sehr klein gegen r_i ist. Dann kann man in genügender Näherung setzen

$$\varrho = \frac{-1}{\lambda + 2\mu}\left(\frac{1}{3}Ar + \frac{B}{r^2}\right),$$

$$\frac{d\varrho}{dr} = -\frac{1}{\lambda + 2\mu}\left\{\frac{1}{3}A - \frac{2B}{r^3} - (\delta_1 + \delta_2)C^2\frac{r_i - r}{r_i^5}\right\}$$

und erhält:

$$A = -\frac{\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu}\cdot\frac{1}{2}\frac{C^2}{r_i^4}(\varepsilon + \delta_1 + 2\delta_2),$$

$$B = -\frac{\lambda + 2\mu}{12\mu}\frac{C^2}{r_i}(2\varepsilon + \delta_2 - \delta_1).$$

Führt man statt der Konstanten λ und μ den Elastizitätsmodul $E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda}$ und das Verhältnis der Querkontraktion zur Längsdilatation $\nu = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}$ ein, und berücksichtigt, daß in der jetzt eingehaltenen Annäherung $\frac{C}{r_i^2} = \frac{\varphi_i - \varphi_a}{d}$ wird, wo d die Dicke der Kugelschale bezeichnet, so findet man für die relative Zunahme

des inneren Radius schießlich[21]):

$$(17') \qquad \frac{\varrho_i}{r_i} = \left(\frac{\varphi_i - \varphi_a}{d}\right)^2 \cdot \frac{1}{2E} \left\{ \varepsilon - \nu \delta_1 + (1 - \nu) \delta_2 \right\}$$

und für die Dilatation des Dielektrikums in radialer Richtung:

$$(18) \qquad \left(\frac{d\varrho}{dr}\right)_i = -\left(\frac{\varphi_i - \varphi_a}{d}\right)^2 \frac{1}{2E} \left\{ \varepsilon(1 + 2\nu) - \delta_1 + 2\delta_2 \right\};$$

in allen tangentialen Richtungen ist die Dilatation durch $\frac{\varrho}{r}$ gegeben. Aus der der Beobachtung[22]) leicht zugänglichen Vergrößerung des inneren Volumens: $4\pi r_i^2 \varrho_i$ könnte man hiernach eine Kombination der Konstanten δ_1 und δ_2 berechnen; indessen sind die vorliegenden Messungen an Kugelkondensatoren zu einer solchen Berechnung nicht verwertbar, teils weil sie durch Nebenwirkungen (wie Leitfähigkeit des als Dielektrikum verwendeten Glases) zu stark beeinflußt sind, teils wegen der Unsicherheit der Kenntnis vom elastischen Verhalten der benutzten Glaskugeln.

Es ist hervorzuheben, daß die Näherungsausdrücke (17′) und (18) die tangentiale und transversale Dilatation des Dielektrikums nicht nur im Falle eines *Kugel*kondensators geben, sondern überhaupt für *jeden* geschlossenen Kondensator von sehr geringer, konstanter Dicke mit direkt anliegenden Belegungen Gültigkeit besitzen[23]). In der Tat ergeben sich jene Ausdrücke (18) und (17′) für die Dilatationen direkt aus dem auf ein scheibenförmiges Element des Dielektrikums

---

21) Diese Näherungsformel ist schon vor *Kirchhoff*s Arbeit durch eine speziellere Betrachtung von *D. J. Korteweg* abgeleitet (Ann. Phys. Chem. 9 (1880), p. 48).

22) Derartige Beobachtungen sind zuerst von *E. Duter* angestellt worden (Paris C. R. 87 (1878), p. 828, 960, 1036; 88 (1879), p. 1260), sodann in großer Zahl von *G. Quincke* (Ann. Phys. Chem. 10 (1880), p. 165; 19 (1883), p. 573) und neuerdings mit noch sorgfältigerer Vermeidung der Fehlerquellen von *A. Wüllner* und *M. Wien* (Ann. Phys. 9 (1902), p. 1217).

23) Ohne allgemeine Begründung ist dieser Satz ausgesprochen von *P. Sacerdote,* J. d. phys. (3) 8 (1899), p. 468; Thèse p. 30. Wenn die Belegungen von der festen dielektrischen Schale durch eine Flüssigkeitsschicht von gleicher Dielektrizitätskonstante getrennt sind, wie es bei gewissen Versuchen von *L. T. More* (Phil. Mag. (5) 50 (1900), p. 198; (6) 6 (1903), p. 1; (6) 10 (1905), p. 676) der Fall war, so sind die Deformationen in entsprechender Weise aus den Ergänzungsspannungen allein zu berechnen. Es ist also ein Irrtum, wenn *More* aus den negativen Resultaten jener Versuche schließen will, daß die *Maxwell*schen Spannungen überhaupt nicht auf die ponderabele Materie wirkten. Abgesehen davon, scheinen seine Beobachtungen übrigens infolge der angewandten Messungsmethode auch an sich nicht zuverlässig zu sein (vgl. *M. Cantone,* N. Cim (5) 7 (1904), p. 126).

wirkenden Druck $\frac{1}{2}(\varepsilon - \delta_1)\mathfrak{E}^2$ parallel und Zug $\frac{1}{2}(\varepsilon + \delta_2)\mathfrak{E}^2$ senkrecht zu den Kraftlinien, sofern sich jedes solche Element unabhängig von den angrenzenden entsprechend deformieren kann; das ist aber bei konstanter Dicke der dielektrischen Schale ersichtlich der Fall, da dann die angegebene Dilatation in tangentialer Richtung überall die gleiche ist. Demnach wird die Formel (17′) auch angewendet werden dürfen, um die relative Änderung des Durchmessers und der Länge eines sehr dünnwandigen, an den Enden irgendwie geschlossenen *Zylinderkondensators* zu berechnen, dessen innere und äußere Oberfläche in ihrer ganzen Ausdehnung mit Belegungen versehen sind. Für einen solchen Kondensator muß demnach zwischen den relativen Änderungen der Länge l und des inneren Volumens v die Beziehung bestehen

$$\frac{\delta v}{v} = 3\frac{\delta l}{l}, \tag{19}$$

woraus ersichtlich ist, daß die Messungen der Volum- und Längenänderung zur gesonderten Bestimmung der Konstanten δ_1 und δ_2 nicht ausreichen, da sie beide nur die Kombination $(1 - \nu)\delta_2 - \nu\delta_1$ liefern, welche die Änderung der Dielektrizitätskonstante durch *einseitigen Zug senkrecht zu den Kraftlinien* bestimmt. Zur Ermittelung von δ_1 und δ_2 selbst müßte etwa noch die (durch Gl. (18) bestimmte) Dickenänderung gemessen werden, wie es von *Cantone* versucht worden ist[24].

Fraglich kann es erscheinen, ob vorstehendes Resultat auch noch für Zylinderkondensatoren gilt, deren Belegungen nicht die ganze Oberfläche bedecken, und die an einem oder beiden Enden offen sind, wie sie bei vielen Beobachtungen angewandt wurden. Hier würde die strenge Berücksichtigung der Verhältnisse an den Rändern der Belegungen auf große analytische Schwierigkeiten führen.

6. Fortsetzung. Energetische Behandlung. In Fällen wie der zuletzt erwähnte verdient die zuerst von *Lippmann* und *Korteweg*[25]), neuerdings systematisch von *Sacerdote* (in seiner These) auf Probleme der Elektrostriktion angewandte *energetische* Behandlungsmethode den Vorzug, welche auf die vollständige Lösung des elastischen Problems verzichtet und nur auf die angenäherte Berechnung gewisser direkt beobachtbarer Gesamtänderungen (z. B. derjenigen des inneren oder

24) *M. Cantone* und *Fr. Sozzani*, Milano Rend. Istit. Lomb. (2) 33 (1900), p. 1059; 34 (1901), p. 251. An Platten aus einer Harz- und Schellackmischung hat *L. T. More* die Dickenänderung allein, und zwar bei nicht anliegenden Belegungen, zu messen versucht, jedoch mit negativem Resultat (Phil. Mag. (6) 10 (1905), p. 676).

25) *D. J. Korteweg*, Ann. Phys. Chem. 12 (1881), p. 647; *G. Lippmann*, Ann. chim. phys. (5) 24 (1881), p. 144.

äußeren Volumens oder der Länge des Kondensators) ausgeht. Als Beispiel für diese Methode sei hier die Berechnung der Längenänderung eines Zylinderkondensators mit anhaftenden Belegungen mitgeteilt.

Es sei e die Ladung, φ das Potential der einen Belegung, während die andere auf dem Potential Null erhalten wird; ferner q der auf den Zylinderkondensator ausgeübte äußere longitudinale Zug, dl dessen ganze Längenänderung. Unter Voraussetzung konstant gehaltener Temperatur kann der Zustand des Kondensators als eine Funktion der beiden unabhängigen Variabeln φ und q angesehen werden. Die zur Erzielung einer Ladungs- und Längenänderung aufzuwendende Arbeit ist

$$dA = \varphi de + q dl = \varphi\left(\frac{\partial e}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial e}{\partial q} dq\right) + q\left(\frac{\partial l}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial l}{\partial q} dq\right)$$

$$= \left(\varphi \frac{\partial e}{\partial \varphi} + q \frac{\partial l}{\partial \varphi}\right) d\varphi + \left(\varphi \frac{\partial e}{\partial q} + q \frac{\partial l}{\partial q}\right) dq.$$

Nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik muß die rechte Seite ein vollständiges Differential sein; die Bedingung hierfür ist:

$$\frac{\partial l}{\partial \varphi} = \frac{\partial e}{\partial q} \tag{20}$$

oder, wenn man die Kapazität $K = \frac{e}{\varphi}$ einführt:

$$\frac{\partial l}{\partial \varphi} = \varphi \frac{\partial K}{\partial q}. \tag{20'}$$

In erster Annäherung kann $\frac{\partial K}{\partial q}$ jedenfalls als unabhängig von φ angesehen werden; dann ergibt sich die durch die Ladung des Kondensators auf die Potentialdifferenz φ hervorgebrachte Längenänderung:

$$\delta l = \frac{1}{2} \varphi^2 \frac{\partial K}{\partial q}. \tag{21}$$

Nun ist, wenn l' die Länge des belegten Teiles des Kondensators bezeichnet, in großer Annäherung (nämlich bei Vernachlässigung der „Streuung" der Kraftlinien): $K = \frac{2\pi l' \varepsilon}{\log \frac{r_a}{r_i}}$, und da $\frac{r_a}{r_i}$ bei der Dehnung des Hohlzylinders durch einseitigen Zug ungeändert bleibt, so folgt hieraus

$$\frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial q} = \frac{1}{l'} \frac{\partial l'}{\partial q} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial q}$$

oder bei Einführung des Elastizitätsmodulus E und der S. 360 definierten Konstanten δ_1, δ_2:

$$(22) \qquad \frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial q} = \frac{1}{E\pi(r_a^2 - r_i^2)}\left\{1 + \frac{\delta_2(1-\nu) - \delta_1\nu}{\varepsilon}\right\}.$$

Bei sehr geringer Wanddicke $r_a - r_i = d$ des Zylinderkondensators ist nun $K = \frac{\pi(r_a + r_i)l'\varepsilon}{d}$, somit nach (22):

$$(22') \qquad \frac{\partial K}{\partial q} = \frac{l'}{d^2 E}(\varepsilon + \delta_2(1-\nu) - \delta_1\nu),$$

und durch Einsetzen dieses Wertes in (21) erhält man

$$(23) \qquad \frac{\delta l}{l'} = \left(\frac{\varphi}{d}\right)^2 \cdot \frac{1}{2E}(\varepsilon + \delta_2(1-\nu) - \delta_1\nu).$$

Man sieht, daß in dem Falle, wo die Belegungen des Kondensators sich nahezu über die ganze Länge des Zylinders erstrecken, dieses Resultat mit demjenigen übereinstimmt, welches nach dem S. 365 besprochenen *Sacerdote*schen Satze aus Gl. (17′) für einen beliebig gestalteten, geschlossenen, dünnwandigen Kondensator folgt. Die vorstehende Ableitung läßt aber erkennen, daß es für die Gültigkeit dieses Resultates bei nicht geschlossenen Zylinderkondensatoren wesentlich ist, daß die Belegungen an der Dilatation der dielektrischen Zwischenschicht teilnehmen, also auch für tangentiale Inanspruchnahme an derselben haften. Diese Bedingung war nun bei den meisten Beobachtungen an offenen Zylinderkondensatoren in der Tat erfüllt, und daher wurde auch, wenn die Volum- und Längenänderung gleichzeitig gemessen wurden, die Relation (19) gut bestätigt gefunden[26]).

Für eine weitergehende Prüfung der Theorie kommen nur die Beobachtungen von *Wüllner* und *M. Wien* in Betracht, welche an einer Reihe zylindrischer Glaskondensatoren sowohl die Volumänderung durch Elektrostriktion, als auch die Kapazitätsänderung durch longitudinalen Zug bestimmt haben[27]). Aus beiden Bestimmungen läßt sich nach dem S. 366 und 368 gesagten, wenn noch E und ε durch besondere Beobachtungen ermittelt sind, die Konstantenkombination $\delta_2(1-\nu) - \delta_1\nu$ ableiten, und es wurden für dieselbe auf beiden Wegen negative Werte von der gleichen Größenordnung gefunden, wodurch also die Theorie der Elektrostriktion bis zu einem gewissen Grade bestätigt wird. Die entgegengesetzten Resultate von *Cantone* und *Sozzani*[28]), welche aus Messungen der Längenänderung von Glas-

---

26) Z. B. *G. Quincke,* Ann. Phys. Chem. 10 (1880), p. 515.

27) *A. Wüllner* und *M. Wien,* Ann. Phys. 9 (1902), p. 1217; 11 (1903), p. 619.

28) *M. Cantone,* Rom Rend. Acc. Linc. (4) 4^1 (1888), p. 344, 471; *M. Cantone* und *Fr. Sozzani,* Rend. Istit. Lomb. (2) 33 (1900), p. 1059; 34 (1901), p. 251; *M. Cantone,* ibid. 37 (1904), p. 164; Nuovo Cim. (5) 7 (1904), p. 126.

Zylinderkondensatoren für obige Größe *positive* Werte (entsprechend einer *Zunahme* der Dielektrizitätskonstante durch Zug senkrecht zu den Kraftlinien) fanden, dürften sich durch tatsächlich verschiedenes Verhalten verschiedener Glassorten erklären, welches auch schon aus den sehr verschiedenen numerischen Werten von $(\delta_2(1-\nu)-\delta_1\nu)\frac{1}{\varepsilon E}$ hervorgeht, die *Wüllner* und *Wien* für verschiedene Glassorten erhielten.

7. Magnetostriktion. Die ponderomotorischen Kräfte, welche im *magnetischen* Felde $\mathfrak{H}$ auftreten, lassen sich für Körper, deren magnetische Permeabilität μ als unabhängig von der Feldstärke angesehen werden kann, in völlig analoger Weise ableiten und auf Spannungen zurückführen, wie es für die Kräfte im elektrischen Felde oben in Nr. **1** und **3** durchgeführt worden ist. In einem homogenen isotropen Körper liefern jene Spannungen die zu (12) analoge Volumkraft $-\frac{1}{4}(\pi_1+\pi_2)$ grad $(\mathfrak{H}^2)$, wo $\pi_1\lambda$ und $\pi_2\lambda$ die Änderungen von μ durch die Dilatation λ parallel bezw. senkrecht zu den Kraftlinien bestimmen. Ferner erleidet die Oberfläche des Körpers, wenn er von Luft oder einer isotropen Flüssigkeit umgeben ist, deren Permeabilität gleich 1 gesetzt werden kann, zufolge (7') und (13) pro Flächeneinheit die Kraftkomponenten:

$$\bar{\mathfrak{F}}_x = \frac{\mu-1}{2}\{\bar{\mathfrak{H}}^2+(\mu-1)\bar{\mathfrak{H}}_n{}^2\}\cos(n,X) + \frac{\pi_2}{2}\bar{\mathfrak{H}}^2\cos(n,X)+\frac{\pi_1-\pi_2}{2}\bar{\mathfrak{H}}_x\bar{\mathfrak{H}}_n, \tag{24}$$

. . . .

wo $\bar{\mathfrak{H}}$ die Feldstärke innerhalb des betrachteten Körpers an seiner Oberfläche, n deren äußere Normale bedeutet.

Die Bestimmung der *Deformation*, welche diese Kräfte hervorbringen, hat *Kirchhoff*[29]) für den Fall einer *Kugel*, die in ein homogenes Magnetfeld gebracht wird, vollständig durchgeführt. Dieser Fall ist deshalb besonders einfach zu behandeln, weil das Magnetfeld innerhalb der Kugel homogen ist, nämlich

$$\mathfrak{H} = \frac{3H^0}{2+\mu},$$

wenn H^0 die Intensität des ursprünglichen homogenen Feldes ist, in welches die Kugel hineingebracht wurde. Daher fallen die Volumkräfte fort, und bei Zugrundelegung eines Koordinatensystems, dessen

---

29) *Kirchhoff*, Berlin Sitzungsber. 1884, p. 1155 Ann. Phys. Chem. 25 (1885), p. 601; Ges. Abh. Nachtrag, p. 124.

X-Achse parallel der Feldrichtung und dessen Nullpunkt der Kugelmittelpunkt ist, werden die Oberflächenkräfte nach (24):

$$(25)\qquad \begin{aligned} \overline{\mathfrak{F}}_x &= \left(\frac{3H^0}{2+\mu}\right)^2 \left\{\frac{(\mu-1)^2}{2}\left(\frac{\bar{x}}{R}\right)^3 + \frac{\mu-1+\pi_1}{2}\frac{\bar{x}}{R}\right\}, \\ \overline{\mathfrak{F}}_y &= \left(\frac{3H^0}{2+\mu}\right)^2 \left\{\frac{(\mu-1)^2}{2}\frac{\bar{x}^2\bar{y}}{R^3} + \frac{\mu-1+\pi_2}{2}\frac{\bar{y}}{R}\right\}. \end{aligned}$$

R bedeutet den Kugelradius. $\overline{\mathfrak{F}}_z$ ist analog zu $\overline{\mathfrak{F}}_y$ gebildet. Nach den Gleichungen der Elastizitätstheorie ergeben sich hieraus für die Verrückungen irgend eines in der XY-Ebene liegenden Punktes der Kugel Ausdrücke von der Form

$$(26)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{v}_x &= \left(\frac{3H^0}{2+\mu}\right)^2 \left\{\frac{(\mu-1)^2}{2}[a_1x^3 + b_1y^2x + c_1R^2x] \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\mu-1+\pi_2}{2}a_2x + \frac{\pi_1-\pi_2}{2}a_3x\right\}, \\ \mathfrak{v}_y &= \left(\frac{3H^0}{2+\mu}\right)^2 \left\{\frac{(\mu-1)^2}{2}[a_1'x^2y + b_1'y^3 + c_1'R^2y] \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\mu-1+\pi_2}{2}a_2y + \frac{\pi_1-\pi_2}{2}b_3y\right\}, \end{aligned}$$

wo a_1, b_1, c_1, a_1', b_1', c_1', a_2, a_3, b_3 gewisse Verbindungen der Elastizitätskonstanten bezeichnen. *Kirchhoff* wendet diese Ausdrücke an, um die Deformation einer Eisenkugel im homogenen Magnetfelde zu berechnen, wobei er annimmt, daß die beiden letzten Glieder in der Klammer gegen das erste, mit $(\mu-1)^2$ proportionale, zu vernachlässigen seien. Abgesehen von der Bedenklichkeit dieser Vernachlässigung (da direkte Beobachtungen beim Eisen auf sehr große Werte von π_1 und π_2 schließen lassen) ist aber diese Anwendung der vorstehenden Formeln schon deshalb nicht statthaft, weil die bei ihrer Ableitung (analog zu der in Nr. **1** und **3** gegebenen für die Elektrostriktion) vorausgesetzte Darstellung der Energie bei „ferromagnetischen" Körpern nicht gilt[30]). Denn bei solchen ist die magnetische Energie der Volumeinheit nach der Maxwellschen Theorie wegen der Abhängigkeit der Permeabilität μ von $\mathfrak{H}$ nicht durch $\frac{1}{2}\mu\mathfrak{H}^2$ gegeben, sondern durch[31]):

30) Aus demselben Grunde können die Formeln, welche *Cantone* für die Magnetostriktion eines *Rotationsellipsoids* in einem zu seiner Rotationsachse parallelen Felde durch Übertragung der *Kirchhoff*schen Behandlungsweise entwickelt hat [Rom Mem. Accad. Linc. (4) 6 (1890), p. 485], auf dessen Beobachtungen an Ellipsoiden aus Eisen und Nickel nicht angewendet werden. Übrigens sind diese Formeln auch an sich unrichtig wegen eines Fehlers in der Lösung des elastischen Problems.

31) Vgl. *E. Cohn,* Das elektromagnetische Feld, p. 512. Siehe auch Art. 15, Nr. **31**.

$$W_m = \int_0^{\mathfrak{B}} (\mathfrak{H} d \mathfrak{B}) = (\mathfrak{H}\mathfrak{B}) - \int_0^{\mathfrak{H}} (\mathfrak{B} d \mathfrak{H}).$$

Daraus folgen für die Maxwellschen Spannungen in einem ferromagnetischen Medium ohne Hysteresis an Stelle der analog zu (5′) gebildeten die nachstehenden Ausdrücke[31]):

$$(27)\quad \begin{cases} (A_x)_m = \mathfrak{B}_x \mathfrak{H}_x - \int_0^{\mathfrak{H}} (\mathfrak{B} d \mathfrak{H}), \\ \cdots\cdots\cdots \\ (B_z)_m = (C_y)_m = \frac{1}{2}(\mathfrak{B}_y \mathfrak{H}_z + \mathfrak{B}_z \mathfrak{H}_y), \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

und für die durch die Abhängigkeit des magnetischen Verhaltens von Deformationen bedingten Spannungen[32]):

$$(28)\quad (A_x)_m = -\frac{\partial}{\partial x_x} \int_0^{\mathfrak{H}} (\mathfrak{B} d \mathfrak{H}), \ldots (B_z)_m = (\Gamma_y)_m = -\frac{\partial}{\partial y_z} \int_0^{\mathfrak{H}} (\mathfrak{B} d \mathfrak{H},)$$

wo die Differentiationen bei konstant gehaltenem $\mathfrak{H}$ auszuführen sind. — Im Falle eines *isotropen* Mediums nehmen diese Ausdrücke die Form*) an:

$$(27')\quad \begin{cases} (A_x)_m = \mu \mathfrak{H}_x^2 - \int_0^{\mathfrak{H}} \mu \mathfrak{H} d \mathfrak{H} \\ \qquad = + \int_0^{\mu\mathfrak{H}} \mathfrak{H}_x d(\mu \mathfrak{H}_x) - \int_0^{\mathfrak{H}} \mu (\mathfrak{H}_y d \mathfrak{H}_y + \mathfrak{H}_z d \mathfrak{H}_z), \\ \cdots\cdots\cdots \\ (B_z)_m = (C_y)_m = \mu \mathfrak{H}_y \mathfrak{H}_z, \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

$$(28')\quad \begin{cases} (A_x)_m = -\int_0^{\mathfrak{H}} \{\pi_1 \mathfrak{H}_x d \mathfrak{H}_x + \pi_2 (\mathfrak{H}_y d \mathfrak{H}_y + \mathfrak{H}_z d \mathfrak{H}_z)\}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ (B_z)_m = (\Gamma_y)_m = \int_0^{\mathfrak{H}} \frac{\pi_2 - \pi_1}{2} (\mathfrak{H}_z d \mathfrak{H}_y + \mathfrak{H}_y d \mathfrak{H}_z), \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

wo μ und π_1, π_2 Funktionen von $|\mathfrak{H}|$ sind.

32) *S. Sano,* Phys. Ztschr. 3 (1902), p. 401; *F. Koláček,* Ann. Phys. 13 (1904), p. 1; *R. Gans,* ibid. p. 634.

*) Ebenso wie wir statt $(\mathfrak{H}\mathfrak{H})$ kürzer $\mathfrak{H}^2$ schreiben, werden wir $\mathfrak{H} d \mathfrak{H}$ statt $(\mathfrak{H} d \mathfrak{H})$ schreiben.

Insgesamt wirkt hiernach parallel den Kraftlinien der Zug:

$$(29)\qquad \mathfrak{q} = \int_0^{\mu\mathfrak{H}} \mathfrak{H}\, d(\mu\mathfrak{H}) - \int_0^{\mathfrak{H}} \pi_1 \mathfrak{H}\, d\mathfrak{H}$$

und senkrecht zu den Kraftlinien der Druck:

$$(30)\qquad \mathfrak{p} = \int_0^{\mathfrak{H}} \mu \mathfrak{H}\, d\mathfrak{H} + \int_0^{\mathfrak{H}} \pi_2 \mathfrak{H}\, d\mathfrak{H}.$$

Der mit Rücksicht auf die Beobachtungen wichtigste Spezialfall der Magnetostriktion ist die Längen- und Volumänderung eines dünnen Stabes oder Drahtes, der in ein homogenes Magnetfeld mit seiner Längsrichtung parallel zu dessen Kraftlinien hineingebracht wird. (Dieser Fall kann am einfachsten dadurch realisiert werden, daß man den Stab in der Achse eines langen Solenoids aufstellt, durch das man einen galvanischen Strom leitet.)

Die strenge Lösung dieses Problems, bei welcher auf die Gestalt der Stabenden und den davon mit abhängigen Kraftlinienverlauf daselbst Rücksicht zu nehmen wäre, ist noch nicht gegeben. Eine annähernde Behandlung hat *Koláček*[32]) in der Weise durchgeführt, daß er dem Stabe die Gestalt eines sehr gestreckten Rotationsellipsoids zuschreibt. Will man nur die, der Beobachtung allein zugängliche, *gesamte* Längen- und Volumänderung berechnen, — worauf sich schließlich auch *Koláček* beschränkt —, so braucht man indessen gar keine spezielle Annahme über die Gestalt der Stabenden zu machen, sofern nur die Querdimensionen des Stabes sehr klein gegen seine Länge sind. Dann wird nämlich das Magnetfeld durch die Anwesenheit des Stabes nur auf einem relativ kleinen Teil seiner Länge merklich modifiziert und zwar in der Weise, als wenn bei unveränderter Permeabilität des von dem Stabe eingenommenen Raumes an den Stabenden zwei Pole von der Stärke $(\mu - 1)H^0 f$ angebracht wären, wo H_0 die ursprüngliche Feldstärke und f der Stabquerschnitt ist. Daraus folgt, daß die Dilatation des Stabes sich bestimmt aus einem longitudinalen äußeren Zug $\bar{\mathfrak{F}}_l$, der gleich ist der Differenz der mit der ursprünglichen Feldstärke berechneten Werte von $\mathfrak{q}$ im Luftraum und im Stabe, vermehrt um die vom Felde H^0 auf die fingierten magnetischen Pole ausgeübten Kraft pro Querschnittseinheit, sowie aus einem radialen Zug $\bar{\mathfrak{F}}_r$ auf die Mantelfläche gleich der Differenz der Werte von $\mathfrak{p}$ innerhalb und außerhalb des Stabes. Man findet in dieser Weise

$$(31)\qquad \bar{\mathfrak{F}}_l = \int_0^{H^0} (\mu - 1 + \pi_1)\mathfrak{H}\, d\mathfrak{H}, \quad \bar{\mathfrak{F}}_r = \int_0^{H^0} (\mu - 1 + \pi_2)\mathfrak{H}\, d\mathfrak{H};$$

ohne den Einfluß von Deformationen auf μ würde also eine *allseitig*

gleiche Dilatation des Stabes resultieren und $\frac{\delta v}{v} = 3 \cdot \frac{\delta l}{l}$ sein. Die Beobachtungen haben gezeigt, daß diese Beziehung keineswegs besteht, und daß die Glieder mit π_1, π_2 sogar von überwiegendem Einfluß sind. Die Ausdrücke für die relative Längen- und Volumänderung, die sich aus obigem $\bar{\mathfrak{F}}_l$ und $\bar{\mathfrak{F}}_r$ nach der Elastizitätstheorie berechnen, kann man folgendermaßen schreiben:

$$(32) \quad \begin{cases} \dfrac{\delta l}{l} = \dfrac{\bar{\mathfrak{F}}_l - 2\nu\bar{\mathfrak{F}}_r}{E} = \dfrac{1-2\nu}{E}\displaystyle\int_0^{H^0}(\mu - 1)\mathfrak{H}\,d\mathfrak{H} + \int_0^{H^0}\frac{\partial\mu}{\partial q_l}\mathfrak{H}\,d\mathfrak{H}, \\[2ex] \dfrac{\delta v}{v} = \dfrac{3(1-2\nu)}{E}\displaystyle\int_0^{H^0}(\mu - 1)\mathfrak{H}\,d\mathfrak{H} + \int_0^{H^0}\left(\frac{\partial\mu}{\partial q_l} + 2\frac{\partial\mu}{\partial q_r}\right)\mathfrak{H}\,d\mathfrak{H}, \end{cases}$$

wobei q_l, q_r einen longitudinalen bezw. radialen äußeren Zug bedeutet, und vorausgesetzt ist, daß die Elastizitätskonstanten nicht merklich von $\mathfrak{H}$ abhängen (andernfalls müßte $\frac{1-2\nu}{E}$ mit unter das Integralzeichen gesetzt werden). Diese Formeln sind identisch mit denen, die *Koláček* a. a. O. für einen Stab von sehr gestreckt ellipsoidischer Form gefunden hat. Sie lassen sich übrigens auch durch eine rein energetische Behandlungsweise des Problems ableiten[33]). Dieselbe ergibt z. B. zwischen der gesamten Längenänderung eines beliebig gestalteten Stabes im Magnetfelde einerseits und der Änderung seines gesamten longitudinalen magnetischen Momentes M durch einen gleichgerichteten Zug vom Gesamtbetrage Q andererseits die Beziehung:

$$(33) \qquad \frac{\partial l}{\partial H^0} = \frac{\partial M}{\partial Q},$$

woraus dann für einen dünnen zylindrischen Stab als Näherung die erste Gleichung (32) folgt. Ebenso ergibt diese Methode für die Änderung des Gesamtvolums durch die Magnetisierung und des magnetischen Moments durch allseitigen Druck P unmittelbar die Relation:

$$(34) \qquad \frac{\partial v}{\partial H^0} = -\frac{\partial M}{\partial P},$$

welche auf (32^2) führt. Auch die *Torsion* eines longitudinal magnetisierten Drahtes läßt sich analog behandeln; es gilt, wenn T das Torsionsmoment, τ der Torsionswinkel ist:

---

33) *F. Koláček*, Ann. Phys. 14 (1904), p. 177. Zuerst ist diese Betrachtungsweise wohl von *J. J. Thomson* angewendet worden in seinen Vorlesungen über „Anwendungen der Dynamik auf Physik und Chemie“ Cambridge 1888 (Übers. Leipzig 1890), Kap. 4.

$$(35) \qquad \frac{\partial \tau}{\partial H^0} = \frac{\partial M}{\partial T}.$$

Der experimentellen Prüfung[34]) sind diese Formeln, welche die beobachtbaren Gesamtwirkungen zueinander in Beziehung setzen, natürlich leichter zugänglich, als diejenigen der vollständigen Theorie.

Auf die überaus zahlreichen *Beobachtungen* über Magnetostriktion ferromagnetischer Metalle und über den Einfluß elastischer Deformationen auf die Magnetisierung kann hier nicht eingegangen werden; es sei dafür z. B. auf die Darstellung von *F. Auerbach* in Winkelmanns Handbuch der Physik, 2. Aufl., Bd. V, p. 301, verwiesen.

8. Piëzoelektrizität und Elektrostriktion azentrischer Kristalle. Allgemeiner Ansatz. An Turmalin, Quarz und einer Anzahl anderer Substanzen, deren Kristalle durch das Fehlen eines Zentrums der Symmetrie ausgezeichnet sind, wurde zuerst von *J.* und *P. Curie*[35]) die Erscheinung der sog. *Piëzoelektrizität*, d. h. der Erregung elektrischer Momente durch äußeren Druck, beobachtet. Eine allgemeine mathematische Theorie dieser Erscheinungen entwickelte *W. Voigt* in der eingangs zitierten Abhandlung, indem er die Annahme zu Grunde legte, daß die an irgend einer Stelle des Kristalles erregten elektrischen Momente lineare Funktionen der Deformationskomponenten sind[36]), deren Form der krystallographischen Symmetrie entspricht. *Lippmann* zeigte für einen speziellen Fall auf Grund des Energieprinzips, daß die Piëzoelektrizität das Auftreten von Deformationen im elektrischen Felde zur Folge haben muß, welche sich mit der Feldrichtung umkehren[37]). Die allgemeinen Gesetze dieser Deformationen wurden dann von *F. Pockels*[38]) unter Zugrundelegung der *Voigt*schen Theorie abgeleitet.

---

34) Eine solche ist neuerdings in weitem Umfange ausgeführt worden von *K. Honda* und *T. Terada* (Phys. Zeitschr. 7 (1906), p. 465).

35) *J.* und *P. Curie*, Paris C. R. 91 (1880), p. 294, 383. Die Bezeichnung Piëzoelektrizität stammt von *W. Hankel* (Abh. d. k. sächs. Ges. d. Wiss. 12 (1881), p. 462).

36) Die Proportionalität der elektrischen Momente mit dem Druck wurde am Quarz und Turmalin von *F. Nachtikal* (Gött. Nachr. 1899, p. 109) in weiten Grenzen geprüft und sehr annähernd bestätigt gefunden.

37) *G. Lippmann,* Ann. chim. phys. (5) 24 (1881), p. 164; Journ. phys. (1) 10 (1881), p. 391. Beobachtet und gemessen wurden solche umkehrbare Deformationen zuerst an Quarz von *J.* und *P. Curie,* Paris C. R. 93 (1881), p. 1137, 95 (1882), p. 914, wobei sich sehr gute Übereinstimmung mit den theoretischen Werten ergab. Aus den von *Kundt* (Ann. Phys. Chem. 18 (1883), p. 228) und *Röntgen* (Ann. Phys. Chem. 18, p. 213, 534) entdeckten Änderungen des *optischen* Verhaltens im elektrischen Felde kann hingegen nicht mit Sicherheit auf die

Beide Arten von Erscheinungen, die piëzoelektrischen und die eben erwähnten reziproken, lassen sich in ihrem Zusammenhange am besten darstellen, indem man die freie Energie der Volumeinheit (ω) eines gleichzeitig homogenen Drucken und einem homogenen elektrischen Felde ausgesetzten, nichtleitenden Kristalles bei konstanter Temperatur als Funktion der sechs Deformationskomponenten $x_x, \ldots y_z, \ldots$ und der elektrischen Feldkomponenten $\mathfrak{E}_x, \mathfrak{E}_y, \mathfrak{E}_z$ betrachtet[39]). Die Entwicklung von ω nach Potenzen dieser Größen beginnt mit Gliedern, welche in den $x_x, \ldots y_z, \ldots$ quadratisch sind und zusammen die elastische potentielle Energie χ darstellen, und solchen, die in den $\mathfrak{E}_x, \mathfrak{E}_y, \mathfrak{E}_z$ quadratisch sind und der zur Hervorbringung der elektrischen Momente der Volumeinheit (oder Polarisationen, vgl. den Art. *H. A. Lorentz* über Maxwellsche Theorie V 13 Nr. **13**) $\mathfrak{P}_x, \mathfrak{P}_y, \mathfrak{P}_z$ bei verschwindender Deformation aufzuwendenden Arbeit ψ entsprechen. Zufolge der Grundannahme der Elastizitätstheorie ist

$$(36)\qquad \begin{aligned} \chi = \tfrac{1}{2} c_{11} x_x^2 + c_{12} x_x y_y + \cdots + c_{16} x_x x_y \\ + \tfrac{1}{2} c_{22} y_y^2 + \cdots + c_{26} y_y x_y \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \tfrac{1}{2} c_{66} x_y^2. \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$(37)\qquad \begin{aligned} \psi = -\tfrac{1}{2}\{(\varepsilon_{11}-1)\mathfrak{E}_x^2 + (\varepsilon'_{22}-1)\mathfrak{E}_y^2 + (\varepsilon'_{33}-1)\mathfrak{E}_z^2 \\ + 2\varepsilon'_{23}\mathfrak{E}_y\mathfrak{E}_z + 2\varepsilon'_{31}\mathfrak{E}_z\mathfrak{E}_x + 2\varepsilon'_{12}\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_y\}, \end{aligned}$$

da die bei Influenzierung der $\mathfrak{P}_x, \mathfrak{P}_y, \mathfrak{P}_z$ geleistete Arbeit allgemein durch $-\int(\mathfrak{P}_x d\mathfrak{E}_x + \mathfrak{P}_y d\mathfrak{E}_y + \mathfrak{P}_z d\mathfrak{E}_z)$ gegeben ist*) und folglich

$$(\mathfrak{P}_x)_d = (\varepsilon'_{11}-1)\mathfrak{E}_x + \varepsilon'_{12}\mathfrak{E}_y + \varepsilon'_{13}\mathfrak{E}_z = -\frac{\partial\psi}{\partial\mathfrak{E}_x},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

sein muß; hierin bedeuten die ε'_{hk} die Dielektrizitätskonstanten bei verschwindender Deformation und sind mit den gewöhnlichen ε_{hk} also

---

Deformationen geschlossen werden, da erstere den letzteren zwar qualitativ, aber nicht quantitativ entsprechen; vgl. *F. Pockels*, Göttingen Abh. Ges. d. Wiss. 39 (1894).

38) *F. Pockels*, N. Jahrb. f. Min., Beil.-Bd. 7 (1890), p. 224.

39) Diese Art der Behandlung findet sich zuerst, jedoch z. T. fehlerhaft, bei *P. Duhem* (Leçons sur l'électricité et le magnétisme 2 (1892), p. 467), dann bei *E. Riecke*, Gött. Nachr. 1893, p. 3—13, und *W. Voigt*, Gött. Nachr. 1894, Nr. 4, oder Ann. Phys. Chem. 55 (1894), p. 701, sowie in dessen Kompendium der theoretischen Physik 2, p. 104.

*) Daß diese Arbeit *negativ* ist, hängt mit der Tatsache zusammen, daß ein dielektrischer Körper nach dem Gebiete größter Feldstärke hingezogen wird. Vgl. Art. *Gans* V 15 Nr. **19**.

nur dann identisch, wenn die elektrische Erregung nicht von Deformationen begleitet ist.

Bei Kristallen ohne Symmetriezentrum, bei denen eine Umkehrung aller drei Koordinatenrichtungen mit einer Änderung des Ausdruckes für die Energie verbunden sein kann, wird der letztere nun auch Produkte der $x_x, \ldots y_z, \ldots$ und $\mathfrak{E}_x, \mathfrak{E}_y, \mathfrak{E}_z$ enthalten können. Indem man die höheren Glieder der Entwicklung, z. B. diejenigen von der Form

$$-\tfrac{1}{2}\{\mathfrak{E}_x^2(\delta_{11}x_x + \cdots + \delta_{16}x_y) + \cdots + \mathfrak{E}_y\mathfrak{E}_z(\delta_{41}x_x + \cdots + \delta_{46}x_y) + \cdots\},$$

welche die in Nr. 3 d. Art. behandelten Erscheinungen geben würden, vernachlässigt, um die für azentrische Kristalle charakteristischen Vorgänge für sich zu betrachten, erhält man demnach folgenden Ansatz:

$$(38)\quad \begin{cases} \omega = \chi + \psi - \mathfrak{E}_x(e_{11}x_x + e_{12}y_y + e_{13}z_z + e_{14}y_z + e_{15}z_x + e_{16}x_y) \\ \qquad - \mathfrak{E}_y(e_{21}x_x + \cdots + \cdots + e_{24}y_z + \cdots + \cdots) \\ \qquad - \mathfrak{E}_z(e_{31}x_x + \cdots + \cdots + e_{34}y_z + \cdots + \cdots). \end{cases}$$

Da allgemein $-\frac{\partial\omega}{\partial\mathfrak{E}_x}, -\frac{\partial\omega}{\partial\mathfrak{E}_y}, -\frac{\partial\omega}{\partial\mathfrak{E}_z}$ die gesamten elektrischen Momente $\mathfrak{P}_x, \mathfrak{P}_y, \mathfrak{P}_z$, ferner $\frac{\partial\omega}{\partial x_x}, \cdots, \frac{\partial\omega}{\partial y_z}, \cdots$ die gesamten inneren Spannungen $\Xi_x, \ldots, H_z, \ldots$ sind, so folgt, wenn man noch die bei verschwindenden Deformationen influenzierten Momente mit $(\mathfrak{P}_x)_d$, $(\mathfrak{P}_y)_d$, $(\mathfrak{P}_z)_d$ und die bei verschwindendem elektrischen Feld auftretenden (rein elastischen) Spannungen mit $X_x, \ldots, Y_z, \ldots$ bezeichnet,

$$(39)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}_x = (\mathfrak{P}_x)_d + e_{11}x_x + e_{12}y_y + e_{13}z_z + e_{14}y_z + e_{15}z_x + e_{16}x_y, \\ \mathfrak{P}_y = (\mathfrak{P}_y)_d + e_{21}x_x + \cdots + \cdots + e_{24}y_z + \cdots + \cdots, \\ \mathfrak{P}_z = (\mathfrak{P}_z)_d + e_{31}x_x + \cdots + \cdots + e_{34}y_z + \cdots + \cdots; \end{cases}$$

$$(40)\quad \begin{cases} \Xi_x = X_x - (e_{11}\mathfrak{E}_x + e_{21}\mathfrak{E}_y + e_{31}\mathfrak{E}_z), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ H_z = Y_z - (e_{14}\mathfrak{E}_x + e_{24}\mathfrak{E}_y + e_{34}\mathfrak{E}_z), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Das erste Gleichungssystem bildet die Grundlage der *Voigt*schen Theorie der Piëzoelektrizität. Es ist dazu zu bemerken, daß die ersten Glieder der rechten Seite, welche die *influenzierten* Momente darstellen, im allgemeinen auch dann nicht verschwinden, wenn auf den Kristall nur mechanisch eingewirkt wird; denn im allgemeinen erfährt jedes Volumelement dann elektrische Einwirkungen von allen übrigen (Selbstinfluenzierung des Kristalls), welche sich erst berechnen lassen, wenn die Form des Kristallstückes und die ganze Versuchsanordnung gegeben ist.

Bezeichnet man, wie in der Elastizitätstheorie üblich, mit c_{hk} bzw. s_{hk} die elastischen Konstanten, welche als Koëffizienten in den linearen Ausdrücken der elastischen Spannungen durch die Deformationen bzw. in den Ausdrücken der Deformationen durch die Spannungen auftreten, wobei

$$\sum_1^6{}^{(k)} c_{hk} s_{hk} = 1, \quad \sum_1^6{}^{(k)} c_{hk} s_{ik} = 0$$

ist, so folgt aus den Gleichungen (40)

$$(41) \quad \begin{cases} x_x = \xi_x + d_{11} \mathfrak{E}_x + d_{21} \mathfrak{E}_y + d_{31} \mathfrak{E}_z, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_z = \eta_z + d_{14} \mathfrak{E}_x + d_{24} \mathfrak{E}_z + d_{34} \mathfrak{E}_z, \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

wo

$$(42) \qquad d_{hk} = \sum_1^6{}^{i} e_{hi} s_{ki}$$

gesetzt ist, und $\xi_x, \ldots, \eta_z, \ldots$ ebenso aus den gesamten Spannungen $\Xi_x, \ldots$ abgeleitet sind, wie $x_x, \ldots, y_z, \ldots$ aus den rein elastischen $X_x, \ldots$, also:

$$(43) \qquad \xi_x = \Xi_x s_{11} + H_y s_{12} + \cdots + \Xi_y s_{16}.$$

Es bedeuten $\xi_x, \ldots, \eta_z, \ldots$ mithin die Deformationen, welche durch die Spannungen $\Xi_x, \ldots$ bei fehlender elektrischer Einwirkung hervorgerufen würden, $x_x - \xi_x, \ldots, y_z - \eta_z, \ldots$ dagegen diejenigen, welche bei fehlender mechanischer Einwirkung lediglich durch ein elektrisches Feld erzeugt werden, vorausgesetzt, daß sich die so bestimmten Deformationen jedes Volumelementes ungehindert durch die benachbarten herstellen können (was freilich nur in besonderen Fällen, z. B. bei homogenem elektrischen Felde, zutrifft).

Ferner erhält man aus den Formeln (39) durch Einsetzen von (41) und Berücksichtigung von (43):

$$(44) \begin{cases} \mathfrak{P}_x = (\mathfrak{P}_x)_s + (d_{11}\Xi_x + d_{12}H_y + d_{13}Z_z + d_{14}H_z + d_{15}Z_x + d_{16}\Xi_y) \\ \mathfrak{P}_y = (\mathfrak{P}_y)_s + (d_{21}\Xi_x + \cdots + \cdots + d_{24}H_z + \cdots + \cdots) \\ \mathfrak{P}_z = (\mathfrak{P}_z)_s + (d_{31}\Xi_x + \cdots + \cdots + d_{34}H_z + \cdots + \cdots); \end{cases}$$

darin ist

$$(45) \begin{cases} (\mathfrak{P}_x)_s = (\mathfrak{P}_x)_d + \mathfrak{E}_x \Sigma d_{1h} e_{1h} + \mathfrak{E}_y \Sigma d_{1h} e_{2h} + \mathfrak{E}_z \Sigma d_{1h} e_{3h} \\ \qquad = \mathfrak{E}_x(\varepsilon'_{11} - 1 + \Sigma d_{1h} e_{1h}) + \mathfrak{E}_y (\varepsilon'_{12} + \Sigma d_{1h} e_{2h}) \\ \qquad\qquad + \mathfrak{E}_z (\varepsilon'_{13} + \Sigma d_{1h} e_{3h}) \\ \qquad = \mathfrak{E}_x(\varepsilon_{11} - 1) + \mathfrak{E}_y \varepsilon_{12} + \mathfrak{E}_z \varepsilon_{13} \end{cases}$$

und bedeutet das bei verschwindenden Spannungen influenzierte Moment parallel der X-Achse. Aus vorstehender Gleichung und den analogen für $(\mathfrak{P}_y)_s$, $(\mathfrak{P}_z)_s$ ist zugleich der Unterschied zwischen den Dielektrizitätskonstanten ε'_{hk} bei verschwindender Deformation und denjenigen ε_{hk} bei verschwindenden Spannungen (den Dielektrizitätskonstanten im gewöhnlichen Sinne) ersichtlich; praktisch kommt dieser Unterschied wegen der Kleinheit der Produkte der Größen d und e in den bisher bekannten Fällen allerdings nicht in Betracht.

9. **Spezialisierung für die einzelnen Kristallgruppen.** Die allgemeinen Ausdrücke (39) oder (44) für die Komponenten des elektrischen Moments, welche 18 dem Kristall eigentümliche Konstanten[40]) (die „piëzoelektrischen Konstanten" e_{hk} bzw. „piëzoelektrischen Moduln" d_{hk} nach *Voigt*s Bezeichnung) enthalten, erfahren eine mehr oder weniger beträchtliche Vereinfachung, wenn der Kristall Symmetrieeigenschaften besitzt und das Koordinatensystem diesen entsprechend gewählt wird; denn es ergeben sich dann aus der Forderung, daß die skalare Funktion ω beim Übergang zu einem kristallographisch gleichwertigen Koordinatensystem gleiche Koeffizienten behalten muß, eine Anzahl von Bedingungsgleichungen zwischen den Konstanten e_{hk} bzw. d_{hk}.[41]) Das Vorhandensein eines *Zentrums* der Symmetrie schließt die hier betrachtete piëzoelektrische Erregung überhaupt aus, da $\mathfrak{P}$ als *polarer* Vektor (vgl. Artikel *Abraham* über geometrische Grundbegriffe IV 14, Nr. **21**) bei Umkehrung aller Koordinatenachsen sein Vorzeichen wechselt, die Deformations- oder Spannungskomponenten aber dabei unverändert bleiben. Nachstehende Zusammenstellung gibt für die azentrischen Kristallgruppen die spezielle Form der linearen Ausdrücke, welche nach dem Ansatz (44) die durch mechanische Einwirkung primär erregten elektrischen Momente $\mathfrak{P}_x' = \mathfrak{P}_x - (\mathfrak{P}_x)_s$ usw. als Funktionen der Spannungen darstellen. (Letztere werden in diesem Falle, nämlich bei verschwindendem elektrischen Feld, nach (40) mit den $X_x, \ldots$, $Y_z, \ldots$ identisch.) Jeder Kristallgruppe sind die Symbole der für sie wesentlichen Symmetrieelemente hinzugefügt, wobei A_x^n bzw. S_x^n eine in die X-Richtung fallende n-zählige Symmetrieachse bzw. eine ebensolche Spiegeldrehungsachse, E_x eine zur X-Achse senkrechte Sym-

40) Eine Untersuchung von *Voigt* (Göttinger Nachr. 1900, p. 364) über den Charakter dieser Konstanten zeigt, daß sich dieselben durch Kombination eines Vektors, eines Tensors und einer gerichteten Größe 3. Ordnung darstellen lassen. (Siehe auch IV 14, Nr. **23** c.)

41) Über die allgemeinen Prinzipien dieser Symmetriebetrachtungen vgl. IV 14. III

metrieebene bezeichnet; aus diesen Symbolen ist zugleich die spezielle Wahl des Koordinatensystems in den einzelnen Fällen ersichtlich.

1. *Triklines System*, Hemiëdrie. Allgemeine Gleichungen (44).

2. *Monoklines System*, Hemiëdrie. E_z.

$$\mathfrak{P}_x' = d_{11} X_x + d_{12} Y_y + d_{13} Z_z + d_{16} X_y,$$
$$\mathfrak{P}_y' = d_{21} X_x + d_{22} Y_y + d_{23} Z_z + d_{26} X_y,$$
$$\mathfrak{P}_z' = d_{34} Y_z + d_{35} Z_x.$$

3. *Monoklines System*, Hemimorphie. A_z^2.

$$\mathfrak{P}_x' = d_{14} Y_z + d_{15} Z_x, \quad \mathfrak{P}_y' = d_{24} Y_z + d_{25} Z_x,$$
$$\mathfrak{P}_z' = d_{31} X_x + d_{32} Y_y + d_{33} Z_z + d_{36} X_y.$$

4. *Rhombisches System*, Hemiëdrie. $A_z^2 A_x^2$.

$$\mathfrak{P}_x' = d_{14} Y_z, \quad \mathfrak{P}_y' = d_{25} Z_x, \quad \mathfrak{P}_z' = d_{36} X_y.$$

5. Desgl., Hemimorphie. $A_z^2 E_x$.

$$\mathfrak{P}_x' = d_{15} Z_x, \quad \mathfrak{P}_y' = d_{24} Y_z,$$
$$\mathfrak{P}_z' = d_{31} X_x + d_{32} Y_y + d_{33} Z_z.$$

Tetragonales System.

6. Enantiomorphe Hemiëdrie. $A_z^4 A_x^2$.

$$\mathfrak{P}_x' = d_{14} Y_z, \quad \mathfrak{P}_y' = -d_{14} Z_x, \quad \mathfrak{P}_z' = 0.$$

7. Hemimorphe Hemiëdrie. $A_z^4 E_x$.

$$\mathfrak{P}_x' = d_{15} Z_x, \quad \mathfrak{P}_y' = d_{15} Y_z, \quad \mathfrak{P}_z' = d_{31}(X_x + Y_y) + d_{33} Z_z.$$

8. Hemimorphe Tetartoëdrie. A_z^4. Superposition der Ausdrücke 6. und 7.

9. Sphenoidische Hemiëdrie. $S_z^2 A_x^2$.

$$\mathfrak{P}_x' = d_{14} Y_z, \quad \mathfrak{P}_y' = d_{14} Z_x, \quad \mathfrak{P}_z' = d_{36} X_y.$$

10. Sphenoidische Tetartoëdrie. S_z^2.

$$\mathfrak{P}_x' = d_{14} Y_z + d_{15} Z_x, \quad \mathfrak{P}_y' = -d_{15} Y_z + d_{14} Z_x,$$
$$\mathfrak{P}_z' = d_{31}(X_x - Y_y) + d_{36} X_y.$$

Rhomboëdrisches System.

11. Enantiomorphe Hemiëdrie. $A_z^3 A_x^2$.

$$\mathfrak{P}_x' = d_{11}(X_x - Y_y) + d_{14} Y_z, \quad \mathfrak{P}_y' = -d_{14} Z_x - 2 d_{11} X_y, \quad \mathfrak{P}_z' = 0$$

12. Hemimorphe Hemiëdrie. $A_z^3 E_x$.

$$\mathfrak{P}_x' = d_{15} Z_x - 2 d_{22} X_y, \quad \mathfrak{P}_y' = d_{22}(Y_y - X_x),$$
$$\mathfrak{P}_z' = d_{31}(X_x + Y_y) + d_{33} Z_z.$$

13. Tetartoëdrie. A_z^3. Superposition der Ausdrücke 11. und 12.

Hexagonales System.

14. Enantiomorphe Hemiëdrie. $A_z^6 A_x^2$. — Wie Gruppe 6.
15. Hemimorphe Hemiëdrie. $A_z^6 E_x$. — Wie Gruppe 7.
16. Hemimorphe Tetartoëdrie. A_z^6. — Wie Gruppe 8.
17. Hemiëdrie mit dreizähliger Achse. $A_z^3 E_z A_x^2$.

$$\mathfrak{P}_x' = d_{11}(X_x - Y_y), \quad \mathfrak{P}_y' = -2d_{11}X_y, \quad \mathfrak{P}_z' = 0.$$

18. Tetartoëdrie mit dreizähliger Achse. $A_z^3 E_z$.

$$\mathfrak{P}_x' = d_{11}(X_x - Y_y) - 2d_{22}X_y, \quad \mathfrak{P}_y' = d_{22}(X_x - Y_y) + 2d_{11}X_y,$$
$$\mathfrak{P}_z' = 0.$$

Reguläres System.

19. Hemimorphe Hemiëdrie. $S_x^2 = S_y^2 = S_z^2$ und
20. Tetartoëdrie. $A_x^2 = A_y^2 = A_z^2$.

$$\mathfrak{P}_x' = d_{14}Y_z, \quad \mathfrak{P}_y' = d_{14}Z_x, \quad \mathfrak{P}_z' = d_{14}X_y.$$

Für die enantiomorphe Hemiëdrie verschwinden hier trotz Fehlens eines Zentrums der Symmetrie sämtliche piëzoelektrische Moduln.

Die linearen Ausdrücke, welche nach (39) die durch gegebene *Deformationen* erregten Momente $\mathfrak{P}_x - (\mathfrak{P}_x)_d$ usw. darstellen, spezialisieren sich für die einzelnen Kristallgruppen in derselben Weise, wie die Ausdrücke (44), mit dem einzigen Unterschied, daß in den Fällen, wo die Z-Achse eine dreizählige Symmetrieachse ist, an Stelle von X_y nicht x_y, sondern $\frac{1}{2}x_y$ zu setzen ist.

10. Anwendung auf besondere Fälle. Die für die Beobachtung wichtigste Art piëzoelektrischer Erregung ist diejenige durch die homogene d. h. im ganzen Kristall konstante Deformation, welche durch *einseitigen Druck* (ausgeübt auf die Endflächen eines prismatischen Kristallstücks) hervorgebracht wird. Hierauf können die Formeln (44) direkt Anwendung finden; denn hier sind $\Xi_x, \ldots, H_z, \ldots$ unmittelbar gegeben, nämlich, wenn P die Größe des Druckes, ν_1, ν_2, ν_3 seine Richtungskosinus sind:

$$\Xi_x = -\nu_1^2 P, \quad \ldots \quad H_z = -\nu_2\nu_3 P. \tag{46}$$

Um das piëzoelektrische Verhalten eines Kristalls zu veranschaulichen, kann man die aus (44) und (46) für $P = 1$ und alle möglichen Druckrichtungen erhaltenen Momente als Vektoren von einem Punkte aus auftragen und die von deren Endpunkten erfüllte Oberfläche konstruieren. Diese *„piëzoelektrische Fläche“* ist für spezielle Kristallgruppen (die hemimorphe Hemiëdrie des rhomboëdrischen und des regulären Systems) von *E. Riecke*[42]) und *W. Voigt*[43]), sodann

42) *E. Riecke,* Göttinger Nachr. 1891, p. 223.

allgemein von *F. Bidlingmaier*[44]) untersucht worden. Letzterer zeigte, daß dieselbe in den meisten Fällen einem besonderen Typus der *Steinerschen Fläche* angehört. Sie ist vom 4. Grade und besitzt 3 Doppelgerade, die einen Punkt gemeinsam haben; sie verläuft ganz innerhalb des durch die Endpunkte der letzteren bestimmten Tetraëders, dessen Seitenflächen sie in Ellipsen berührt, und kann mit Hilfe des Doppelgeradenkreuzes in einfacher Weise konstruiert werden (vgl. § 12 der *Bidlingmaier*schen Dissertation). Das Doppelgeradenkreuz und das zugehörige Tetraëder muß der Symmetrie der Kristallgruppe entsprechen, und hierdurch ist die piëzoelektrische Fläche für jede Gruppe (abgesehen von den noch willkürlich bleibenden Parametern) ihrer Natur nach angebbar. In den Gruppen des tetragonalen Systems mit Ausnahme derjenigen mit Spiegelachse, sowie in allen Gruppen des hexagonalen Systems, wo ein solches mit der Symmetrie verträgliches Tetraëder nicht möglich ist, entartet die piëzoelektrische Fläche zu einem (in Bezug auf den Ausgangspunkt der Konstruktion exzentrischen) Rotationsellipsoid oder (wie z. B. bei der Gruppe 11, welcher der Quarz angehört) zu einer Kreisscheibe. In allen übrigen Fällen kann sie aus der *regulären* Steinerschen Fläche durch Dehnung, Drehung, Parallelverschiebung und Kollineation abgeleitet werden.

Es ist jedoch zu bemerken, daß die piëzoelektrische Fläche für sich allein zur Charakteristik des piëzoelektrischen Verhaltens bei einseitigem Druck nicht ausreicht, sondern daß noch die Zuordnung ihrer Punkte zu den die Druckrichtung repräsentierenden Punkten der Halbkugel hinzugefügt werden muß. In der Tat besitzt auch die allgemeinste, den symmetrielosen Kristallen zukommende piëzoelektrische Fläche nur 15 Parameter, während die Anzahl der „piëzoelektrischen Moduln" d_{hk} in diesem Falle 18 beträgt. Nur in höher symmetrischen Gruppen wird die Anzahl der Flächenkonstanten gleich derjenigen der Moduln.

Für die hemimorph-hemiëdrische und tetartoëdrische Gruppe des *regulären Systems* ist die Gleichung der Fläche, bezogen auf die hier den Würfelnormalen parallelen Doppelgeraden als Koordinatenachsen:

$$\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} = -Pd_{14}, \tag{47}$$

und die Zuordnung ihrer Punkte zu den Richtungskosinus von P ist durch die Proportion gegeben:

---

43) *W. Voigt,* Vers. d. Naturf. u. Ä. 1891, II. Teil, p. 36—39.

44) *F. Bidlingmaier,* Diss. Göttingen 1900 (Geometrischer Beitrag zur Piëzoelektrizität der Kristalle).

(48) $$x : y : z = \frac{1}{\nu_1} : \frac{1}{\nu_2} : \frac{1}{\nu_3},$$

woraus folgt, daß die beiden Ebenen, welche durch die Richtung von P einerseits, durch diejenige von $\mathfrak{P}$ andererseits und durch eine der Koordinatenachsen hindurch gelegt werden, mit einer der durch die letztere hindurchgehenden Koordinatenebenen komplementäre Winkel bilden. Liegt die Druckrichtung in einer Koordinatenebene, so fällt $\mathfrak{P}$ in die zu dieser senkrechte Symmetrieachse.

Eine andere geometrische Darstellung der piëzoelektrischen Erregung durch einseitigen Druck hat *W. Voigt* angegeben[45]). Sie beruht auf dem aus den Grundformeln (44) in Verbindung mit (46) leicht ersichtlichen Satze, daß der Druck P, welcher in beliebigen Richtungen wirken muß, um ein vorgeschriebenes Moment nach einer der 3 Koordinatenachsen zu erzeugen, durch das Quadrat des der Druckrichtung parallelen Radiusvektors je einer zentrischen Fläche 2. Grades gegeben wird, deren Gestalt und Lage durch die piëzoelektrischen Moduln vollständig bestimmt ist, während ihre absoluten Lineardimensionen der Quadratwurzel aus dem vorgeschriebenen Moment $\mathfrak{P}_x - (\mathfrak{P}_x)_s$ bzw. $\mathfrak{P}_y - (\mathfrak{P}_y)_s$ oder $\mathfrak{P}_z - (\mathfrak{P}_z)_s$ proportional sind. Diese 3 Flächen zweiten Grades, deren jede durch 6 Parameter bestimmt ist, sind ausreichend zur vollständigen Charakterisierung des piëzoelektrischen Verhaltens. Man kann z. B. durch Aufsuchung der *Schnittpunkte* dreier solcher Flächen diejenigen Drucke nach Größe und Richtung bestimmen, welche ein vorgeschriebenes Gesamtmoment erzeugen.

Dieselben Flächen 2. Grades können auch zur Veranschaulichung des reziproken Phänomens dienen; die reziproken Quadrate ihrer Radienvektoren geben nämlich die in deren Richtung durch ein bestimmtes, je einer Koordinatenachse paralleles elektrisches Feld erzeugte lineare Dilatation[46]).

Da der Beobachtung an einseitig gepreßten rechtwinkligen Prismen nicht das Gesamtmoment, sondern die Komponenten nach den Prismenkanten, welche zugleich die auf den Prismenflächen auftretende freie elektrische Flächendichte messen, unmittelbar zugänglich sind, so hat auch die geometrische Darstellung dieser Komponenten Interesse, insbesondere der Komponente $\mathfrak{P}_l'$ nach der Druckrichtung. Die Oberflächen, deren Radiusvektor r dieses *longitudinale Moment* $\mathfrak{P}_l'$ für konstante Größe und alle möglichen Richtungen des Druckes repräsen-

45) *W. Voigt,* Ann. Phys. Chem. 63 (1897), p. 376; Kristallphysik, p. 105ff.
46) *W. Voigt,* Ann. Phys. Chem. 63 (1897), p. 380.

tiert, sind von *Voigt* für die besonders interessanten Gruppen 11., 12. und 19. (oder 20) der obigen Aufzählung untersucht und durch Modelle dargestellt worden[47]). Im Falle der regulären Gruppe 19. hat diese Fläche die Gleichung:

$$(49) \qquad \mathfrak{P}_l' = -3d_{14}P\nu_1\nu_2\nu_3 \quad \text{oder} \quad r^4 = -3d_{14}Pxyz;$$

sie besteht aus vier geschlossenen Flächenstücken, die nur im Nullpunkt zusammenhängen, in den abwechselnden Oktanten liegen und natürlich symmetrisch in bezug auf die in dem betreffenden Oktanten liegende dreizählige Symmetrieachse (Oktaëdernormale) sind. Von ähnlichem Typus, und ebenfalls nur der absoluten Größe nach von der Substanz des Kristalls abhängig, ist die $\mathfrak{P}_l'$-Fläche bei der Gruppe 11., deren bekanntester Repräsentant der *Quarz* ist; hier gilt:

$$(50) \quad \mathfrak{P}_l' = d_{11}P\nu_1(\nu_1^2 - 3\nu_2^2) \quad \text{oder} \quad r^4 = d_{11}Px(x^2 - 3y^2),$$

und die Fläche besteht aus drei geschlossenen, nur im Nullpunkt zusammenhängenden Stücken, welche in bezug auf die XY-Ebene und je eine der drei durch die Hauptachse (Z-Achse) und die zweizähligen Symmetrieachsen gehenden Ebenen symmetrisch sind. Bei der Gruppe 12. endlich, welcher der *Turmalin* angehört, erhält man

$$(51) \quad \mathfrak{P}_l' = -P\{d_{22}\nu_2(\nu_2^2 - 3\nu_1^2) + (d_{31} + d_{15})\nu_3(1 - \nu_3^2) + d_{33}\nu_3^2\}$$

und wird die Fläche $r = \mathfrak{P}_l'$ also aus derjenigen für 11. dadurch erhalten, daß man dem durch (50) gegebenen Radiusvektor noch eine vom Neigungswinkel gegen die Hauptachse allein abhängige Strecke hinzufügt; die Gestalt der Fläche ist hier von der Substanz des Kristalls abhängig. Für einen Vertreter der monoklinen Gruppe 3., die Weinsäure, hat *T. Tamaru*[48]) die sämtlichen acht piëzoelektrischen Moduln bestimmt und die Fläche des longitudinalen Moments diskutiert.

Die experimentelle Bestätigung der vorstehenden Formeln der *Voigt*schen Theorie ist durch elektrometrische Messungen der auf den Flächen einseitig gepreßter Prismen auftretenden freien Ladungen von *J.* und *P. Curie*[49]) und von *Riecke* und *Voigt*[50]) an Quarz und Turmalin, sowie von *Pockels*[51]) an dem regulär tetartoëdrischen Natriumchlorat erbracht worden.

---

47) *W. Voigt,* Vers. d. Naturf. u. Ä. 1891, II, p. 36. — Katalog math. Modelle usw., München 1892, p. 385.

48) *T. Tamaru,* Physik. Ztschr. 6 (1905), p. 379.

49) *J.* u. *P. Curie,* Paris C. R. 92 (1881), p. 186; 93 (1882), p. 204; Journ. de phys. (2) 1 (1882), p. 245.

50) *W. Voigt,* Ann. Phys. Chem. 45 (1892), p. 523.

51) *F. Pockels*, Göttingen Abh. Ges. d. Wiss. 39 (1894), II. § 4.

Außer für den Fall der homogenen Deformation durch einseitigen Druck ist die primäre piëzoelektrische Erregung noch für gewisse Fälle *ungleichförmiger* Deformation untersucht werden, so für die Biegung und Torsion eines Zylinders[52]) und für die Deformation eines solchen durch gewisse auf die Mantelfläche ausgeübte Drucke[53]). Da in diesen Fällen die elektrischen Momente nicht mit einer Oberflächenbelegung allein äquivalent sind, so muß, um die beobachtbaren elektrischen Wirkungen des deformierten Kristallzylinders zu finden, das *Potential* der erregten elektrischen Verteilung berechnet werden. *Voigt* hat gezeigt[54]), wie diese Aufgabe für einen unendlich langen Kreiszylinder auch mit Berücksichtigung der sekundären Wirkungen (Selbstinfluenz und Elektrostriktion) streng gelöst werden kann, und hat u. a. den für die Erklärung gewisser Beobachtungen[55]) wichtigen Satz gefunden, daß ein solcher Zylinder von beliebiger kristallographischer Orientierung, wenn überhaupt, durch longitudinalen Druck oder Zug stets so erregt wird, daß sich seine Peripherie in zwei Hälften, und durch gleichförmige Biegung oder Drillung so, daß sie sich in *vier* gleiche Teile von entgegengesetzt gleichem elektrischen Verhalten teilt.

11. Polare Pyroelektrizität und reziproker Wärme-Effekt. Schon lange vor Entdeckung der Piëzoelektrizität war die Erscheinung bekannt, daß gewisse Kristalle (wie der Turmalin) infolge von Temperaturänderung elektrisch erregt werden, welche Eigenschaft man *Pyroelektrizität* nennt[56]). Als eigentlich pyroelektrisch sind aber nach *Voigt* nur diejenigen Kristalle zu bezeichnen, welche bei *gleichförmiger*, d. h. im ganzen Kristall konstanter Temperaturänderung elektrisch erregt werden. Sofern diese Erregung eine *polare* ist, wie in diesem Abschnitt vorausgesetzt werden soll, kann sie nur bei gewissen azentrischen Kristallgruppen auftreten, nämlich bei den Gruppen 1. und 2. der in Nr. 9 gegebenen Aufzählung und bei denjenigen mit einer ausgezeichneten polaren Symmetrieachse. *Ungleichförmige* Temperaturänderung kann hingegen dadurch, daß sie Spannungen verursacht, bei *allen* piëzoelektrischen Kristallen elektrische Erregung hervorrufen, und es ist die unter solchen Umständen beobachtete Elektrizitätsentwicklung vielfach auch als Pyroelektrizität bezeichnet worden.

---

52) *W. Voigt,* Allg. Theorie usw. § 6—9.

53) *C. Somigliana,* Ann. di mat. (2) 20 (1892).

54) *W. Voigt,* Göttinger Nachr. 1894, Nr. 4.

55) *W. C. Röntgen,* Ann. Phys. Chem. 39 (1890), p. 16.

56) *W. Hankel,* dem man ausgedehnte Beobachtungen auf diesem Gebiete verdankt, gebrauchte die Bezeichnung *Thermoelektrizität*, welche aber wegen ihrer anderweitig schon festgelegten Bedeutung nicht zur Annahme gelangte.

Theoretisch behandelt ist diese scheinbare pyroelektrische Erregung von *Voigt*[57]) für den Fall oberflächlicher Erwärmung oder Abkühlung einer Kristallkugel, für welchen Beobachtungen an Quarz nach dem *Kundt*schen[58]) Bestäubungsverfahren von *Röntgen*[59]) vorlagen.

Die primären *wahren* pyroelektrischen Momente, d. h. diejenigen, welche nicht von den die Temperaturänderung begleitenden Deformationen herrühren, sondern rein thermischen Ursprungs sind[60]), lassen sich im allgemeinsten Falle für hinreichend kleine Temperaturänderungen τ durch die Formeln

$$(52) \qquad \mathfrak{P}_x = r_1 \tau, \quad \mathfrak{P}_y = r_2 \tau, \quad \mathfrak{P}_z = r_3 \tau$$

darstellen. Die Konstanten r reduzieren sich in der Gruppe 2. auf zwei und in allen hemimorphen Gruppen auf eine einzige.

Im allgemeinen werden sich solche wahre pyroelektrische Momente mit scheinbaren, durch Deformationen hervorgerufenen, überlagern. Um dies zu berücksichtigen, stelle man die Momente in Erweiterung des Ansatzes (44) als Funktionen der *Spannungen* und der Temperaturänderung dar; dabei tritt letztere mit anderen Koeffizienten p_1, p_2, p_3 multipliziert auf, welche mit den r_h durch die Relationen

$$(53) \qquad p_h = \sum^k a_k e_{hk} + r_h$$

verbunden sind, worin die a_k die thermischen Deformationen des Kristalls (a_1, a_2, a_3 die Ausdehnungskoeffizienten parallel den Koordinatenachsen, a_4, a_5, a_6 die Änderungen der Winkel zwischen letzteren für 1^0 Temperaturerhöhung) bedeuten. Die Konstanten p_h (die für dieselben Kristallgruppen verschwinden, bzw. sich auf eine oder zwei reduzieren, wie die r_h) werden als die „pyroelektrischen Konstanten"

57) *W. Voigt,* Allg. Theorie usw. § 11 und 12; Göttinger Nachr. 1894, Nr. 4, p. 26.

58) *A. Kundt,* Ann. Phys. Chem. 20 (1883), p. 592. Diese Methode ist sehr geeignet zur qualitativen Untersuchung der Pyroelektrizität.

59) *W. C. Röntgen,* Ann. Phys. Chem. 19 (1883), p. 513.

60) Das Vorhandensein wahrer Pyroelektrizität ist durch Messungen von *W. Voigt* am Turmalin nachgewiesen (Göttinger Nachr. 1898, Nr. 2; Ann. Phys. Chem. 66 (1898), p. 1030), wobei sich ergab, daß 20 % der ganzen beobachteten Erregung „wahre", 80 % „falsche" Pyroelektrizität waren. Es ist übrigens bemerkenswert, daß bei allen bisher daraufhin untersuchten pyroelektrischen Kristallen das Vorzeichen der Erregung mit demjenigen übereinstimmt, welches sich gemäß dem piëzoelektrischen Verhalten aus der thermischen Deformation bestimmt (vgl. *J.* u. *P. Curie,* Paris C. R. 91 (1880), p. 294; *W. C. Röntgen,* Ann. Phys. Chem. 19 (1883), p. 513); daraus folgt, daß jedenfalls immer die „falsche" Pyroelektrizität überwiegt.

schlechthin bezeichnet, weil sie die unter gewöhnlichen Umständen (nämlich bei verschwindenden Spannungen) auftretende pyroelektrische Erregung bestimmen.

Mit Hilfe des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik läßt sich zeigen[61]), daß mit ihrem Vorhandensein ein *umkehrbarer Wärmeeffekt* verknüpft ist, nämlich eine Temperaturänderung des bei ausgeschlossenem Wärmeaustausch in ein elektrisches Feld gebrachten Kristalles vom Betrage

$$\tau = -\frac{T}{\mathfrak{J} c s}(p_1 \mathfrak{E}_x + p_2 \mathfrak{E}_y + p_3 \mathfrak{E}_z), \tag{54}$$

falls T die absolute Temperatur, $\mathfrak{J}$ das mechanische Wärmeäquivalent, c die spezifische Wärme, s die Dichte des Kristalls ist. Diesen „elektrokalorischen Effekt“ haben *Straubel*[62]) und *Fr. Lange*[63]) am Turmalin experimentell nachgewiesen und ihn nach Vorzeichen und absoluter Größe in Übereinstimmung mit vorstehendem theoretischen Resultat gefunden.

Es sei hier noch erwähnt, daß auch für *isotrope* oder zentrisch-symmetrische kristallinische Dielektrika nach dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik eine Wärmewirkung der elektrischen Erregung zu folgern ist[64]), sofern die Dielektrizitätskonstanten sich mit der Temperatur ändern; diese Wirkung ist aber dem Quadrate der Feldstärke proportional, kehrt sich also nicht mit der Richtung des Feldes um.

12. Molekulartheorien der Piëzo- und Pyroelektrizität. Zur Erklärung der Pyroelektrizität des Turmalins nahm Lord *Kelvin*[65]) an, daß die Moleküle desselben ein mit der Temperatur veränderliches, permanentes elektrisches Moment besitzen, daß also ein solcher Kristall das elektrische Analogon zu einem permanenten Magneten sei. Diese Vorstellung hat *Riecke*[66]) auf alle piëzo- und pyroelektrisch erregbaren Kristalle ausgedehnt, indem er jedes Molekül von einem System positiver und negativer elektrischer Pole umgeben annimmt, welche in den (als isotrope Kugeln behandelten) Molekülen selbst elektrische Momente influenzieren. Durch die mit elastischen oder thermischen Deformationen verbundenen gegenseitigen Lagenänderungen der Moleküle ändern sich auch die influenzierten Momente,

---

61) Lord *Kelvin,* Math. phys. papers 1, p. 316, 1877.

62) *R. Straubel,* Göttinger Nachr. 1902, Heft 2.

63) *Fr. Lange,* Diss. Jena 1905.

64) *G. Lippmann,* Ann. chim. phys. (5) 24 (1881), p. 171.

65) Lord *Kelvin,* Nichols Cyclopaedia of Phys. Sc. 1860; Math. phys. papers 1, p. 315.

66) *E. Riecke,* Göttingen Abhandl. d. Ges. d. Wiss. 38, 1892.

und diese den Deformationen proportional zu setzenden *Änderungen* sind es nach der *Riecke*schen Theorie, welche die beobachtbaren piëzo- oder pyroelektrischen Wirkungen verursachen; denn die etwa schon im Normalzustande vorhandenen permanenten Momente selbst wären durch eine kompensierende elektrische Oberflächenbelegung des Kristalls der Wahrnehmung entzogen. *Riecke* hat gezeigt, daß man auf Grund dieser Hypothese zu den allgemeinen Grundgleichungen der *Voigt*schen Theorie gelangt, wenn man den einzelnen azentrischen Kristallgruppen je nach ihrer Symmetrie eins der folgenden fünf Polsysteme oder gewisse Kombinationen derselben zuschreibt:

I. Das *einachsige* Polsystem, aus zwei entgegengesetzt gleichen Polen bestehend (für sich allein ausreichend in den Gruppen 1, 2, 3, 5, 7 und 15).

II. Das *trigonale* Polsystem: abwechselnd entgegengesetzte Pole in den Ecken eines regulären Sechsecks, dessen Mittelpunkt mit dem des Moleküls zusammenfällt (allein ausreichend für Gruppe 17).

III. Das *dihexagonale* Polsystem: abwechselnd + und — Pole in den Ecken zweier regulärer Zwölfecke, die in zwei parallelen Ebenen liegen und um 30^0 gegeneinander gedreht sind.

IV. Das *ditetragonale* Polsystem, analog dem vorigen, nur mit Achtecken statt Zwölfecken gebildet.

V. Das *tetraëdrische* Polsystem, vier + und vier — Pole in den Ecken eines Würfels, die gleichnamigen die Ecken je eines regulären Tetraëders bildend (in den Gruppen 4, 9, 19, 20 allein auftretend).

Da diese Polsysteme zum Teil höhere Symmetrie besitzen, als die Kristalle der betreffenden Gruppe, und da ihre Wahl überhaupt einigermaßen willkürlich erscheint, so hat *Voigt* die Molekulartheorie der Piëzoelektrizität in der Weise abgeändert, daß er über die Polsysteme selbst zunächst keine spezielle Annahme macht, aber ihnen *Potentiale* zuschreibt, welche die Symmetrie der Kristallgruppe besitzen[67]). Spezielle solche Potentiale erhält man nach dem Bildungsgesetz[68])

$$\psi = \varkappa \frac{\partial^\nu \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial l_0^\alpha \partial l_1^\beta \partial l_2^\gamma \ldots}, \tag{55}$$

d. h. durch wiederholte Differentiation des *Newton*schen Elementarpotentials nach bestimmten Richtungen l_0, l_1, ... Entsprechende Polsysteme lassen sich leicht angeben; außerdem, daß sie der krystallographischen Symmetrie vollständig entsprechen, erscheint es als ein

67) *W. Voigt*, Göttinger Nachr. 1893, p. 649.

68) Vgl. Art. *Meyer-Burkhardt* über Potentialtheorie II A 7b Nr. 4, p. 470.

Vorzug, daß sie selbst kein permanentes elektrisches Moment besitzen (sofern $\nu \geqq 2$, was immer der Fall ist). Denn durch gewisse Beobachtungen[69]) ist wahrscheinlich gemacht, daß ein solches selbst bei dem stark pyroelektrischen Turmalin nicht in merklicher Intensität existiert, bzw. nur von solcher Größenordnung ist, daß es bei einer von der gewöhnlichen nicht sehr verschiedenen Temperatur verschwinden würde.

Voigt hat (l. c. p. 669) noch eine von der vorstehenden etwas abweichende molekulartheoretische Erklärung der Pyro- und Piëzoelektrizität gegeben, welche sich der Vorstellung der Elektronentheorie von der Konstitution der Atome besser einfügt, indem sie die *ganze* elektrische Wirkung der Moleküle ihren „Polsystemen" zuschreibt und annimmt, daß sich die einzelnen „elektrischen Pole" (Elektronen) desselben Moleküls infolge einer Temperaturänderung oder elastischen Deformation des Kristalls *gegeneinander verschieben*, und zwar verschieden gelagerte Pole in verschiedener Weise. Auch nach dieser Vorstellung können also durch Deformationen elektrische Momente erregt werden, wenn im Normalzustande des Kristalls keine solchen vorhanden sind, und sie führt ebenfalls zu den von der allgemeinen *Voigt*schen Theorie (vgl. Nr. 8) vorausgesetzten und durch die Erfahrung bestätigten linearen Beziehungen zwischen diesen Momenten und den sie erzeugenden Deformationen oder Spannungen.

13. Zentrische Pyro- und Piëzoelektrizität[70]). Nach der zuletzt erörterten Molekularvorstellung ist zu erwarten, daß auch *zentrisch symmetrische* Kristalle einer pyro- und piëzoelektrischen Erregung fähig sein können, da ja auch ihre Moleküle mit Polsystemen behaftet sein werden, die durch Temperaturänderung und Deformation verändert werden können. Nur müssen hier die Polsysteme, der Kristallsymmetrie entsprechend, bei jeder Temperatur selbst zentrisch symmetrisch sein und dies auch im deformierten Kristall bleiben, da ja die Deformation eines Volumelements ein zentrisch symmetrischer Vorgang ist.

Die Moleküle werden hier also niemals elektrische Momente gewöhnlicher Art besitzen, und ihre elektrische Wirkung im Außenraum wird demnach ganz anderen Gesetzen folgen, als bei polar erregten Körpern. Das Potential eines solchen Polsystems ist allgemein durch eine Reihe von Gliedern von der Form (55) mit *gerader* Anzahl ν der Differentiationen darstellbar und reduziert sich in hinreichend großer

69) *W. Voigt,* Göttinger Nachr. 1896, Heft 3; Ann. Phys. Chem. 60 (1896), p. 368.

70) *W. Voigt,* Göttinger Nachr. 1905, p. 394.

Entfernung — also jedenfalls außerhalb des Kristalls — auf die Glieder mit $\nu = 2$. Diese kann man auf die Form bringen:

$$(56) \qquad \psi_2 = \frac{1}{4\pi}\left\{ m_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial l_1^2} + m_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial l_2^2} + m_3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial l_3^2} \right\},$$

wo l_1, l_2, l_3 drei zueinander senkrechte Richtungen, und m_1, m_2, m_3 Konstanten sind, welche die Natur eines Tensortripels mit den Achsenrichtungen l_1, l_2, l_3 besitzen. Man kann obiges Potential deuten als dasjenige eines Polsystems aus je vier gleichstarken, paarweise entgegengesetzten Polen, die in der Reihenfolge $+ - - +$ oder $- + + -$ auf den Geraden l_1, l_2, l_3 angeordnet sind; die m_1, m_2, m_3, welche *Voigt* als Momente 2. Ordnung bezeichnet, sind dann die Produkte aus der Ladung des einzelnen Pols und den beiden Abständen eines der äußeren Pole von den beiden mittleren (welche letzteren man übrigens auch in einen Doppelpol vereinigt denken kann). Drückt man die Differentialquotienten von $\frac{1}{r}$ nach den l_h durch diejenigen nach den Koordinaten aus, so erhält man

$$(56') \quad 4\pi\psi_2 = m_{11} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \cdots + \cdots + 2 m_{23} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} + \cdots + \cdots,$$

woraus ersichtlich ist, daß ein zentrisches Polsystem hinsichtlich seiner Wirkung in großer Entfernung durch *sechs* Parameter charakterisiert wird. — Das Potential eines Kristallstücks, dessen Moleküle derartige Polsysteme enthalten, ist also gegeben durch das Raumintegral

$$(57) \quad \Psi_2 = \frac{1}{4\pi}\int \left\{ M_{11} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \cdots + \cdots + 2 M_{23} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} + \cdots \right\} dS,$$

wo die M_{hk} die „Momente 2. Ordnung" bezogen auf die Volumeinheit sind. Durch zweimalige partielle Integration kann man dasselbe umgestalten in

$$(57') \begin{cases} \Psi_2 = \frac{1}{4\pi}\int \left\{ [\overline{M}_{11}\cos(n,x) + \overline{M}_{12}\cos(n,y) + \overline{M}_{13}\cos(n,z)] \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \cdots + \cdots \right\} d\sigma \\ \quad - \frac{1}{4\pi}\int \left\{ \left(\frac{\partial \overline{M}_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{M}_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{M}_{13}}{\partial z} \right) \cos(n,x) + \cdots + \cdots \right\} \frac{d\sigma}{r} \\ \quad + \frac{1}{4\pi}\int \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}}{\partial y} + \frac{\partial M_{13}}{\partial z} \right) + \cdots + \cdots \right\} \frac{dS}{r}. \end{cases}$$

Das zweite Oberflächen- und das Raumintegral stellen gewöhnliche *Newton*sche Potentiale einer Oberflächenbelegung und einer räumlich verteilten Ladung dar, die aber im Falle homogener Erregung (wie sie durch gleichförmige Temperaturänderung bzw. homogene Deformation

erzeugt würde) verschwinden; das erste Oberflächenintegral hingegen bedeutet das Potential einer die Oberfläche des Kristalls bedeckenden *elektrischen Doppelschicht*, die analog ist den in der Magnetostatik betrachteten magnetischen Doppelflächen (vgl. Art. *Gans* V 15, Nr. **29**), von denen sie sich aber dadurch unterscheidet, daß die Richtung ihres elektrischen Moments nicht senkrecht zur Oberfläche ist, da dessen Komponenten:

$$\frac{1}{4\pi}\{\overline{M}_{11}\cos(n,x)+\overline{M}_{12}\cos(n,y)+\overline{M}_{13}\cos(n,z)\} \text{ usw.}$$

nicht proportional mit $\cos(n,x)$, $\cos(n,y)$, $\cos(n,z)$ sind.

Temperaturänderungen werden nun eine für die Beobachtung bemerkbare Erregung der betrachteten Art hervorbringen, sobald die Momente 2. Ordnung $M_{11}, \ldots M_{12}$ Funktionen der Temperatur sind. Die Richtungen l_1, l_2, l_3 sind in diesem Falle bei Kristallen von rhombischer oder höherer Symmetrie als kristallographisch ausgezeichnete Richtungen von vornherein bekannt. Wählt man dieselben als Koordinatenachsen, so wird aus (57):

$$\Psi_2=\frac{1}{4\pi}\int\left\{M_1\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}+M_2\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y^2}+M_3\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}\right\}dS. \tag{58}$$

Man erkennt hieraus, daß bei *regulären* Kristallen, wo nach Symmetrie bei gleichförmiger Erwärmung stets $M_1=M_2=M_3$ sein muß, Ψ_2 im Außenraum verschwindet, so daß also bei regulären Kristallen (wie bei isotropen Körpern) eigentliche zentrische Pyroelektrizität nicht vorkommen kann. Bei allen Kristallen des rhomboëdrischen, hexagonalen und tetragonalen Systems erfordert die Symmetrie, wenn man die *Z*-Achse in die ausgezeichnete Symmetrieachse legt, die Gleichheit von M_1 und M_2, und es wird bei homogener Erregung (d. h. im ganzen Kristall gleicher Temperaturänderung):

$$\Psi_2=\frac{1}{4\pi}(M_3-M_1)\int\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}dS \tag{59}$$

$$=\frac{1}{4\pi}(M_3-M_1)\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\cos(n,z)\,d\sigma.$$

Bei einem von lauter gleichartigen Flächen begrenzten Kristallpolyëder (z. B. einem Rhomboëder) tragen danach alle Flächen eine gleiche Doppelbelegung. Führt man in jeder Kristallfläche ein Achsensystem ξ, η ein, dessen ξ-Achse in deren Hauptschnitt (der Ebene (n,z)) liegt, so ist

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}=\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\cos(n,z)+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\cos(\xi,z),$$

und man erhält aus (59)

$$(60)\quad \Psi_2 = \frac{M_3 - M_1}{4\pi} \sum \left\{ \cos^2(n,z) \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \cos(n,z)\cos(\xi,z) \int\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} d\xi d\eta \right\},$$

wo die Summe über alle Flächen zu erstrecken ist. Der erste Teil der Summe ist das Potential einer den ganzen Kristall umgebenden, überall gleichen *gewöhnlichen* Doppelbelegung, welches im Außenraum Null ist; der zweite Teil läßt sich aber durch partielle Integration in *Randintegrale* überführen und stellt also das Potential *linearer Ladungen der Kanten* dar. Man hat hier also einen Fall, wo *linienförmig* verteilte elektrische Ladungen in der Natur vorkommen können. Ähnliches ergibt sich auch für Prismen *rhombischer* Kristalle, deren Prismenkanten einer Symmetrieachse parallel sind; außer linearen Ladungen dieser Kanten, die bei den zur X-, Y-, Z-Achse parallelen Prismen mit $M_3 - M_2$, $M_1 - M_3$, $M_2 - M_1$ proportional (und für die vier Kanten desselben Prismas abwechselnd entgegengesetzt) sind, treten hier allerdings noch Doppelbelegungen der Endflächen auf.

Beobachtungen über zentrisch symmetrische pyroelektrische Erregung sind in großer Zahl beschrieben worden, doch handelt es sich dabei in den meisten Fällen um Kristalle, die nachweislich aus azentrisch erregbaren Teilen in zentrischer Gruppierung zusammengesetzt sind, wodurch das elektrische Verhalten des ganzen Kristalls scheinbar zentrisch symmetrisch wird. Eigentliche zentrische Pyroelektrizität ist jedoch durch Beobachtungen von *Voigt*, die an passend geschliffenen Präparaten angestellt wurden, für Kalkspat, Dolomit, Topas, Baryt und Cölestin wahrscheinlich gemacht[70]).

Es ist danach zu erwarten, daß auch *zentrische Piëzoelektrizität* existiert. Die Gesetze derselben erhält man nach Analogie derjenigen der azentrischen Piëzoelektrizität, indem man die auf ein beliebiges Koordinatensystem bezogenen elektrischen Momente 2. Ordnung $M_{11}, \ldots M_{12}$ linearen Funktionen der Deformations- oder Spannungskomponenten gleichsetzt, also entweder

$$(61)\quad \begin{cases} M_{11} = \alpha_{11}x_x + \alpha_{12}y_y + \alpha_{13}z_z + \alpha_{14}y_z + \alpha_{15}z_x + \alpha_{16}x_y, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

oder

$$(61')\quad \begin{cases} M_{11} = \beta_{11}X_x + \beta_{12}Y_y + \beta_{13}Z_z + \beta_{14}Y_z + \beta_{15}Z_x + \beta_{16}X_y, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Die Zahl der konstanten Parameter dieser Ansätze, welche im

allgemeinen 36 beträgt, reduziert sich wegen der Tensornatur der M_{hk} durch Einführung der Symmetrieeigenschaften in analoger Weise, wie die der Konstanten der inneren Reibung oder der in Nr. **3** eingeführten Konstanten δ_{hk} (vgl. Anm. 13). Es folgt daraus unter anderem, daß zentrische Piëzoelektrizität auch bei regulären Kristallen und isotropen Körpern möglich sein würde. Die Anwendung des obigen Ansatzes (61′) auf Prismen rhombischer Kristalle, deren Längsrichtung einer kristallographischen Symmetrieachse parallel ist, ergibt, daß durch *longitudinalen Druck* deren Längskanten abwechselnd entgegengesetzte Ladungen annehmen (analog wie bei der pyroelektrischen Erregung). Die Existenz dieser zentrischen piëzoelektrischen Erregung hat *Voigt* durch Versuche an Topas, Baryt und Cölestin, sowie an Kalkspat, wahrscheinlich gemacht.

14. Pyro- und Piëzomagnetismus. *Magnetische* Erscheinungen, welche der Pyro- und Piëzoelektrizität analog wären, sind mit Sicherheit bisher nicht nachgewiesen. Wenn sie überhaupt existieren, so sind sie zum Teil bei anderen Symmetriegruppen zu erwarten, als die analogen elektrischen Erscheinungen, weil das magnetische Feld die Natur eines *axialen* Vektors (vgl. Art. *Abraham* IV C 14, Nr. **3**) besitzt, und sich daher bei der magnetischen Erregung den kristallographischen Symmetrieelementen ein *Zentrum der Symmetrie* superponiert. *Pyromagnetismus,* d. h. ein von der Temperatur abhängiges permanentes magnetisches Moment, könnten nach Symmetrie außer den triklinen und monoklinen Kristallen nur diejenigen rhomboëdrischen, hexagonalen und tetragonalen besitzen, bei welchen sowohl zur ausgezeichneten Symmetrieachse parallele Symmetrieebenen, als zu ihr senkrechte zweizählige Achsen fehlen (also z. B. die Kristalle der *paramorph-hemiëdrischen Gruppen*). *Piëzomagnetismus* hingegen könnte bei allen Gruppen, mit Ausnahme der Holoëdrie, enantiomorphen und hemimorphen Hemiëdrie des regulären Systems, vorkommen. Es sind hinsichtlich des piëzomagnetischen Verhaltens aber nur acht verschiedene Gruppen zu unterscheiden. Die entsprechenden Konstantensysteme sind von *W. Voigt* aufgestellt worden[71]). Durch die von demselben an verschiedenen Kristallen angestellten Versuche konnten bisher mit Sicherheit nur obere Grenzwerte für die etwa vorhandenen pyro- und piëzomagnetischen Momente nachgewiesen werden.

---

71) *W. Voigt,* Göttinger Nachr. 1901, p. 1—19; Ann. Phys. 9 (1902), p. 94.

(Abgeschlossen im Oktober 1906.)

V 17. STATIONÄRE UND QUASISTATIONÄRE FELDER.

Von

P. DEBYE

IN MÜNCHEN.

Inhaltsübersicht.

I. Stationäres Feld.

A. Allgemeine Formulierung der Probleme.

1. Grundgleichungen.
2. Das innere elektrische Feld.
3. Das äußere elektrische Feld.
4. Das magnetische Feld; allgemeiner Fall.
5. Das magnetische Feld; spezieller Fall $\mu = \text{const.}$

B. Spezielle Behandlung körperlicher Leiter.

6. Die übliche Fragestellung.
7. Die *Green*sche Funktion.
8. Elektroden endlicher Abmessungen. Halbraum. Kugel.
9. *Kirchhoffs* Methode zur Bestimmung der Leitfähigkeit. Parallelopiped. Kreiszylinder.
10. *Nobili*sche Ringe.
11. Inhomogene Leiter.
12. Näherungsweise Berechnung des Widerstandes. Draht von variabelem Querschnitt. Übergangswiderstand.

C. Flächenleiter.

13. Grundgleichungen. Übliche Fragestellung.
14. Zusammenhang mit der Theorie der Flächen.
15. Ebene Platten.
16. Gekrümmte Platten.

D. Lineare Leiter.

17. Grundgleichungen.
18. Das äußere Feld.
19. Spezielle Fälle der Stromverzweigung: *Wheatstone*sche Brücke, usw.

20. Das magnetische Feld in speziellen Fällen: Einzelner gerader Draht, zwei oder mehrere parallele gerade Drähte.
21. Das magnetische Feld eines Kreisstroms.
22. Das magnetische Feld einer Spule.

II. Quasistationäres Feld.

A. Allgemeines.

23. Grundgleichungen und Potentiale.
24. Die Energiegleichung.

B. Spezielles über Körper- und Flächenleiter.

25. Körperliche Leiter.
a) Ruhende Körper.
b) Bewegte Körper.
26. Flächenleiter.

C. Lineare Leiter.

27. Die gewöhnlichen Differentialgleichungen für Stromkreise ohne Kapazität. Definition der Induktionskoeffizienten.
28. Die Differentialgleichungen für Stromkreise mit Kapazität.
29. Die Energiegleichung.
30. Induktionskoeffizienten für geradlinige Leiter. Der mittlere geometrische Abstand R.
31. Werte für R in speziellen Fällen.
32. Werte für die Induktionskoeffizienten in speziellen Fällen.
a) Geradlinige Leiter.
b) Kreisförmige Leiter.
33. Spezielle Fälle von Stromkreisen mit zeitlich veränderlicher elektromotorischer Kraft. Der Widerstandsoperator.
34. *Wheatstone*sche Brücke für Wechselstrom.

III. Ponderomotorische Wirkungen.

35. Berechnung der Kräfte zwischen Strömen.
36. Galvanometer.
37. Das ballistische Galvanometer.

Literatur.

J. C. Maxwell, Treatise on electricity and magnetism 2 Vol., Oxford 1 (1873); 2 (1881); 3 (1892).

C. Neumann, Die elektrischen Kräfte, Leipzig 1873.

G. Wiedemann, Die Lehre von der Elektrizität, Braunschweig, 1. Aufl., 3 Bde, 1872; 2. Aufl., 4 Bde, 1893.

E. Mascart et *J. Joubert,* Leçons sur l'électricité et le magnétisme, 2 Vol., Paris 1882.

F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie des Potentials, Leipzig 1887.

H. Poincaré, Electricité et optique, Paris, 1 (1890/91); 2 (1901).

O. Heaviside, Electrical papers 2 Vol., London 1892.
— Electromagnetic theory 2 Vol., London 1893, 1899.
A. Heydweiller, Hilfsbuch für die Ausführung elektrischer Messungen, Leipzig 1892.
F. Bedell and *A. C. Crehore,* Alternating currents, Ithaca N. Y., 1 (1892); 4 (1904).
P. Drude, Physik des Äthers, Stuttgart 1894.
W. Voigt, Kompendium der theoretischen Physik, Leipzig 1895.
E. Cohn, Das elektromagnetische Feld, Leipzig 1900.
H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik nach Riemanns Vorlesungen in vierter Auflage neu bearbeitet, Braunschweig 1900.
A. Russell, A Treatise on the theory of alternating currents, 2 Vol., Cambridge 1904—06.
M. Abraham und *A. Föppl,* Theorie der Elektrizität, Leipzig, 2 Bde; 1. Band, 1. Aufl. 1894, 2. Aufl. 1904, 3. Aufl. 1907.
H. Burkhardt, Oscillierende Funktionen, Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. Bd. 10, 1909.
F. Orlich, Kapazität und Induktivität, Braunschweig 1909.

Bezeichnungen.

Die Bezeichnungen allgemeiner Größen, wie bei *H. A. Lorentz,* Enc. d. math. Wiss. V 13.

I. Stationäres Feld.

A. Allgemeine Formulierung der Probleme.

1. Grundgleichungen. Wenn in Leitern zeitlich unveränderliche eingeprägte elektrische Kräfte $\mathfrak{E}^e$ vorhanden sind, so ist im allgemeinen eine stationäre Strömung der Elektrizität möglich. Das zugehörige elektromagnetische Feld, definiert durch die elektrischen, resp. magnetischen Feldstärken $\mathfrak{E}$, resp. $\mathfrak{H}$, wird für isotrope Körper, auf die wir uns hier beschränken, beschrieben durch die Maxwellschen Gleichungen[1]):

$$\text{(I)} \qquad 0 = \operatorname{rot} \mathfrak{E},$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{\sigma}{c}(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e) = \operatorname{rot} \mathfrak{H}.$$

Die eingeprägten elektrischen Kräfte sind die Energiequellen, aus denen die mit dem (spezifischen) Strom

$$\text{(III)} \qquad \mathfrak{J} = \sigma(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e) = \sigma \mathfrak{E}^t$$

verbundene Wärmeentwicklung gedeckt wird. Letztere hat pro Zeit- und Volumenelement den Wert

$$\text{(IV)} \qquad q = \mathfrak{J}\mathfrak{E}^t = \sigma(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e)^2.$$

1) Vgl. *Maxwell*sche Theorie Art. *H. A. Lorentz* V 13, Nr. 6 und Nr. 9. Wir erinnern daran, daß hier wie im Artikel von *H. A. Lorentz* der Index e die „eingeprägte", der Index t die „totale" elektrische Kraft andeutet und bemerken, daß auch wir die dort erklärten rationellen Einheiten (V 13, Nr. 7) benutzen.

Da nach (I) ein skalares Potential existiert, können wir schreiben:[2])

$$(1)\qquad \mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \varphi;$$

nach (II) gilt dann für φ die Bedingungsgleichung

$$(2)\qquad \operatorname{div} \sigma \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{div} \sigma \mathfrak{E}^e,$$

oder bei räumlich konstanter Leitfähigkeit

$$(2')\qquad \Delta \varphi = \operatorname{div} \mathfrak{E}^e.$$

Nur in dem besonderen Fall, daß die eingeprägten elektrischen Kräfte wirbelfrei verteilt sind, ist keine Strömung möglich. Betrachtet man nämlich einen Körper, der ganz in einem Nichtleiter eingebettet ist, so daß ihm durch seine Begrenzung hindurch kein Strom zugeführt werden kann, so liefern die beiden nach der obigen Voraussetzung gültigen Gleichungen:

$$(3)\qquad \operatorname{div} \sigma(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e) = \operatorname{rot}(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e) = 0,$$

zusammen mit der Grenzbedingung[3])

$$(4)\qquad \mathfrak{E}_n + \mathfrak{E}_n^e = 0,$$

auf Grund des *Green*schen Satzes, unmittelbar überall im Innern des Körpers:

$$(5)\qquad \mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e = 0.$$

Der Fall der rotationslosen Verteilung der $\mathfrak{E}^e$ tritt ein bei jedem aus solchen gleichtemperierten Körpern bestehenden Kreis, in denen ein eventueller Strom keine chemischen Änderungen hervorbringt (Metalle). Die eingeprägten Kräfte $\mathfrak{E}^e$ und damit auch nach (5) die Feldstärken $\mathfrak{E}$ verschwinden im Innern eines solchen Kreises überall mit Ausnahme der Übergangsschichten zwischen den verschiedenen Metallen. Hier nehmen sie so große Werte an, daß das durch eine Übergangsschicht hindurch erstreckte Linienintegral: $\int \mathfrak{E}\, ds$ einen endlichen Wert erhält. Die Tatsache, daß nach Gleichung (I) das betrachtete Linienintegral nur von der Wahl der Endpunkte des Integrationsweges abhängt, ist gleichbedeutend mit dem *Volta*schen Spannungsgesetz[4]).

2. Das innere elektrische Feld. Wir denken uns zunächst einen Körper mit stetig veränderlicher Leitfähigkeit eingebettet in einen Nichtleiter und betrachten die eingeprägten elektrischen Kräfte als gegebene Größen. Um das elektrische Feld (und damit zu gleicher

---

2) Vgl. *Maxwell*sche Theorie Art. *H. A. Lorentz* V 13, Nr. 14.

3) Vgl. Nr. 2 dieses Artikels.

4) Vgl. Elektrostatik und Magnetostatik Art. *R. Gans* V 15, Nr. 20.

Zeit die Stromlinien), im Innern dieses Körpers zu bestimmen, haben wir zunächst Gleichung (2):

$$\operatorname{div} \sigma \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{div} \sigma \mathfrak{E}^e;$$

hierzu treten noch die Grenzbedingungen an der Oberfläche. Über diese sagt Gleichung (I) aus, daß die tangentiellen Komponenten der elektrischen Kraft $\mathfrak{E}$ stetig übergehen, Gleichung (II), daß die Normalkomponente der totalen elektrischen Kraft $\mathfrak{E}^t = \mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e$ verschwindet[5]). In Formeln:

$$\mathfrak{E}_{h_i} = \mathfrak{E}_{h_a}, \tag{6}$$

$$\mathfrak{E}^t_{n_i} = 0, \tag{7}$$

oder durch das Potential ausgedrückt

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial h}\right)_i = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial h}\right)_a, \tag{6'}$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_i = \mathfrak{E}^e_n. \tag{7'}$$

Hierbei bedeutet h eine in die Oberfläche fallende, n die zur Oberfläche senkrechte Richtung; i bezieht sich auf das Innere, a auf das Äußere des betrachteten Körpers.

Man zeigt leicht mittels des *Green*schen Satzes, angewandt auf die Differenz zweier verschiedenen, als möglich vorausgesetzten, Lösungen, daß durch (2) und (7′) das Potential bis auf eine additive Konstante bestimmt ist. Diese ist für die Strömung im Innern des Körpers belanglos und hat ebenso wie (6) resp. (6′) nur Bedeutung für die Berechnung des äußeren elektrischen Feldes (vgl. Nr. **3**).

Besteht der betrachtete Stromleiter aus verschiedenen Körpern, so daß also σ sich unstetig ändert, so treten zur Grenzbedingung (7) resp. (7′) noch die Übergangsbedingungen zwischen den verschiedenen Leitern. So gilt z. B. an der Übergangsschicht zwischen Leiter (1) und Leiter (2)

$$\mathfrak{E}_{h_1} = \mathfrak{E}_{h_2}, \tag{8}$$

$$\sigma_1 \mathfrak{E}^t_{n_1} = \sigma_2 \mathfrak{E}^t_{n_2}, \tag{9}$$

oder durch das Potential ausgedrückt:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial h}\right)_1 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial h}\right)_2, \tag{8'}$$

$$\sigma_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_1 - \sigma_2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_2 = \mathfrak{E}^e_{n_1} - \mathfrak{E}^e_{n_2}. \tag{9'}$$

---

5) Vgl. *Maxwell*sche Theorie Art *H. A. Lorentz* V 13, Nr. **6**.

Ändern sich beim Durchgang durch die Übergangsschicht die tangentiellen Komponenten der eingeprägten elektrischen Kräfte stetig oder sind diese sogar vollends Null, wie das z. B. bei aneinander grenzenden Metallen der Fall ist, so können wir statt (8) auch schreiben

$$(8'') \qquad \mathfrak{E}_{h_1} + \mathfrak{E}^e_{h_1} = \mathfrak{E}_{h_2} + \mathfrak{E}^e_{h_2}.$$

Die Gleichungen (8″) und (9) liefern dann für die Stromkomponenten nach (III):

$$(10) \qquad \frac{\mathfrak{J}_{h_1}}{\sigma_1} = \frac{\mathfrak{J}_{h_2}}{\sigma_2},$$

$$(11) \qquad \mathfrak{J}_{n_1} = \mathfrak{J}_{n_2}.$$

In (10) und (11) ist das *Gesetz der Brechung der Stromlinien*[6]) enthalten. Bezeichnet man nämlich mit α_1 bzw. α_2 die Winkel $\left(< \frac{\pi}{2}\right)$, die $\mathfrak{J}_1$ bzw. $\mathfrak{J}_2$ mit der Normalen der Übergangsschicht machen, so erhält man aus diesen Gleichungen

$$(12) \qquad \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}.$$

Auch liegen „einfallender" und „gebrochener" Strom in einer Ebene. Es sei noch bemerkt, daß beim Übergang von einem Metall auf ein anderes das Potential φ sich nach den Bemerkungen am Schluß von Nr. **1** unstetig ändert; der Sprung ist aber nur abhängig von der Art der sich berührenden Metalle, so daß auch jetzt noch das Potential des ganzen Körpers bis auf *eine* willkürliche Konstante vollständig bestimmt ist.

3. Das äußere elektrische Feld. Denken wir uns den in Nr. 2 betrachteten Körper nur vom freien Äther umgeben, so gilt hier für das Potential[7])

$$(13) \qquad \Delta \varphi = 0.$$

Die Grenzbedingung (6) resp. (6′) liefert an der Oberfläche

$$(14) \qquad \varphi_a = \varphi_i + \text{const.},$$

wobei φ_i den Wert bedeutet, den das im Innern des Körpers gültige Potential an seiner Oberfläche annimmt und der bekannt ist, sobald das innere elektrische Feld bestimmt ist; φ_a bedeutet den Oberflächenwert des im Außenraum geltenden Potentials.

Wegen der in (14) vorkommenden unbekannten Konstante bleibt

6) *G. Kirchhoff*, Über den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige, Ges. Abh., p. 1. Siehe auch Ann. Phys. Chem. 64 (1845), p. 497.

7) Vgl. Elektrostatik und Magnetostatik Art. *R. Gans* V 15, Nr. **3**.

(auch unter Hinzunahme der Bedingungen im Unendlichen) in φ ein Bestandteil unbestimmt, der einer statischen Ladung des ganzen stromführenden Systems entspricht. Auch letzterer ist bekannt, sobald man noch die Gesamtladung des ganzen Systems kennt oder der Potentialwert für irgend einen Punkt des Körpers angenommen wird. Alsdann ist das Potential φ vollständig bestimmt und man erkennt, daß jeder elektrische Strom notwendig verknüpft ist mit ganz bestimmten Oberflächenladungen[8]) des durchströmten Körpers.

Die Bedingungen des Problems sind leicht zu verallgemeinern für den Fall, daß außer dem stromführenden Körper noch andere Leiter oder Dielektrika sich in seiner Umgebung befinden[7]).

4. Das magnetische Feld. Allgemeiner Fall. Unter der Annahme, daß die magnetische Erregung $\mathfrak{B}$ der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$ einfach proportional ist, so daß wir schreiben können[9])

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}, \tag{15}$$

ist durch (II) zusammen mit der Aussage, daß die magnetische Erregung quellenfrei verteilt ist:

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0 \tag{16}$$

das magnetische Feld bestimmt, sobald die Strömung bekannt ist. Letztere kann nach Nr. 2 ohne Rücksicht auf das Vorhandensein eines magnetischen Feldes für sich bestimmt werden. Durch die Annahmen (15) und (16) haben wir sowohl permanente Magnete, wie die Erscheinungen der Hysteresis von unsern Betrachtungen ausgeschlossen[10]). Nach (16) können wir setzen[11]):

$$\mathfrak{B} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}, \tag{17}$$

wo $\mathfrak{A}$ das sogenannte Vektorpotential bedeutet. Für $\mathfrak{A}$ gilt dann nach (II) und (15) unter Berücksichtigung von (III):

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = \frac{1}{c} \mathfrak{J}, \tag{18}$$

oder wenn μ abteilungsweise konstant ist, wie wir voraussetzen wollen:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = \frac{\mu}{c} \mathfrak{J}. \tag{18'}$$

Nach (17) ist zwar $\mathfrak{B}$ eindeutig durch $\mathfrak{A}$, aber nicht umgekehrt $\mathfrak{A}$

---

8) Vgl. die Beispiele in Nr. 8 und Nr. **20**.

9) Vgl. *Maxwell*sche Theorie Art. *H. A. Lorentz* V 13, Nr. 8.

10) Vgl. *Maxwell*sche Theorie Art. *H. A. Lorentz* V 13, Nr. **15** u. Nr. **19**; Elektrostatik und Magnetostatik Art. *R. Gans* V 15, Nr. **23**, Nr. **24**, Nr. **31** u. Nr. **32**.

11) Vgl. *Maxwell*sche Theorie Art. *H. A. Lorentz* V 13, Nr. **28**.

eindeutig durch $\mathfrak{B}$ bestimmt. Wir können und wollen deshalb noch voraussetzen, daß $\mathfrak{A}$ quellenfrei verteilt ist, in Formel:

$$\text{(19)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{A} = 0.$$

Mit Berücksichtigung von (19) kann man dann auch für jede der drei rechtwinkligen Koordinatenrichtungen x, y, z die Gleichung (18′) in der Form schreiben:

$$\text{(18″)} \qquad \Delta \mathfrak{A}_x = -\frac{\mu}{c}\mathfrak{J}_x, \qquad \Delta \mathfrak{A}_y = -\frac{\mu}{c}\mathfrak{J}_y, \qquad \Delta \mathfrak{A}_z = -\frac{\mu}{c}\mathfrak{J}_z.$$

Zu (18′), resp. (18″) und (19) treten zur vollständigen Bestimmung des magnetischen Feldes außer den Bedingungen im Unendlichen noch die Grenzbedingungen beim Übergang von einem Medium (1) auf ein Medium (2) hinzu[12]). Sie lauten nach (II) und (16) unter Berücksichtigung von (15):

$$\text{(20)} \qquad \mathfrak{H}_{h_1} = \mathfrak{H}_{h_2},$$

$$\text{(21)} \qquad \mu_1 \mathfrak{H}_{n_1} = \mu_2 \mathfrak{H}_{n_2}.$$

Die Gleichungen (20) und (21) enthalten das Gesetz der Brechung der magnetischen Kraftlinien analog wie (10) und (11) für die Stromlinien.

Ist speziell $\mu_2 >> \mu_1$ und weiß man, daß $\mathfrak{B}$ im Innern des stark magnetischen Körpers auch bei unendlich wachsendem μ endlich bleibt[13]), so kann man die Bedingung (20) näherungsweise ersetzen durch

$$\text{(21′)} \qquad \mathfrak{H}_{h_1} = 0,$$

mit andern Worten, die magnetischen Kraftlinien stehen im Körper 1 senkrecht zur Trennungsfläche 1 — 2, ebenso wie die Kraftlinien eines elektrostatischen Feldes senkrecht zur Oberfläche leitender Körper endigen.

Schließt man die stromführenden Körper derart durch Flächen aus, daß ohne diese zu durchdringen eine Umkreisung eines endlichen Stromes nicht mehr möglich ist, so kann man nach (II) in dem übrig bleibenden, nunmehr einfach zusammenhängenden Raum, an Stelle des Vektorpotentials $\mathfrak{A}$ ein eindeutiges, skalares Potential ψ einführen, so daß gesetzt werden kann:

$$\text{(22)} \qquad \mathfrak{H} = -\operatorname{grad} \psi.$$

Für dieses gilt dann nach (16) wieder die Gleichung[14])

$$\text{(23)} \qquad \operatorname{div} \mu \operatorname{grad} \psi = 0.$$

12) Vgl. *Maxwell*sche Theorie Art. *H. A. Lorentz* V 13, Nr. 6.

13) Das entgegengesetzte Verhalten zeigt $\mathfrak{B}$ z. B. im Innern eines stromdurchflossenen, magnetisierbaren Drahtes, wo die der Oberfläche parallele Komponente von $\mathfrak{B}$ mit unendlich wachsendem μ unendlich wird.

14) Vgl. Elektrostatik und Magnetostatik Art. *R. Gans* V 13, Nr. 3.

mit den Grenzbedingungen

$$(23') \qquad \psi_1 = \psi_2$$

$$(23'') \qquad \mu_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial n}\right)_1 = \mu_2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial n}\right)_2$$

für die Trennungsfläche zwischen den Körpern 1 und 2. Im allgemeinen ist ψ zur Beschreibung des magnetischen Feldes konstanter Ströme nicht geeignet. Eine Ausnahme macht jedoch der Fall der linearen Leiter, wo die oben betrachteten allgemeinen Flächen in berandete, doppelt überdeckte übergehen, an denen das Potential ψ einfache Unstetigkeiten besitzt[15]).

5. Das magnetische Feld. Spezieller Fall μ = const. Wenn die Permeabilität überall denselben Wert hat, geht die durch (18″), (20) und (21) definierte Randwertaufgabe in eine einfache Integrationsaufgabe über. Kombiniert man nämlich mittels des *Green*schen Satzes die drei Komponenten der Elementarlösung von (18″) für den Fall $\mathfrak{J} = 0$:

$$(24) \qquad \mathfrak{A}_x = \frac{1}{r}, \quad \mathfrak{A}_y = \frac{1}{r}, \quad \mathfrak{A}_z = \frac{1}{r}$$

mit den entsprechenden Komponenten des gesuchten Vektorpotentials, so erhält man ohne weiteres

$$(25) \qquad \mathfrak{A} = \frac{\mu}{4\pi c}\int \frac{\mathfrak{J}}{r}\, dS,$$

wobei das Integral über alle stromführenden Körper zu erstrecken ist.

Nach (15) und (17) erhält man aus (25) für die magnetische Feldstärke den Ausdruck

$$(26) \qquad \mathfrak{H} = \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi c}\int \frac{[\mathfrak{J}\mathfrak{r}]}{r^3}\, dS;$$

$\mathfrak{r}$ bedeutet dabei den Vektor vom Betrage r in der von dS nach dem Aufpunkte hinzeigenden Richtung.

Gleichung (26) entspricht dem *Biot-Savart*schen Gesetz[16]).

B. Spezielle Behandlung körperlicher Leiter.

6. Die übliche Fragestellung. In den in der Praxis vorkommenden Fällen liegen gewöhnlich die den Strom erzeugenden eingeprägten elektrischen Kräfte außerhalb des Körpers[17]), in dem man die Strö-

---

15) Für die nähere Ausführung sehe man Nr. 18 dieses Artikels.

16) Vgl. Standpunkt der Fernwirkung. Die Elementargesetze Art. *R. Reiff* und *A. Sommerfeld* V 12, Nr. 2.

17) Vgl. indessen Teil II dieses Artikels, wo die durch Bewegung in einem magnetischen Feld erzeugten elektrischen Kräfte zur Sprache kommen, welche

mung bestimmen will. Diesem wird der Strom zugeführt durch die Elektroden. Nur dann wenn letztere aus viel besser leitendem Material wie der Körper (streng genommen aus unendlich gut leitendem Material) bestehen, ist das Problem der Bestimmung der Stromlinien für den betrachteten Leiter ein in sich abgeschlossenes. Wir wollen die Voraussetzungen $\sigma = \infty$ für die Elektroden und $\mathfrak{E}^e = 0$ machen; das physikalische Problem deckt sich dann unter Berücksichtigung von (2), resp. (2') und sinngemäßer Anwendung von (8) und (9) mit dem folgenden mathematischen:

a) *Innerhalb des betrachteten Körpers ist eine Funktion* φ *zu bestimmen, die überall der Gleichung*

$$\operatorname{div} \sigma \operatorname{grad} \varphi = 0 \tag{2}$$

resp.

$$\Delta \varphi = 0 \tag{2'}$$

genügt, an den Elektroden A, B, $C, \ldots$ *konstante vorgeschriebene Werte* φ_A, φ_B, $\varphi_C, \ldots$ *annimmt und an den übrigen Teilen der Begrenzung* $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ *liefert.*

Ist φ bestimmt, so folgt $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{J}$ nach (1) und (III). Besteht der Leiter aus mehreren Teilen verschiedener Leitfähigkeit, so sind an den Übergangsschichten noch die Grenzbedingungen (10) und (11), sowie der *Volta*sche Potentialsprung zu beachten.

Nennt man die durch die einzelnen Elektroden $A, B, C, \ldots$ gehenden Ströme J_A, J_B, $J_C, \ldots$, so daß

$$J_A = \int_A \mathfrak{J}_n d\sigma, \quad J_B = \int_B \mathfrak{J}_n d\sigma, \ldots, \tag{27}$$

so erhält man aus (2) durch Multiplikation mit φ und Integration über das Volumen des Leiters nach dem *Green*schen Satz die Energiegleichung:

$$\varphi_A J_A + \varphi_B J_B + \cdots = \int \sigma \mathfrak{E}^2 dS = Q, \tag{28}$$

wo Q nach (IV) die ganze im Körper entwickelte *Joule*sche Wärme bedeutet.

Andererseits ergibt sich durch direkte Integration von (2) über das Volumen des Leiters die „Inkompressibilitätsbedingung“:

$$J_A + J_B + J_C + \cdots = 0. \tag{29}$$

---

bei genügend kleinen Geschwindigkeiten als eingeprägte elektrische Kräfte behandelt werden können.

Sind nur zwei Elektroden A und B vorhanden, so wird nach (29)

$$J_A = -J_B = J \tag{30}$$

und

$$Q = J(\varphi_A - \varphi_B), \tag{31}$$

und man erhält, wenn man noch den *Widerstand* R des Körpers einführt, durch den Ansatz

$$\varphi_A - \varphi_B = RJ, \tag{32}$$

aus (31) die Formel:

$$Q = RJ^2. \tag{31'}$$

Für den Fall, daß mehr Elektroden vorhanden sind, kann von einem Widerstande des Körpers nicht mehr die Rede sein.

Das unter a) definierte Problem kann noch erheblich vereinfacht werden durch die Annahme sehr kleiner kugelförmiger Elektroden[18]), welche in manchen Fällen vollkommen für die physikalischen Bedürfnisse ausreicht. Liegen nämlich die einzelnen Elektroden weit auseinander und sind bei Oberflächenelektroden die Krümmungsradien der benachbarten Oberfläche groß gegen ihre Dimensionen, so kann man dieselben als punktförmig betrachten, soweit nur Potentialwerte in einigem Abstand der Elektroden in Betracht gezogen werden. Man erhält dann die Fragestellung:

b) *Innerhalb des Leiters eine Funktion φ zu bestimmen, die überall der Gleichung*

$$\operatorname{div} \sigma \operatorname{grad} \varphi = 0, \tag{2}$$

resp.

$$\Delta \varphi = 0 \tag{2'}$$

genügt mit Ausnahme gewisser Punkte $a, b, \ldots, a', b', \ldots$, wo φ unendlich wird wie $\frac{A}{r}, \frac{B}{r}, \ldots, \frac{A'}{r}, \frac{B'}{r}, \ldots$.

Bedeuten $a', b', \ldots$ Pole im Inneren, $a, b, \ldots$ solche auf der Begrenzung des Körpers, so gilt analog zu (29) die Inkompressibilitätsbedingung in der Form:

$$4\pi(A' + B' + \cdots) + 2\pi(A + B + \cdots) = 0. \tag{29'}$$

Für die Berechnung der *Joule*schen Wärme, sowie des Widerstandes muß man den Elektroden wieder endliche Dimensionen zuschreiben (vgl. z. B. Nr. 8).

Zieht man nur Oberflächenelektroden in Betracht, so ist es natürlicher, sie als (kreisrunde) Scheibchen (Radius a) statt wie

---

18) Einige auf der Hand liegende Fälle, wo auch bei ausgedehnten Elektroden die Rechnung einfach wird, finden Erwähnung in Nr. 8.

oben als kleine Halbkugeln zu behandeln. Die Fragestellung a) läßt sich jetzt nach anderer Richtung vereinfachen. Wenn nämlich die früheren Voraussetzungen über die Kleinheit der Elektroden erfüllt sind, so kann man in ihrer Nähe die Oberfläche des Körpers als eben voraussetzen. Dann kommt das Problem a) in der Umgebung irgend einer Elektrode auf die Bestimmung des Potentials einer geladenen kreisförmigen leitenden Scheibe hinaus. Unter Benutzung der bekannten Lösung für diesen Fall[19]) wird jetzt die Fragestellung:

c) *Innerhalb des Leiters eine Funktion φ zu bestimmen, die überall der Gleichung*

$$\operatorname{div} \sigma \operatorname{grad} \varphi = 0, \tag{2}$$

resp.

$$\Delta \varphi = 0 \tag{2'}$$

genügt und für die auf der Begrenzung die Bedingungen gelten:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \qquad \textit{außerhalb der Elektroden,}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{J_M}{2\pi a_M \sigma} \frac{1}{\sqrt{a_M^2 - \varrho_M^2}} \qquad \textit{innerhalb der Elektroden.}$$

Hierbei bedeutet J_M den ganzen durch die Elektrode M hindurchgehenden Strom, ϱ_M den Abstand des betrachteten Punktes der Elektrode von ihrem Mittelpunkte, a_M ihren Radius. Das Problem ist einfacher wie das unter a) genannte, da im Falle c) die Oberflächenbedingung sich nur auf $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ bezieht.

7. Die Greensche Funktion. Wenn die Aufgabe der Bestimmung der Stromlinien in der Form c) vorliegt, ist es möglich sie zurückzuführen auf die Berechnung einer *Green*schen Funktion G, die nur von der Form des betrachteten Leiters abhängt. Hierzu bestimme man $G = G_{pq}^u$ so[20]), als Funktion der beiden Punkte p, q und des variabelen Aufpunktes u, daß sie im Innern des Körpers der Differential-

---

19) Vgl. Potentialtheorie Art. *H. Burkhardt* und *W. F. Meyer* II A 7 b, Nr. **15** sowie Elektrostatik und Magnetostatik Art. *R. Gaus* V 15, Nr. **12**.

20) *F. Klein*, Vorlesung über Potentialtheorie II. Teil Sommersemester 1888 oder auch *F. Pockels*, Über die partielle Differenzialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, Leipzig 1891, p. 249, wo u. a. über die Vertauschbarkeit von Pol und Aufpunkt berichtet wird. Vgl. auch Potentialtheorie Art. *H. Burkhardt* und *W. F. Meyer* II A 7 C, Nr. **18**. Vgl. für allgemeine Differentialgleichungen: Randwertaufgaben in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen Art. *A. Sommerfeld* II A 7 c. Eine experimentelle Bestätigung des Vertauschbarkeitssatzes (*V. Volterra*, Nuovo Cim. (3) 11 (1882), p. 188) lieferte *G Poloni*, Rend. Lomb. 15 (1882), p. 535.

gleichung (2) resp. (2') genügt, auf dessen Oberfläche $\frac{\partial G}{\partial n} = 0$ liefert und in den beiden Punkten p bzw. q unendlich wird, wie $\frac{1}{r_p}$ bzw. $-\frac{1}{r_q}$, unter r_p, r_q die Abstände von den Punkten p bzw. q verstanden. Die Funktion G^u_{pq} ist demnach (vgl. Fragestellung b, Nr. 6) das Potential eines elektrischen Stromes der durch unendlich kleine Elektroden in den beliebig gewählten Punkten p, resp. q zu-, resp. abgeführt wird. Durch Anwendung des *Green*schen Satzes erhält man dann für das gesuchte Potential φ:

$$(33) \qquad \varphi_p - \varphi_q = \frac{1}{4\pi} \int G \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma,$$

wobei das Integral über die Oberfläche des Leiters zu erstrecken ist; man sieht, daß das Potential nur bis auf eine beliebige Konstante φ_q bestimmt ist.

Statt der oben definierten *Green*schen Funktion G kann man auch eine andere[21]) $N = N_p{}^u$, die *F. Neumann*sche Funktion, einführen. Sie genügt auch der Gleichung (2) bzw. (2'), hat aber nur einen Pol p, indem sie sich verhält wie $\frac{1}{r_p}$ .und liefert auf der Oberfläche des Leiters $\frac{\partial N}{\partial n} = c = \text{const.}$ Sie ist demnach das Potential eines durch die unendlich kleine Elektrode bei p zugeführten Stromes, von der Stärke $4\pi\sigma$, welcher den Körper in gleichmäßiger Verteilung über die Oberfläche verläßt. Die Konstante c, die ersichtlich ein Maß für den Gesamtstrom ist, kann also nicht beliebig gewählt werden; sie liefert mit der Körperoberfläche multipliziert den Wert 4π (vgl. (29) und (29')). Durch diese Funktion ist φ auf Grund des *Green*schen Satzes darstellbar in der Form[22]):

$$(34) \qquad \varphi_p = \frac{1}{4\pi} \int N \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma - \frac{c}{4\pi} \int \varphi \, d\sigma.$$

Die Integrationen sind wieder über die Oberfläche des Leiters zu erstrecken, das zweite Integral repräsentiert die beliebige additive Konstante.

Bestimmt man die in N vorkommende beliebige Konstante so,

21) *Fr. Neumann,* Vorlesungen über die Theorie des Potentials, herausgegeben von *C. Neumann,* Leipzig 1887, p. 270. *Fr. Neumann* nennt N die charakteristische Funktion.

22) Nennt man die Körperoberfläche Σ, so kann statt dem zweiten Integral von (34) auch geschrieben werden $\frac{1}{\Sigma}\int \varphi \, d\sigma$, wonach dieses also den Mittelwert des Potentials auf der Oberfläche darstellt.

daß das über die Oberfläche des Leiters erstreckte Integral

$$\int N d\sigma = 0$$

wird, so gilt, wie man mittels des *Green*schen Satzes nachweist, der Vertauschungssatz:

$$N_p^u = N_u^p. \tag{35}$$

Unter Benutzung von (35) zeigt man leicht, daß, wenn man nach (34) das Potential in den Elektroden A, B, ... mittels der durch diese Elektroden gehenden Ströme J_A, J_B, J_C ausdrückt in der Form:

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi_A = a_{11} J_A + a_{12} J_B + a_{13} J_C + \cdots \\ \varphi_B = a_{21} J_A + a_{22} J_B + a_{23} J_C + \cdots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right. \tag{36}$$

die Koeffizienten a_{mn} nicht voneinander unabhängig sind. Vielmehr besteht die Beziehung:

$$a_{mn} = a_{nm}, \tag{37}$$

so daß bei ν Elektroden die betreffenden Potentiale sich mittels $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$ voneinander unabhängigen Koeffizienten in den durch sie hindurchgehenden Strömen ausdrücken lassen[23]).

8. Elektroden endlicher Abmessungen. Halbraum, Kugel. Das in Nr. 6 unter a) angeführte Problem fällt mit dem entsprechenden elektrostatischen zusammen, wenn man die Begrenzung des stromdurchflossenen Körpers so wählt, daß diese, wo sie nicht von Teilen der Oberfläche der geladenen Körper gebildet wird, aus Kraftlinien besteht. Stehen nur zwei auf die Potentialdifferenz V geladene Körper einander gegenüber in einem Medium mit der Dielektrizitätskonstante ε, so hat der, dem später vom Strom durchflossen zu denkende Teil der Anordnung eine Kapazität K von der Größe

$$K = \frac{\varepsilon}{V} \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma,$$

wo das Integral über den später als eine Elektrode fungierenden Oberflächenteil des betreffenden Körpers zu erstrecken ist. Andererseits ist der Widerstand des stromdurchflossenen Raumteiles

$$\frac{1}{W} = \frac{\sigma}{V} \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma,$$

wo σ die Leitfähigkeit dieses Raumes ist und das Integral dieselben Grenzen hat wie das obige. Allgemein hat man demnach zwischen

---

23) *G. Kirchhoff,* Über die Messung elektrischer Leitfähigkeiten, Monatsber. der Akademie der Wiss. Berlin, Juli 1880 oder auch Ges. Werke, p. 66.

W und K den Zusammenhang[24]):

(38) $$\frac{K}{\varepsilon} = \frac{1}{\sigma W}.$$

Als einfache hierzu gehörige Anordnung sei z. B. der Fall zweier konzentrischer Zylinderstücke als Elektroden erwähnt, deren Krümmungsradien r_1 und r_2 sind, während die seitliche Begrenzung von den zugehörigen Radien gebildet wird. Hier ist

$$K = \frac{\varepsilon\alpha}{\log\frac{r_2}{r_1}} \quad \text{und} \quad W = \frac{1}{\alpha\sigma}\log\frac{r_2}{r_1},$$

wenn die Radien den Winkel α miteinander machen.

Befindet sich innerhalb eines Halbraumes I von der Leitfähigkeit σ eine kleine unendlich gut leitende kugelförmige Elektrode, durch die dem Körper der Strom J zugeführt wird und ist die zweite Elektrode unendlich groß und unendlich weit entfernt, so läßt sich das Problem der Stromverteilung in der Form b) ohne weiteres mittels eines Spiegelungsverfahrens[25]) lösen. Für das Potential erhält man innerhalb des Leiters den Wert:

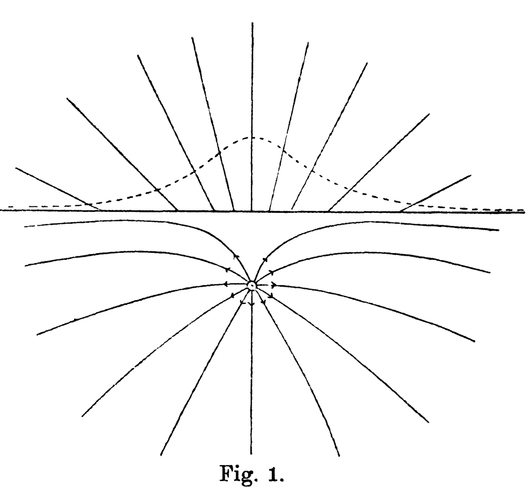


Fig. 1.

(39) $$\varphi_i = \frac{J}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),$$

wenn r_1 den Abstand vom Mittelpunkt der Elektrode, r_2 den Abstand von ihrem Spiegelbild in bezug auf die Grenzebene des Leiters bedeutet. Hieraus ergibt sich für den Widerstand des Halbraumes nach (32) der Wert:

(40) $$R = \frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2h}\right) \cong \frac{1}{4\pi\sigma a},$$

24) Vgl. hierzu *E. Cohn,* Das elektromagnetische Feld, Leipzig 1900, p. 155.

25) Vgl. hierzu Potentialtheorie, Art. *Burkhardt-Meyer,* II A 7b, Nr. **16** und Elektrostatik und Magnetostatik, Art. *R. Gans,* V 15, Nr. **13.** Es tritt jetzt insofern eine Abweichung auf, als beide Bildpunkte mit demselben Zeichen genommen werden müssen.

wobei a den Radius und h den Abstand der Elektrode von der Begrenzung bedeutet. Sowohl (39) wie (40) gelten nur näherungsweise, so lange $a << h$ ist.

Für den Fall, daß letztere Bedingung nicht zutrifft, daß man aber an der Kugelform der Elektrode festhält, kann das Problem gelöst werden durch Benutzung der bekannten Potentialverteilung[26]) zweier gleich großen gleich stark geladenen Kugeln. Die Symmetrieebene entspricht der Begrenzung des Leiters, an der die Elektrode also gespiegelt erscheint.

Das (39) entsprechende Potential im Außenraum II ist nach Nr. 2 einfach dargestellt durch

$$\varphi_a = \frac{J}{2\pi\sigma}\frac{1}{r_1}. \tag{39'}$$

Auf Grund von (39) und (41) wurde in Fig. 1 der Verlauf der elektrischen Kraftlinien gezeichnet. Die gestrichelte Kurve stellt die mit dem Strom verbundene statische Ladung der Oberfläche dar.

Liegt die Elektrode an der Oberfläche und kann man sie als Halbkugel betrachten, so wird der Widerstand

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma a}. \tag{40'}$$

Faßt man sie dagegen als Kreisscheibe vom Radius a auf, so erscheint das Problem in der Form c) und fällt dann nicht nur näherungsweise, sondern streng zusammen mit der Bestimmung des Potentials einer leitenden Kreisscheibe. Aus der bekannten Lösung[27]) für diesen Fall erhält man jetzt

$$R = \frac{1}{4\sigma a}. \tag{40''}$$

Das Spiegelungsverfahren läßt sich auch anwenden, wenn beide Halbräume (I und II) leiten[28]). Sind die Leitfähigkeiten σ_1 bzw. σ_2, so erhält man in I:

$$\varphi_1 = \frac{J}{4\pi\sigma_1}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\frac{1}{r_2}\right), \tag{41}$$

---

26) Vgl. Elektrostatik und Magnetostatik Art. *R. Gans,* V 15, Nr. **13**.

27) Das Potential der Kreisscheibe ergibt sich in elementarer Form durch Spezialisierung der betreffenden Lösung für das Ellipsoid, vgl. Potentialtheorie, Art. *H. Burkhardt-W. F. Meyer,* II A 7b, Nr. **15**. Man sehe auch Elektrostatik und Magnetostatik, Art. *R. Gans,* V 15, Nr. **12**.

28) Für den analogen Fall der Elektrostatik (verschiedene Dielektrizitätskonstanten) vgl. Elektrostatik und Magnetostatik, Art. *R. Gans,* V 15, Nr. **13**. Das theoretische Resultat wurde experimentell geprüft von *Joubin,* Paris C. R. 110 (1890), p. 37.

in II:

$$(41') \qquad \varphi_2 = \frac{J}{2\pi(\sigma_1 + \sigma_2)} \frac{1}{r_1},$$

und für den Widerstand

$$(42) \qquad R = \frac{J}{4\pi\sigma_1}\left(\frac{1}{a} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\frac{1}{2h}\right).$$

Auch für mehrere Elektroden bleibt natürlich das Verfahren anwendbar. So erhält man z. B. für den Widerstand zwischen zwei Elektroden mit den Radien a bzw. b, wenn durch jede der ganze Strom hindurchgeht, den Wert:

$$(42') \qquad R = \frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{2h_1} + \frac{1}{2h_2} - \frac{2}{l_1} - \frac{2}{l_2}\right),$$

ein Resultat, das in der Telegraphie Anwendung finden kann. Es bedeutet hierin l_1 den Abstand der Elektroden voneinander und l_2 den Abstand einer Elektrode vom Bild der anderen, während h_1 und h_2 die Tiefen der Elektroden unter der Oberfläche des Halbraums sind.

Bei der Kugel ist im Gegensatz zur Elektrostatik wegen der hier vorliegenden Grenzbedingung $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0\right)$ die *Thomson*sche Spiegelungsmethode nicht ohne weiteres anwendbar. Die Grundlage dieses Verfahrens wird bekanntlich gebildet von der Tatsache, daß man aus dem äußeren Potential φ_a, in der Form

$$\varphi_a = \frac{1}{\varrho} F\left(\frac{a}{\varrho}, \vartheta, \omega\right)$$

geschrieben, wobei ϱ, ϑ, ω Polarkoordinaten bedeuten, das innere Potential erhält zu

$$\varphi_i = \frac{1}{a} F\left(\frac{\varrho}{a}, \vartheta, \omega\right)$$

wenn noch a den Kugelradius bedeutet[29]). Diese Transformation läßt sich nun, wie *H. Helmholtz*[30]) bemerkt, dennoch im vorliegenden Falle verwenden, um in recht eleganter Weise das Strömungsproblem (in der Form b) Nr. 6) für die Kugel zu lösen. Wird der Strom J z. B. zu- resp. abgeführt durch zwei Elektroden im Innern, so kann man als ersten Teil des Potentials im Innern die (für den unendlichen Raum gültige) Funktion

$$(43) \qquad \varphi^0 = \frac{J}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

betrachten, wenn r_1 resp. r_2 die Abstände von den Elektroden bedeuten. Den bei diesem Ansatz durch die Oberfläche der Kugel hin-

29) Vgl. Elektrostatik und Magnetostatik, Art. *R Gans*, V 15, Nr. 13.

30) *H. Helmholtz*, Ann. Phys. Chem. 89 (1853), p. 211 und p. 253; Wissensch. Abh., Leipzig 1888, p. 494.

durchgehenden Strom kann man nun, was den Außenraum anbelangt, kompensieren durch den entgegengesetzten, von einer „elektromotorischen Oberflächenbelegung" der Kugel erzeugten, welche als elektrische Doppelschicht aufgefaßt werden kann. Setzt man für das Potential dieser Doppelschicht im Außenraum, entsprechend ihrer Entstehung durch Zusammenrücken zweier einfacher Belegungen:

$$\Phi = \frac{a^2}{\varrho^2} f'\left(\frac{a}{\varrho}, \vartheta, \omega\right),$$

so kann, da für $r > a$ überall $\Phi = \varphi^0$ sein soll, f aus (43) durch Integration ohne weiteres bestimmt werden. Die einer Doppelschicht angepaßten Transformationsformeln, welche aus den oben angegebenen für eine einfache elektrische Belegung geltenden durch Differentiation hervorgehen, ergeben dann ohne weiteres für den Zusatz φ^1, den man zu φ^0 im Innern der Kugel hinzufügen muß, damit die Grenzbedingung $\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\right)_{\varrho = a} = 0\right)$ erfüllt wird, die Formel:

$$(43') \qquad \varphi^1 = f\left(\frac{\varrho}{a}, \vartheta, \omega\right) + \frac{\varrho}{a} f'\left(\frac{\varrho}{a}, \vartheta, \omega\right).$$

Liegen die beiden Elektroden z. B. auf der Oberfläche der Kugel in den Punkten $\vartheta = \vartheta_1$, $\omega = 0$ und $\vartheta = \vartheta_2$, $\omega = 0$, so ergibt sich für φ^1 die Formel:

$$(44) \qquad \varphi^1 = \frac{J}{4\pi\sigma} \log \frac{a + r_2 - \varrho \cos \alpha_2}{a + r_1 - \varrho \cos \alpha_1},$$

wenn noch α_1 resp. α_2 die Winkel bedeuten, die der nach dem Aufpunkt gezogene Strahl mit den beiden durch die Elektroden gehenden Strahlen bildet. Die Lösung des vorliegenden Problems kann man auch durch Entwicklung nach Kugelfunktionen erhalten. Die betreffenden Reihen können nachher durch elementare Funktionen summiert werden. Die Aufgabe wurde in der Form b) gelöst von *W. M. Hicks*[31]) und *R. Felici*[32]); die *Neumann*sche charakteristische Funktion ist angegeben bei *C. Neumann*[33]). (Man beachte die verschiedenen Werte für den Widerstand, die sich ergeben, je nachdem das Problem in der Form b) oder c) angesetzt wird.)

---

31) *W. M. Hicks,* Messenger of mathematics 12 (1883), p. 183.

32) *R. Felici,* Tortolini Ann. 1854, p. 270. Vgl auch Fortschritte der Phys. 10 (1854), p. 548.

33) *C. Neumann,* Vorles. über die Theorie des Potentials von *F. Neumann,* Leipzig 1887, p. 273. Vgl. auch *A. Beer,* Einleitung in die Elektrostatik usw., Braunschweig 1865, p. 356 und *Riemann-Weber,* Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, 4. Aufl., Braunschweig 1900, 1, p. 457.

9. Kirchhoffs Methode zur Bestimmung der Leitfähigkeit. Parallelopiped. Kreiszylinder. Um die Leitfähigkeit zu bestimmen, benutzt *Kirchhoff*[34]) die durch nebenstehende Figur veranschaulichte Methode. K ist der zu untersuchende Körper, P ein bekannter Widerstand, G ein Differentialgalvanometer, E eine Stromquelle. Der Strom wird dem Körper bei 1 zugeführt, von 2 führt eine Leitung durch P zum Element zurück; an zwei Punkten 3 und 4 des Körpers und an den Enden des Vergleichswiderstandes P sind die beiden Zweige des Differentialgalvanometers angelegt. Die Widerstände in diesen Zweigen werden zweimal so abgeglichen, daß die Nadel des Galvanometers keinen Ausschlag zeigt. Bezeichnet man die hierzu nötigen Widerstände mit r und R bzw. r' und R' und nennt ϱ die Potentialdifferenz zwischen 3 und 4, dividiert durch den durch 1 und 2 hindurchgehenden Strom, für den Fall, daß zwischen 3 und 4 kein äußerer Strom kreist, so hat man zur Berechnung von ϱ auf Grund von Nr. 7 die Beziehung

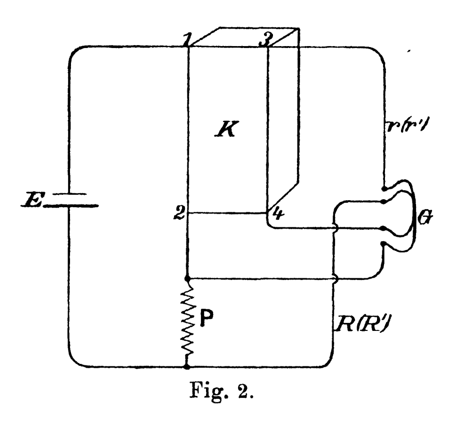


Fig. 2.

$$\frac{\varrho}{P} = \frac{r' - r}{R' - R}. \tag{45}$$

Um die Leitfähigkeit zu bestimmen, muß noch ϱ durch die Dimensionen des Körpers ausgedrückt werden. *G. Kirchhoff* führte diese Rechnung zuerst aus[35]) für ein rechtwinkliges Parallelopiped auf Grund der von *Grenhill*[36]) angegebenen Lösung des betreffenden Strömungs-

34) *G. Kirchhoff*, Berlin Monatsber. der Akad. d. Wiss. 1. Juli 1880 oder auch Ges. Werke, Leipzig 1882, p. 66. Angewandt wurde die Methode von *G. Kirchhoff* und *G. Hansemann*, Ann. Phys. Chem. 13 (1881), p. 406; vgl. auch *G. Kirchhoff*, Ges. Werke, Nachtrag, Leipzig 1891, p. 1. Die Methode wurde in etwas abgeänderter Form benutzt von *K. Strecker*, Ann. Phys. Chem. 25 (1885), p. 456, zur Auswertung der *Siemens*schen Quecksilbereinheit des Widerstandes.

35) *G. Kirchhoff*, Berlin Monatsber. der Akad. der Wiss. 1. Juli 1880 und Ges. Werke, Leipzig 1882, p. 71.

36) *Grenhill*, Proc. of the Cambr. Phil. Soc. 1879, p. 293 und auch *H. Niebour*, Diss. Leipzig 1886; Grunerts Archiv (2) 4 (1886), p. 337, sowie *Appel* und *A. Chervet*, C. R. 98 (1884), p. 98 und *A. Chervet*, Ann. de chim. et phys. (6) (1884), p. 259. Vgl. für den analogen Fall der Elektrostatik: Elektrostatik und Magnetostatik, Art. *R. Gans*, V 15, Nr. 13.

problems, welche durch fortgesetzte Spiegelung der Pole an den Seitenflächen erhalten und in Θ-Reihen umgerechnet werden kann. Er fand die Näherungsformel:

$$\varrho = \frac{1}{\sigma a}\frac{c}{a}\left(1 - \frac{a}{c}\,0{,}7272\right) \tag{46}$$

für den Fall, daß zwei Seiten dieselbe Länge a haben und die dritte Seite c, an deren Enden die Elektroden angelegt werden, groß gegen a ist und zeigt, daß selbst, wenn $\frac{c}{a} = 2$ wird, (46) noch eine sehr gute Näherung ist.

Auch für den Kreiszylinder, bei dem der Strom an den Enden seiner Mittellinie zugeführt wird und die beiden anderen Elektroden an den Endpunkten einer Erzeugenden liegen, führte er später die Rechnung durch[37]. Er setzt das Problem in der Form c) an und erhält dann mittels der Formeln für die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach *Bessel*schen Funktionen, indem er noch die Größe der Elektroden nur in erster Näherung berücksichtigt, für das Potential den Ausdruck:

$$\varphi = \frac{Ja}{\pi\sigma}\left\{\frac{z}{a} + \sum \frac{\sin\lambda_\nu \frac{z}{a}}{\cos\lambda_\nu \frac{c}{a}} \frac{J_0\left(\lambda_\nu \frac{r}{a}\right)}{\lambda_\nu J^2(\lambda_\nu)}\right\}. \tag{47}$$

Hierin bedeutet z eine Koordinate in Richtung der Zylinderachse von der Mittelebene aus gemessen, r den senkrechten Abstand von dieser Achse, a den Radius, c die Höhe des Zylinders, J_0 die *Bessel*sche Funktion nullter Ordnung, während unter λ_ν die unendlich vielen Wurzeln der Gleichung

$$J_0'(\lambda) = 0 \tag{48}$$

zu verstehen sind. Aus (47) erhält er dann für ϱ die Näherung:

$$\varrho = \frac{1}{\pi\sigma a}\frac{c}{a}\left(1 - \frac{a}{c}\cdot 0{,}76958\right), \tag{49}$$

die ebenso wie (46) schon einen sehr genauen Wert ergibt, wenn c nur ein mäßiges vielfaches von a ist.

10. Nobilische Ringe[38]. Läßt man in gewissen über einer gut gereinigten Metallplatte aufgeschichteten Elektrolyten den Strom durch

37) *G. Kirchhoff,* Berlin Monatsber. d. Akad. d. Wiss. 26. April 1883, p. 519, und Ges. Werke, Nachtrag, Leipzig 1891, p. 54. Die Strömung in einem Zylinder wurde schon vorher behandelt von *B. Riemann* in seiner Abhandlung über die Nobilischen Ringe, Ann. Phys. Chem. 95 (1855), p. 130; Ges. Werke, Leipzig 1876, p. 54 und von *H. Weber,* J. f. Math. 75 (1872), p. 75 und 76 (1873), p. 1.

38) *Nobili,* Memorie et osservazione edite et inedite, Firenze 1 (1834), p. 56; Bibliothèque universelle de Genève, Anc. Sér. sciences et arts 59 (1835), p. 263 und p. 416.

eine Spitze ein- und durch die Platte austreten, so entsteht auf dieser ein Niederschlag, dessen Dicke mit zunehmendem Abstande von der positiven Elektrode abnimmt. Dieser zeigt bei auffallendem Lichte die *Newton*schen Farbenringe und scheint daher sehr geeignet, die Gesetze der Stromverteilung experimentell zu prüfen. Dieses wurde ausgeführt von *E. Becquerel*[39]), *du Bois-Reymond* und *P. Beetz*[40]), die sich aber bei dem Vergleich zwischen Theorie und Erfahrung auf unrichtige Formeln stützten. *B. Riemann*[41]) war der erste, der eine mathematisch einwandfreie Berechnung gab. Er betrachtet die Metallplatte als vollkommen leitend und die Elektrode als punktförmig; durch das Spiegelungsverfahren erhält er dann das Potential in der Form:

$$(50)\quad \varphi = \frac{J}{4\pi\sigma}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^m\left\{\frac{1}{\sqrt{r^2+(z+2mh-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2+(z+2mh+a)^2}}\right\}.$$

Hierbei bedeutet z eine Koordinate senkrecht zur Platte, r den senkrechten Abstand von der durch die Elektrode hindurchgehenden z-Achse, h die Dicke der Flüssigkeitsschicht und a die Höhe der Elektrode oberhalb der Platte.

Für die Dicke der Ringe ist nach dem *Faraday*schen Gesetz die Stromdichte an der Platte maßgebend, die, wenn a sowohl wie die betrachteten Entfernungen von der z-Achse klein gegen h sind, durch die Formel:

$$(51)\quad i = \frac{J}{2\pi}\frac{a}{(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

dargestellt wird, da man in diesem Falle nur die zwei ersten Glieder der Reihe (50) zu berücksichtigen braucht. Liegt dagegen die Elektrode in der Oberfläche der Flüssigkeit und will man die Stromdichte in größerer Entfernung von der z-Achse kennen, so ist es vorteilhaft φ in eine Reihe zu entwickeln, die nach $\sin \nu\pi\frac{z}{2h}$ fortschreitet. Die Koeffizienten dieser Reihe werden *Bessel*sche Funktionen, die man im vorliegenden Fall $\left(\frac{r}{h} >> 1\right)$ durch ihre semikonvergenten Entwicklungen ersetzen kann. Die Vernachlässigung der höheren Glieder der *Fourier*schen Reihe liefert schließlich für i den Wert[42]):

$$(52)\quad i = \frac{J}{2}\frac{1}{h\sqrt{rh}}e^{-\frac{\pi}{2}\frac{r}{h}}.$$

---

39) *E. Becquerel*, Ann. chim. phys. (3) 13 (1845), p. 342.

40) *E. du Bois-Reymond* und *W. Beetz*, Ann. Phys. Chem. 71 (1847), p. 71.

41) *B. Riemann*, Ann. Phys. Chem. 95 (1855), p. 130 und Ges. Werke, Leipzig 1876, p. 54.

42) Vgl. auch *Riemann-Weber*, Die partiellen Differentialgleichungen der

Durch spätere Versuche von *A. Guébhard*[43]) wurde das Interesse für diesen Gegenstand wieder neu erweckt. Dieser erzeugte *Nobili*sche Kurvensysteme in der oben angegebenen Art unter Zuhilfenahme mehrerer Elektroden, sah die so erhaltenen Figuren aber als identisch an mit den Äquipotentialkurven der Flächenströmung[44]). Diese offenbar irrige Annahme wurde dann sowohl theoretisch wie experimentell widerlegt, u. a. von *W. Voigt*[45]).

Bei den Versuchen zeigte sich, wie übrigens schon *Riemann* vermutet hatte, daß die Resultate getrübt wurden durch die bei wachsender Dicke der niedergeschlagenen Schicht wachsende Polarisation der Metallplatte, die bei der Rechnung nicht berücksichtigt war. In dieser Hinsicht wurde die Theorie vervollständigt von *H. Weber*[46]), der versuchsweise eine Polarisation proportional der erzeugenden Stromdichte einführte, so daß die Grenzbedingung an der Platte von $\varphi = \text{const.}$ in

$$h \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \varphi = 0 \tag{53}$$

übergeht, in der h eine durch den Versuch zu bestimmende Konstante bedeutet. *Roiti*[47]) dagegen macht die Annahme, daß die Gegenpolarisation nur bis zu einem gewissen Maximum ansteigen kann. Im stationären Zustand kann dann nur durch diejenigen Teile der Platte ein Strom hindurchgehen, in denen dieses Maximum erreicht ist; in den übrigen Teilen der Platte hebt die Gegenpolarisation das Potential der Stromverteilung auf, ohne dabei ihren Maximalwert zu erreichen. Die Begrenzung dieses Teiles bestimmt sich erst durch die

---

math. Physik, Braunschweig 1900, p. 460. Die Formel (52) wurde geprüft von *W. Beetz* in einer zweiten experimentellen Arbeit, Ann. Phys. Chem. 97 (1856), p. 22.

43) *A. Guébhard,* Paris C. R. 90 (1880), p. 984; 93 (1881), p. 582; 93 (1881), p. 792; 94 (1882), p. 437; 94 (1882), p. 851; 96 (1883), p. 1424; Journal de physique (2) 1 (1882), p. 205; 2 (1883), p. 87; 2 (1883), p. 335.

44) Vgl. für die Strömung in Flächenleitern, dieser Art. C, Nr. 13 u. f.

45) *W. Voigt,* Ann. Phys. Chem. 17 (1882), p. 257 und 19 (1883), p. 183, wo auch über (zum Teil unter Mitwirkung von *Werner*) ausgeführte Versuche berichtet wird. Vgl. auch *H. Meyer,* Diss. Göttingen 1880; Gött. Nachr. 1882, p. 666; Ann. Phys. Chem. 18 (1883), p. 136; *E. Mach,* Wien Ber. (2) 86 (1882), p. 8; Ann. Phys. Chem. 17 (1882), p. 858. *A. Elsas* bespricht die den *Guébhard*schen Versuchen genau entsprechende Formulierung des mathematischen Problems, ohne es aber zu lösen, Ann. Phys. Chem. 29 (1886), p. 331 und 30 (1887), p. 620.

46) *H. Weber,* Journ. f. Math. 75 (1872), p. 75 und 76 (1873), p. 1.

47) Vgl. *Riemann-Weber,* Die partielle Differentialgleichung der mathematischen Physik, Braunschweig 1900, p. 468 ff.

vollständige Lösung des mathematischen Problems. Ausgeführt wurde die Berechnung für den Fall einer unendlich hohen Flüssigkeitsschicht und einer punktförmigen Elektrode von *R. Gans*[48]). Der Teil der Platte, durch den der Strom im stationären Zustand hindurchgeht, ist ein Kreis, dessen Radius a sich bestimmt aus der Gleichung:

$$\frac{a}{c} = \operatorname{cotg} \frac{2\pi\sigma\varphi_0 a}{J}, \tag{54}$$

wobei c den Abstand der Elektrode von der Platte, φ_0 den Unterschied der Potentiale innerhalb des betrachteten Kreises und demjenigen eines unendlich weit entfernten Punktes der Platte bedeutet und J der ganze durch die Elektrode hindurchgehende Strom ist.

Eine Verbesserung des *Riemann*schen Resultates durch Mitberücksichtigung der endlichen Leitfähigkeit der Platte erzielten *Wild*[49]) und *Ditscheiner*[50]).

11. Inhomogene Leiter. Bringt man innerhalb eines unendlich ausgedehnten Leiters von der Leitfähigkeit σ_1, der in der positiven x-Richtung von einem konstanten (spezifischen) Strom i durchflossen wird, eine Kugel von der Leitfähigkeit σ_2 und dem Radius a an, so bekommt man das resultierende Stromfeld, indem man zu dem ursprünglichen Potential

$$\varphi_1 = -\frac{i}{\sigma_1} x \tag{55}$$

noch ein Zusatzpotential φ_2 addiert. Dieses ist im Innern der Kugel durch die Gleichung:

$$\varphi_2 = \varphi_2{}^i = -\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\sigma_1 + \sigma_2} \frac{i}{\sigma_1} x \tag{56}$$

dargestellt; außerhalb der Kugel gilt:

$$\varphi_2 = \varphi_2{}^a = -\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\sigma_1 + \sigma_2} \frac{i}{\sigma_1} \frac{a^3}{r^3} x. \tag{56'}$$

Der Nullpunkt der x-Achse ist hierbei im Mittelpunkt der Kugel gedacht, während r den Abstand von diesem Mittelpunkt bedeutet.

Allgemeinere Fälle kann man behandeln durch Entwicklung nach Kugelfunktionen[51]).

Sind mehrere Kugeln unregelmäßig in den Leiter verteilt in solchem Abstande, daß sie sich gegenseitig nicht mehr merklich beein-

---

48) *R. Gans,* Zeitschr. Math. Phys. 49 (1903), p. 298 und 53 (1906), p. 434.

49) *Wild,* Neue Denkschr. d. Schweiz. Nat. Ges. 15 (1857), p. 1.

50) *L. Ditscheiner,* Wien Ber. 78 (1878), p. 93.

51) Vgl. *J. C. Maxwell,* Treatise on electricity and magnetism, Oxford 1881, Bd. 1 p. 398, Art. 10 u. f.

flussen, so wird dieser sich verhalten, als ob seine Leitfähigkeit von dem Werte σ_1 in

$$\sigma_1' = \frac{2\sigma_2 + \sigma_1 + p(\sigma_2 - \sigma_1)}{2\sigma_2 + \sigma_1 - 2p(\sigma_2 - \sigma_1)}\,\sigma_1 \tag{57}$$

verändert ist[52]), wenn unter p das Verhältnis der Summe der Kugelvolumina zum Inhalt des ganzen Körpers verstanden wird.

Das einfache obige Resultat reicht nicht mehr aus, wenn der Leiter ein Elektrolyt ist, da dann an der Oberfläche der eingebetteten Körper durch den Strom Ablagerungen zustande kommen, die eine Gegenpolarisation verursachen. Auf Grund der *Roiti*schen Annahme (vgl. das Ende von Nr. **10**) wurde dieser Fall für einen im Elektrolyten eingebetteten Zylinder theoretisch untersucht von *Volterra*[53]). Eine qualitative Untersuchung über die verschiedenen eigenartigen, durch die Polarisation verursachten Erscheinungen gibt *J. Stark*[54]).

Maxwell[55]) untersucht auch noch den Fall eines geschichteten Leiters. Er zeigt, daß, wenn das Verhältnis von Dielektrizitätskonstante und Leitfähigkeit für die verschiedenen Schichten nicht konstant ist, ein solches Dielektrikum Rückstandserscheinungen zeigen wird, analog den bei Kondensatoren beobachteten.

12. Näherungsweise Berechnung des Widerstandes. Draht von variabelem Querschnitt. Übergangswiderstand. Hat man einen Leiter, dem der Strom durch zwei vollkommen leitende Elektroden zugeführt wird (Formulierung a) Nr. **6**), so gelingt die strenge Bestimmung von φ und damit die Berechnung des Widerstandes nur in den wenigsten Fällen. Eine oft sehr nützliche Methode zur näherungsweisen Berechnung gibt *Rayleigh*[56]). Das Prinzip der Methode beruht auf der plausibelen Tatsache, daß der Widerstand eines solchen Leiters zu- bzw. abnimmt, wenn die Leitfähigkeit stellenweise erniedrigt bzw. erhöht wird. Man kann dies beweisen, indem man zu einer Variation $\delta\sigma$ von σ und der zugehörigen $\delta\varphi$ von φ die entsprechende Variation δQ der *Joule*schen Wärmeentwicklung berechnet in der

---

52) *J. C. Maxwell*, l. c. p. 403, Art. 314.

53) *V. Volterra,* Torino Atti 18 (1882), p. 133 und p. 147.

54) *J. Stark,* Ann. Phys. Chem. 66 (1898), p. 246, wo auch die auf diesen Gegenstand sich beziehende Literatur zusammengestellt ist.

55) *J. C. Maxwell,* Treatise on electricity and magnetism, Oxford 1881, Bd. 1, p. 407, Art. 319. Vgl. über die Leitfähigkeit von Dielectrica und die verschiedenen vorgeschlagenen Theorien *E. v. Schweidler,* Ann. Phys. Chem. 24 (1907), p. 711 (am Schluß der Arbeit findet sich eine ausgedehnte Literaturangabe).

56) *Lord Rayleigh,* Phil. Trans. 161 (1870), p. 77. Vgl. auch *J. C. Maxwell,* Treatise on electricity and magnetism, Oxford 1881, Bd. 1, p. 390, Art. 306.

Form:

$$(57') \quad \delta Q = \delta \int \sigma \operatorname{grad}^2 \varphi \, dS = \int \delta \sigma \operatorname{grad}^2 \varphi \, dS + 2 \int \sigma (\operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \delta \varphi) \, dS.$$

Der *Green*sche Satz angewandt auf φ und $\delta\varphi$ zeigt dann, daß das letztere Integral verschwindet, so daß aus (57') die Behauptung ohne weiteres folgt. Indem man also die Stromlinien in berechenbare Bahnen zwingt durch Anbringung eines Systems vollkommen leitender resp. vollkommen isolierender Flächen, kann man den Widerstand zwischen zwei Grenzen einschließen.

Um die Methode auf einen langen Draht von variabelem Querschnitt und der Leitfähigkeit σ anzuwenden, denke man sich diesen entstanden durch Rotation einer Kurve $a = f(z)$ um die z-Achse, so daß a also den jeweiligen Radius des Drahtes bedeutet. Nimmt man jetzt als unendlich gut leitende Flächen Ebenen senkrecht zur z-Achse an, so erhält man für den Widerstand eines Stückes von der Länge l den zu kleinen Wert:

$$(58) \qquad R_1 = \frac{1}{\sigma} \frac{A}{\pi},$$

wobei A durch die Gleichung:

$$(58') \qquad A = \int_0^l \frac{dz}{a^2}$$

definiert ist.

Nimmt man andererseits als vollkommen isolierende Flächen die der seitlichen Begrenzung ähnlichen Rotationsflächen an, $\varrho = \theta f(z)$, wobei $0 < \theta < 1$ und ϱ den senkrechten Abstand von der Mittellinie bedeutet, so erhält man den zu hohen Wert:

$$(59) \qquad R_2 = \frac{1}{\sigma} \frac{A}{\pi} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{B}{A}\right),$$

wobei B durch die Gleichung

$$(59') \qquad B = \int_0^l \left(\frac{da}{dz}\right)^2 \frac{dz}{a^2}$$

definiert ist.

Gleichung (58) entspricht dem gewöhnlich angewandten Verfahren, das also immer einen zu kleinen Wert ergibt. Je langsamer sich der Querschnitt in der z-Richtung ändert, desto geringer ist nach (59') die obere Grenze für den Fehlbetrag.

Eine zweite Anwendung gestattet das Prinzip bei der Berechnung des Übergangswiderstandes, d. h. des Zusatzwiderstandes, den man berücksichtigen muß, wenn ein kreisförmiger Draht von der Länge l und dem Radius a in eine größere Metallmasse endet.

Den ersten zu kleinen Wert R_1 für den Widerstand erhält man,

wenn der Draht an seiner Ansatzstelle durch eine vollkommen leitende Kreisscheibe abgeschlossen wird. Betrachtet man die Metallmasse als unendlich groß, so ist das Potential φ hier so zu bestimmen, daß es innerhalb der Scheibe einen konstanten Wert annimmt und auf dem Rest der horizontal gedachten Begrenzung $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ liefert. Es ist also dasselbe, wie das elektrostatische Potential einer geladenen leitenden Kreisscheibe. Aus der bekannten Lösung für diesen Fall erhält man nach (32) für den Widerstand den ersten zu kleinen Wert:

$$(60) \qquad R_1 = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{\pi a^2} + \frac{1}{\sigma} \frac{1}{4a} = \frac{1}{\pi a^2 \sigma}\left(l + \frac{\pi}{4} a\right).$$

Den zweiten zu großen Wert R_2 erhält man, indem der Strom im Innern des Drahtes durch isolierende Zylinderflächen gezwungen wird, bis zur Ansatzstelle parallel zur Achse zu fließen. Das Potential in der Metallmasse bestimmt sich jetzt aus der Bedingung, daß innerhalb der Kreisscheibe vom Radius a

$$(61) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{J}{\pi a^2 \sigma} = \text{const.}$$

(J = Gesamtstrom) und auf dem Rest der Begrenzung $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ ist.

Es ist nunmehr nicht nötig, das Potential wirklich zu bestimmen. Bedeutet nämlich ΔR_2 den Widerstand des Halbraumes, so gilt nach (31')

$$(62) \qquad \Delta R_2 J^2 = \sigma \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = \frac{J}{\pi a^2} \int \varphi \, d\sigma,$$

wobei das Integral über die Kreisscheibe zu erstrecken ist. Dieses läßt sich ohne Mühe ausführen und liefert für den ganzen Widerstand den Wert:

$$(63) \qquad R_2 = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{\pi a^2} + \frac{1}{\sigma} \frac{8}{3\pi^2 a} = \frac{1}{\pi a^2 \sigma}\left(l + \frac{8}{3\pi} a\right).$$

Nach (60) und (63) erhält man also die Widerstandskorrektion, indem man den Draht um den Bruchteil α seines Halbmessers verlängert denkt, wobei α liegt zwischen[57])

$$(64) \qquad \frac{\pi}{4} = 0{,}785 \quad \text{und} \quad \frac{8}{3\pi} = 0{,}849.$$

---

57) *Lord Rayleigh* erhielt London Math. Soc. Proc. 7 (1876), p. 70 durch weitere Näherung als obere Grenze 0,824 statt 0,849. Vgl. auch Scientific Papers, Cambridge 1899, I, p. 272. Experimentelle Bestimmungen gaben *F. Kohlrausch*, Ann. Phys. Chem. 35 (1888), p. 718 und *W. Schrader*, Ann. Phys. Chem. 44 (1891), p. 222 sowie Diss. Straßburg 1891.

C. Flächenleiter.

13. Grundgleichungen. Übliche Fragestellung. In diesem Abschnitt haben wir solche Leiter zu betrachten, bei denen eine Dimension klein gegen die übrigen ist. Wir denken uns die begrenzenden Flächen dieser Körper beschrieben durch die Endpunkte eines kurzen Linienstückchens von der Länge λ, das sich mit einem seiner Punkte über eine gewisse geometrische Fläche nach allen Richtungen bewegt hat, wobei es stets senkrecht zu dieser gerichtet war. In Übereinstimmung mit unserer Annahme über die Größenverhältnisse interessieren wir uns nur für die Mittelwerte der elektrischen Größen auf dem betreffenden Linienstückchen. Bezeichnen wir diese Mittelbildung vorübergehend durch einen horizontalen Strich, so folgt aus (2) mit Berücksichtigung der Grenzbedingung (7):

$$\operatorname{div} \sigma \operatorname{grad} \lambda \overline{\varphi} = \operatorname{div} \sigma \lambda \overline{\mathfrak{E}^e}, \tag{65}$$

wobei die Operationen div und grad zweidimensional in der zu grunde gelegten geometrischen Fläche aufzufassen sind. Eine Strömungskomponente senkrecht zur Fläche kann nach (7) und (III) nicht auftreten, so lange die Komponente von $\mathfrak{E}^e$ in der Dickenrichtung der Platte als unveränderlich betrachtet werden kann.

Gewöhnlich sieht man von dem Vorhandensein eingeprägter elektrischer Kräfte ganz ab und nimmt sowohl σ wie λ für die Platte als konstant an; in diesem Falle hat man statt (65):

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \overline{\varphi} = 0. \tag{66}$$

Wo zwei Platten mit verschiedenen Leitfähigkeiten aneinander stoßen, gelten die Grenzbedingungen (10) und (11) in leicht ersichtlicher Spezialisierung.

Indem man von einer genauen Beschreibung des Strömungsfeldes in der Nähe der Elektroden $a, b, \ldots$ absieht, kann man diese als punktförmig annehmen. An diesen Stellen muß sich das Potential dann verhalten wie $A \log r_a$, $B \log r_b, \ldots$, unter r den auf der Fläche gemessenen Abstand vom betreffenden Punkt verstanden. Die Konstanten $A, B, \ldots$ müssen bei einer endlichen Platte in der Summe Null ergeben (vgl. (29')). Auch linienförmige Elektroden hat man in Betracht gezogen; an diesen muß das Potential konstante Werte annehmen, wenn sie aus unendlich gut leitendem Material bestehen.

14. Zusammenhang mit der Theorie der Flächen[58]. Denkt man sich auf einer Fläche die Lage eines beliebigen Punktes definiert

58) Die hier gewählte Darstellung entspricht den Ausführungen von *F. Klein*, Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale, Leipzig

durch zwei stetig veränderliche Parameter p und q, so daß das Linienelement in der Form

$$(67)\qquad ds^2 = E dp^2 + 2F dp dq + G dq^2$$

dargestellt werden kann, so nimmt (66) die Gestalt an:

$$(68)\qquad \frac{\partial}{\partial p}\frac{G\frac{\partial \varphi}{\partial p} - F\frac{\partial \varphi}{\partial q}}{\sqrt{EG - F^2}} + \frac{\partial}{\partial q}\frac{E\frac{\partial \varphi}{\partial q} - F\frac{\partial \varphi}{\partial p}}{\sqrt{EG - F^2}} = 0.$$

Definiert man eine Funktion φ' durch die Gleichung

$$(69)\qquad d\varphi' = -\frac{E\frac{\partial \varphi}{\partial q} - F\frac{\partial \varphi}{\partial p}}{\sqrt{EG - F^2}}\,dp + \frac{G\frac{\partial \varphi}{\partial p} - F\frac{\partial \varphi}{\partial q}}{\sqrt{EG - F^2}}\,dq,$$

was nach (68) möglich ist, so nennt man diese Funktion das zu φ „konjugierte Potential" und bezeichnet $\Phi = \varphi + i\varphi'$ als „komplexe Funktion auf der Fläche". Man zeigt leicht, daß φ' derselben Differentialgleichung (68) wie φ genügt. Von größter Wichtigkeit für die Theorie ist nun die Bemerkung, daß, wenn man die unabhängigen Variablen p und q so wählt, daß $p + iq$ selbst eine komplexe Funktion der Fläche ist, die Differentialgleichung die einfache Form

$$(70)\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} = 0$$

annimmt. Zu gleicher Zeit wird $E = G$ und $F = 0$, so daß zwischen φ und φ' die Beziehungen

$$(71)\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial p} = \frac{\partial \varphi'}{\partial q},$$

$$(71')\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial q} = -\frac{\partial \varphi'}{\partial p}$$

bestehen; das Quadrat des Linienelements wird einfach

$$(72)\qquad ds^2 = E(dp^2 + dq^2).$$

Die Linien $p = \text{const.}$, resp. $q = \text{const.}$ bilden also ein isometrisches Kurvensystem auf der Fläche.

(71) und (71′) zeigen, daß die Funktionen der Fläche analytische Funktionen voneinander sind; (72) zeigt, daß, wenn man

$$p + iq = x + iy$$

setzt, die Fläche konform auf die Ebene abgebildet wird. Man kann also einerseits, wenn eine konforme Abbildung der Fläche auf die

---

1881 und Vorlesung über „Riemannsche Flächen", Sommersemester 1891—92, der seinerseits an *E. Beltrami,* Sulla theoria generale di parametri differenziali, Bologna Mem. (2) 8 (1868), p. 549 anknüpft. Vgl. übrigens Enc. III D 6a, Art. *A. Voß,* Abbildung und Abwicklung zweier Flächen aufeinander.

Ebene bekannt ist, die Differentialgleichung für φ in die einfache Form (70) schreiben; andererseits wird durch die experimentelle Bestimmung irgend einer zu einer Strömung gehörigen Potentialverteilung die konforme Abbildung der Fläche auf die Ebene geleistet[59]).

15. Ebene Platten. Da $z = x + iy$ eine „Funktion der Ebene" ist, erscheint die Differentialgleichung für ebene Platten in der einfachen Form[60])

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \tag{70'}$$

die Differentialgleichung des logarithmischen Potentials. Betrachtet man wieder die Kombination $\varphi + i\varphi' = \Phi$, so ist die einfachste Lösung

$$\Phi = -\frac{J}{2\pi\sigma\lambda} \log(z - z_0); \tag{73}$$

sie entspricht einer einfachen Stromquelle im Punkte $x = x_0$, $y = y_0$, durch die der Strom J in die Platte eintritt. Sind mehrere Elektroden vorhanden, so besteht Φ aus einer Summe von Gliedern der Form (73).

Natürlich kann man sich die unendliche Ebene längs einer Stromlinie ($\varphi' =$ const.) durchgeschnitten denken und damit zu dem Fall einer begrenzten ebenen Platte übergehen[61]). Im Prinzip hiervon nicht verschieden aber direkter ist die Konstruktion der Lösung für eine begrenzte Platte mittels der Abbildungsmethode[62]). Der einfachste Fall ist der der Halbebene, dessen Lösung als Grundlage dienen kann. Denkt man sich diese begrenzt durch die x-Achse, so erhält man die Lösung für zwei Elektroden in den Punkten x_0, y_0 und x_1, y_1, durch die der Strom J in die Platte ein- bzw. austritt, indem man in der unteren Halbebene die durch Spiegelung an der x-Achse entstehenden Elektroden in den Punkten x_0, $-y_0$ und x_1, $-y_1$ zu den gegebenen hinzufügt. Die Funktion Φ erhält dann die

---

59) Auf diesen Zusammenhang wurde wohl zuerst von *G. Kirchhoff* hingewiesen, Monatsber. d. Akad. d. Wiss. Berlin (1875); Ges. Abh., Leipzig 1882, p. 56.

60) Die Differentialgleichung (70') findet sich zuerst bei *G. Kirchhoff*, Ann. Phys. Chem. 64 (1845), p. 497. Man vgl. auch *W. Smaasen*, Ann. Phys. Chem. 69 (1846), p. 161.

61) Eingehend werden die Verhältnisse bei mehreren Polen in der unendlichen Ebene untersucht von *C. C. Foster* und *O. J. Lodge*, Phil. Mag. (49) 4 (1875), p. 385; (50) 4 (1875), p. 475; *O. J. Lodge* (1) 5 (1876), p. 373.

62) Auf zahlreiche Beispiele wurde die Methode angewandt von *Holzmüller*, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften, Leipzig 1882,

Form[63])

$$(74)\qquad \Phi = -\frac{J}{2\pi\lambda\sigma}\left(\log\frac{z-z_0}{z-z_1} + \log\frac{z-\bar{z}_0}{z-\bar{z}_1}\right),$$

wobei der horizontale Strich bedeutet, daß in der betreffenden Größe i mit $-i$ zu vertauschen ist.

Da auf der Begrenzung ($y = 0$) der imaginäre Teil von Φ konstant ist, erhält man die Lösung für eine Platte, die durch irgend eine andere Kurve begrenzt wird, indem man die Halbebene auf das Innere des von der betrachteten Kurve begrenzten Gebietes abbildet, so daß die reelle Achse der neuen Begrenzung entspricht. Für den Kreis mit dem Radius a geschieht das z. B. durch die gebrochene lineare Transformation[64]):

$$(75)\qquad \zeta = \xi + i\eta = a\,\frac{1+iz}{1-iz}, \quad \text{bzw.} \quad z = i\,\frac{1-\zeta/a}{1+\zeta/a}.$$

Aus (74) erhält man dann, unter Weglassung einer belanglosen Konstante, für Φ den Wert:

$$(76)\qquad \Phi = -\frac{J}{2\pi\lambda\sigma}\left(\log\frac{\zeta-\zeta_0}{\zeta-\zeta_1} + \log\frac{\zeta-\zeta_0'}{\zeta-\zeta_1'}\right),$$

wenn ζ_0, ζ_1, ζ_0', ζ_1' die Punkte bedeuten, die bei der Transformation aus z_0, z_1, $\bar{z}_0$, $\bar{z}_1$ hervorgehen. Aus (75) folgt, daß ζ_0 und ζ_0' bzw. ζ_1 und ζ_1' harmonische Punkte in bezug auf den Kreis mit dem Radius a sind. Sie liegen also auf einem vom Mittelpunkt ausgehenden Strahl, während das Produkt ihrer Abstände vom Mittelpunkt gleich a^2 ist.

---

63) Vgl. z. B. *F. Auerbach,* Ann. Phys. Chem. 3 (1878), p. 498.

64) Die Lösung für den Kreis wurde zuerst angegeben und experimentell geprüft für den Fall, daß die Elektroden auf der Begrenzung liegen, von *G. Kirchhoff,* Ges. Abh. Leipzig 1882, p. 1 und Ann. Phys. Chem. 64 (1845), p. 497. In einer zweiten Abhandlung Ann. Phys. Chem. 67 (1846), p. 344 gibt er statt der in der vorher genannten Arbeit gebrauchten Methode der direkten Potentialbestimmung ein zweites Verfahren an, beruhend auf der magnetischen Wirkung der Strömung auf eine kleine in der Nähe der Platte aufgehängte Magnetnadel.

Das Resultat für einen Kreisring erhält *L. Ditscheiner,* Ann. Phys. Chem. 5 (1878), p. 282, durch fortgesetzte Spiegelung.

Die von zwei exzentrischen Kreisen begrenzte Platte wird behandelt von *E. Jochmann*, Zeitschr. Math. Phys. 1865, p. 48 und 1865, p. 89.

Der Fall einer aus zwei gleichen Hälften verschiedener Materialien bestehenden Kreisplatte wird theoretisch und experimentell untersucht von *G. Quincke,* Ann. Phys. Chem. 7 (1856), p. 382. (Vgl. für das angewandte abgeänderte Spiegelungsverfahren den analogen Fall in Nr. 8.)

Die Strömung in einer unendlichen Platte mit einem von einer Ellipse begrenzten anders leitenden Teil behandelt *J. Haubner*, Wien Ber. (2) 87 (1883), p. 412.

Die Lösung für einen unendlich langen Streifen von der Breite a, in dem zwei Elektroden vorhanden sind, durch die der Strom ein- bzw. ausgeführt wird, erhält man, indem man die schon betrachtete Halbebene mittels der Transformation[65])

$$(77)\qquad \pi\frac{\zeta}{a}=\log z \quad \text{bzw.} \quad z=e^{\pi\frac{\zeta}{a}}$$

auf den Streifen in der ζ-Ebene abbildet. Hiernach wird:

$$(78)\qquad \Phi=-\frac{J}{2\pi\sigma\lambda}\left(\log\frac{e^{\pi\frac{\zeta}{a}}-e^{\pi\frac{\zeta_0}{a}}}{e^{\pi\frac{\zeta}{a}}-e^{\pi\frac{\zeta_1}{a}}}+\log\frac{e^{\pi\frac{\zeta}{a}}-e^{\pi\frac{\zeta_0'}{a}}}{e^{\pi\frac{\zeta}{a}}-e^{\pi\frac{\zeta_1'}{a}}}\right),$$

wobei nach (77)

$$(79)\qquad \zeta_0'=\bar{\zeta}_0 \quad \text{und} \quad \zeta_1'=\bar{\zeta}_1;$$

in Worten: ζ_0' und ζ_1' entstehen durch Spiegelung der wirklichen Elektroden an einer der Begrenzungslinien des Streifens. Man kann natürlich (78) auch dadurch erhalten, daß man die Wirkung der durch fortgesetzte Spiegelung an den Begrenzungslinien entstehenden Pole in geeigneter Weise summiert.

Will man die Strömung in einer rechteckigen Platte mit zwei Einströmungspunkten berechnen, so kann man die obere z-Halbebene mittels des elliptischen Integrals erster Gattung auf das Innere des vorgelegten Rechtecks in der ζ-Ebene abbilden. Bedenkt man, daß durch diese Abbildung oder auch direkt nach dem Spiegelungsverfahren e^{Φ} eine doppeltperiodische Funktion wird mit den Perioden $2a$ und $2ib$ (a bzw. b bedeuten die Seiten des Rechtecks in der ξ- bzw. η-Richtung), die in den Punkten $\zeta=\zeta_0$, $\zeta=\bar{\zeta}_0$, $\zeta=-\zeta_1$, $\zeta=-\bar{\zeta}_1$ einfache Pole hat, so wird man ohne weiteres auf die Darstellung geführt[66])

$$(80)\qquad \Phi=-\frac{J}{2\pi\sigma\lambda}\log\frac{\sigma(\zeta-\zeta_0)\sigma(\zeta+\zeta_0)\sigma(\zeta-\bar{\zeta}_0)\sigma(\zeta+\bar{\zeta}_0)}{\sigma(\zeta-\zeta_1)\sigma(\zeta+\zeta_1)\sigma(\zeta-\bar{\zeta}_1)\sigma(\zeta+\bar{\zeta}_1)}.$$

---

65) Das Resultat für den Streifen wurde zuerst angegeben von *J. Stefan* und experimentell geprüft von *v. Obermayer,* Wien Ber. (60) 2 (1869), p. 245. Eine angenäherte Lösung durch Berücksichtigung nur zweier Spiegelpunkte gibt *F. Auerbach,* Ann. Phys. Chem. 3 (1878), p. 498. Das genaue Resultat wird daraufhin nochmals (in Produktform) angegeben von *L. Ditscheiner*, Ann. Phys. Chem. 5 (1878), p. 282.

66) Die Strömung in einer rechteckigen Platte wurde zuerst behandelt von *E. Jochmann,* Zeitschr. Math. Phys. 1865, p. 48 und 1865, p. 89, später wurde das Resultat auf anderem Wege abgeleitet von *E. Heine,* Berlin Ber. 1874, p. 186, und ausführlicher J. f. Math. 1875, p. 1. Für den Fall, daß die Elektroden in der Nähe einer Plattenecke liegen, daß also die Platte näherungsweise durch einen Quadranten der unendlichen Ebene ersetzt werden kann, wird das

Die Funktion σ ist die bekannte von *Weierstraß* eingeführte Modifikation der ϑ-Funktion.

Ebenso kann man beliebige Polygone behandeln, da auch hier die Abbildung auf die Halbebene nach *H. A. Schwarz* mittels bestimmter Integrale bewerkstelligt werden kann.

Sind nur zwei Elektroden A und B vorhanden, so kann man von einem Widerstand R der betrachteten Platte reden. Dieser beträgt nach (32) allgemein

$$R = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{J}. \tag{81}$$

Hieraus findet man z. B. für die unendliche Ebene

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma\lambda} \log \frac{d^2}{\varrho_A \varrho_B}, \tag{82}$$

wenn d der Abstand und ϱ_A bezw. ϱ_B die Radien der kleinen kreisförmigen Elektroden bedeuten.

Für einen Kreis[67]) vom Radius a erhält man aus (76)

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma\lambda} \log \left(\frac{\overline{AB}^2}{\varrho_A \varrho_B} \frac{\overline{AB'}\,\overline{A'B}}{\overline{AA'}\,\overline{BB'}} \right), \tag{83}$$

wobei A' bzw. B' die oben erklärten Bildpunkte von A und B bedeuten und unter AB, usw. der Abstand der Punkte A und B, usw. zu verstehen ist.

16. Gekrümmte Platten. Wie in Nr. 14 gezeigt wurde, erhält die Differentialgleichung des Potentials auf einer Fläche die einfache Form

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} = 0, \tag{70}$$

wenn durch den Ansatz

$$\zeta = p + iq = x + iy = z \tag{84}$$

die Fläche konform auf die Ebene abgebildet wird. Ist die Fläche geschlossen und einfach zusammenhängend, so kann man sie konform auf die unbegrenzte Ebene beziehen. Daraus folgt als Lösung für zwei punktförmige Elektroden, durch die der Strom J der Fläche zu- bzw. abgeführt wird:

$$\Phi = \varphi + i\varphi' = -\frac{J}{2\pi\sigma\lambda} \log \frac{z - z_0}{z - z_1} = -\frac{J}{2\pi\sigma\lambda} \log \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \zeta_1}, \tag{85}$$

wenn wir wieder statt φ allein die komplexe Funktion der Fläche Φ

Resultat angegeben und experimentell geprüft von *G. Quincke*, Ann. Phys. Chem. 7 (1856), p. 382.

67) Vgl. *G. Kirchhoff*, Ann. Phys. Chem. 64 (1845), p. 497.

betrachten. Ebenso wie für ebene Platten sind $\varphi =$ const. die Niveaulinien des Potentials und $\varphi' =$ const. die Strömungslinien.

Für die Kugel erhält man eine konforme Abbildung durch stereographische Projektion. Hat die Kugel den Radius a und fällt ihr Mittelpunkt mit dem Nullpunkt der z-Ebene zusammen, so lautet diese Abbildung in Formeln

$$\frac{z}{a} = \frac{\zeta}{a - Z} \tag{86}$$

mit der Nebenbedingung

$$\xi^2 + \eta^2 + Z^2 = a^2, \tag{87}$$

wenn ξ, η, Z die Cartesischen Koordinaten der Kugelpunkte bedeuten und $\zeta = \xi + i\eta$ ist. Führt man auf der Kugel Poldistanz θ und geographische Länge ω ein, so kann man statt (86) auch schreiben

$$\frac{z}{a} = \frac{e^{i\omega}}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}, \tag{86'}$$

so daß man für zwei Elektroden die Lösung erhält[57]):

$$\Phi = -\frac{J}{2\pi\sigma\lambda}\log\frac{\dfrac{\zeta}{a-Z} - \dfrac{\zeta_0}{a-Z}}{\dfrac{\zeta}{a-Z} - \dfrac{\zeta_1}{a-Z}} = -\frac{J}{2\pi\sigma\lambda}\log\frac{\dfrac{e^{i\omega}}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}} - \dfrac{e^{i\omega_0}}{\operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2}}}{\dfrac{e^{i\omega}}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}} - \dfrac{e^{i\omega_1}}{\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}}}. \tag{88}$$

Beliebige Zylinderflächen[58]) lassen sich durch bloßes Abrollen auf die Ebene abbilden; die Lösung erscheint hier als einfachperiodische Funktion.

Als Beispiel einer Fläche, die sich nicht auf die ganze Ebene abbilden läßt, weil sie nicht einfach zusammenhängend ist, sei die von *Kirchhoff* behandelte Ringfläche[59]) erwähnt. Ihr Bild erscheint in der Ebene als Rechteck, so daß die Lösung auf doppeltperiodische Funktionen führt.

D. Lineare Leiter.

17. Grundgleichungen. Betrachtet man ein System, bestehend aus p linearen Leitern, so interessieren uns zunächst die unter Einwirkung der gegebenen eingeprägten elektrischen Kräfte $\mathfrak{E}_e$ in jedem

68) Das Resultat wurde zuerst (durch direkte Lösung der Potentialgleichung) erhalten von *L. Boltzmann,* Wien Ber. (52) 2 (1865), p. 214. Vom Standpunkt der Abbildung aus wird es später beleuchtet von *G. Kirchhoff*, Berlin Ber. Juli 1875; Ges. Werke, Leipzig 1882, p. 56 und von *A. Töpler,* Ann. Phys. Chem. 10 (1877), p. 375.

69) Vgl. *L. Boltzmann*, Wien Ber. (52) 2 (1865), p. 214.

70) Vgl. *G. Kirchhoff,* Berlin Ber. Juli 1875 und Ges. Werke, Leipzig 1882, p. 56.

Drahte fließenden Gesamtströme J_p. Diese lassen sich durch Auflösung eines Systems linearer Gleichungen bestimmen auf Grund der beiden *Kirchhoff*schen Relationen[71]):

(89) $\sum J_p = 0$ für jeden Knotenpunkt;

(90) $\sum J_p w_p = \sum E_p$ für jeden geschlossenen Umgang.

In (90) ist w_p der Widerstand des p^{ten} Drahtes, gemessen zwischen zwei Knotenpunkten und definiert durch die Formel[72]):

$$w_p = \int_0^l \frac{ds}{\sigma q_p}, \tag{91}$$

wobei q_p der betreffende Querschnitt und s die auf der Leitlinie des Drahtes von der Länge l gemessene Entfernung bedeutet. E_p ist die sogenannte im Draht wirkende *elektromotorische Kraft*, dargestellt durch das Integral:

$$E_p = \int_0^l \mathfrak{E}_{es}\, ds. \tag{92}$$

Ist Querschnitt und Leitfähigkeit längs des Drahtes unveränderlich, so gilt statt (91) einfach:

$$w_p = \frac{l}{\sigma q_p}. \tag{91'}$$

Die Gleichungen (89) und (90) sind nur eine andere Ausdrucksweise für die (geeignet spezialisierten) Fundamentalgleichungen (I) und (II) Nr. **1**. Gleichung (89) ist äquivalent mit der aus (II) für eine beliebige geschlossene Fläche folgenden Beziehung:

$$\int \mathfrak{J}_n\, d\sigma = 0, \tag{89'}$$

während die auf eine geschlossene Linie s bezogene Integralform von (I):

$$(\int) \mathfrak{E}_s\, ds = 0 \tag{90'}$$

71) *G. Kirchhoff,* Ann. Phys. Chem. 72 (1847), p. 497 und 75 (1848), p. 189, sowie Ges. Abh. Leipzig 1882, p. 22 und p. 32. Bemerkungen, welche zur Vereinfachung der Rechnung bei komplizierteren Systemen dienen können, finden sich außer bei *G. Kirchhoff,* loc. cit., bei *J. A. Fleming,* Phil. Mag. (5) 20 (1885), p. 221; *S. Kalischer*, Ann. d. Phys. 46 (1892), p. 113; *W. Feussner*, Ann. d. Phys. 9 (1902), p. 1304 und 15 (1904), p. 385; von mehr mathematischem Standpunkt aus werden die Gleichungen untersucht von *W. Ahrens*, Math. Ann. 49 (1897), p. 311. Die Elektrotechnik, die die *Kirchhoff*schen Regeln bei der Projektierung von Leitungsnetzen in großem Maßstab anzuwenden hat, entwickelt ihre eigenen, zum Teil mit denen der Graphostatik identischen Methoden (vgl. Art. V 19).

72) Vgl. auch Nr. **12**.

auf Grund von (II) mit (90) identisch wird, wenn man w_p und E_p durch (91) und (92) definiert.

Zu den vorher betrachteten Strömen gehört ebenso wie im allgemeinen Falle ein Potential φ, im Innern der Leiter bestimmt durch die aus (2) durch Spezialisierung hervorgehende Gleichung:

$$\frac{d}{ds}\sigma q \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d}{ds}\sigma q\,\mathfrak{E}_e. \tag{93}$$

Für $\varphi = \varphi_s$ im Punkte s des Drahtes folgt hieraus:

$$\varphi_s - \varphi_0 = \int_0^s \mathfrak{E}_e\,ds - \int_0^s \frac{C}{\sigma q}\,ds, \tag{94}$$

wobei φ_0 das Potential am Anfange des Drahtes und C eine von s unabhängige Konstante bedeutet. Nach (1) und (III) ist C mit dem Gesamtstrome J identisch, während $\int_0^s \mathfrak{E}_e\,ds = E_s$ die im betreffenden Seitenstück wirkende elektromotorische Kraft darstellt. Unter Berücksichtigung der Definitionsgleichung (91) geht also (94) über in

$$\varphi_s - \varphi_0 = E_s - w_s J. \tag{94'}$$

Für die in dem betreffenden Drahtstück erzeugte Wärme Q_s gilt nach (IV), (1) und (94'):

$$Q_s = w_s J^2. \tag{95}$$

Nur dann, wenn in dem Drahte die eingeprägten elektrischen Kräfte fehlen, kann man statt (95) auch schreiben:

$$Q_s = J(\varphi_s - \varphi_0) = \frac{(\varphi_s - \varphi_0)^2}{w_s}. \tag{95'}$$

18. Das äußere Feld. Das magnetische Feld ergibt sich (vgl. Nr. 4 und Nr. 5) entweder aus einem Vektorpotential $\mathfrak{A}$ oder einem skalaren Potential ψ. Für solche Abstände von den Drähten, gegen welche die Querschnittsdimensionen zu vernachlässigen sind, gilt die Spezialform von (25)

$$\mathfrak{A} = \sum_p \frac{\mu J_p}{4\pi c}\left(\int\right)\frac{d\mathfrak{s}_p}{r}, \tag{96}$$

wenn wir uns auf den Fall konstanter Permeabilität im ganzen Raum beschränken und unter J_p resp. $d\mathfrak{s}_p$ Strom resp. Längenelement des p^{ten} Drahtes verstehen, während r den Abstand des Aufpunktes vom betreffenden Linienelement $d\mathfrak{s}_p$ bedeutet. Ist μ nicht konstant, so führt die Bestimmung von $\mathfrak{A}$ auf die Lösung einer Randwertaufgabe (vgl. Nr. 4). Aus $\mathfrak{A}$ folgen die magnetischen Feldkomponenten nach (17) und (15). In der Nähe der Drähte würde (96) für $\mathfrak{A}$ ein loga-

rithmisches Unendlichwerden ergeben; in Wirklichkeit muß man hier die endliche Drahtdicke unter Anwendung von (25) berücksichtigen, wodurch dieses singuläre Verhalten verschwindet.

Beschränkt man sich durchweg auf größere Entfernungen von den Stromleitern, so ist das Potential ψ wegen seines skalaren Charakters einfacher wie $\mathfrak{A}$. Unter der Annahme $\mu = \text{const.}$ im ganzen Raume gilt für ψ nach (23) durchweg außerhalb der stromführenden Leiter:

$$\Delta \psi = 0. \tag{97}$$

Das Potential ψ ist indessen nicht eindeutig, da nach (II) und (22) die Beziehung gilt:

$$\int_0^1 \mathfrak{H}\, ds = -(\psi_1 - \psi_0) = \frac{J}{c} \tag{98}$$

für jeden geschlossenen Weg mit den Anfangspunkten 0 und 1, der den Strom J umkreist.

Haben wir einen einfachen Stromkreis[73]), dessen Öffnung wir verschließen durch eine gedachte Fläche, an der wir für ψ nach (98) einen Sprung von der Größe $\frac{J}{c}$ vorschreiben, so ist hierdurch zusammen mit (97) und den Bedingungen im Unendlichen ψ bis auf eine belanglose Konstante bestimmt. Die Vergleichung der gesuchten Funktion mit der Grundlösung $\frac{1}{r}$ von (97) (r = Abstand vom gewählten Aufpunkt) mittels des *Green*schen Satzes, liefert ohne weiteres

$$\psi = \frac{J}{4\pi c}\int \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\, d\sigma, \tag{99}$$

wobei n resp. $d\sigma$ Normale resp. Flächenelement der angenommenen vom Strome berandeten Unstetigkeitsfläche bedeutet[74]), während die Integration sich über diese ganze Fläche erstreckt. Man kann noch bemerken, daß der Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\, d\sigma = -\frac{d\sigma}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{d\sigma}{r^2}\cos(n, r)$$

den räumlichen Winkel $d\Omega$ darstellt, unter dem das Flächenelement $d\sigma$ vom Aufpunkte aus gesehen wird und daraufhin ψ nach (99) in

---

73) Der Fall einer Stromverzweigung läßt sich durch die stets mögliche Zerlegung in einfache Stromkreise auf den oben behandelten Fall zurückführen.

74) In (99) ist die positive Normale n so zu bestimmen, daß sie mit dem Strom ein Rechtssystem bildet; unter $\mathfrak{J}$ ist dann stets der absolute Betrag des Stromes zu verstehen.

die äußerst einfache Form schreiben:

$$\psi = \frac{J}{4\pi c}\Omega. \tag{100}$$

Ω ist dabei der Winkel, unter dem der ganze Stromkreis vom Aufpunkte aus erscheint[75]). Die Formeln (99) und (100) sind sofort einleuchtend, wenn man die Unstetigkeitsfläche als magnetische Doppelschicht deutet.

In der Nähe der Drähte muß man natürlich auf die wirklich vorhandene Stromverteilung Rücksicht nehmen; im Stromgebiet selbst existiert kein skalares Potential mehr.

Ist μ nicht im ganzen Raume konstant, so führt die Bestimmung von ψ auf die Lösung einer Randwertaufgabe (vgl. Nr. 4), ähnlich wie dasselbe oben für $\mathfrak{A}$ bemerkt wurde.

Die Bestimmung des äußeren elektrischen Feldes führt unter allen Umständen auf eine Randwertaufgabe, wie sie in Nr. 3 näher definiert wurde.

19. Spezielle Fälle der Stromverzweigung: Wheatstonesche Brücke usw. Die in Fig. 3 skizzierte, von *Wheatstone*[76]) und später von *Kirchhoff*[77]) angegebene Drahtkombination wird ganz allgemein benutzt zum Vergleichen von Widerständen. Die Leitung ASB besteht gewöhnlich ganz oder in ihrem mittleren Teil aus einem über eine Teilung gespannten Draht, auf dem der Kontakt S gleitet, R_2 und R_3 sind die zu vergleichenden Widerstände, E eine Stromquelle, G ein Galvanometer. Der Kontakt S wird so gestellt, daß das Galvanometer keinen Strom zeigt. Dann ist der Brückenstrom $i_1 = 0$ und die Beziehungen (89) und (90) liefern die Relation:

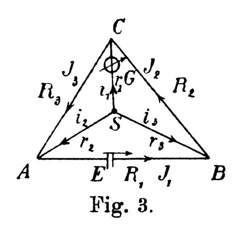


Fig. 3.

$$r_2 R_2 = r_3 R_3. \tag{101}$$

Für die Beurteilung der Empfindlichkeit ist noch die Größe von i_1 von Interesse, für den Fall, daß der Kontakt S nicht gerade die oben

75) Für die Darstellung des räumlichen Winkels durch Oberflächen- oder Linienintegrale vgl. man *J. C. Maxwell*, Treatise on electr. a. magn., Oxford 1881, 2, p. 36ff., Art. 417 ff.

76) *C. Wheatstone*, Phil. Trans. 2 (1843), p. 323 und Ann. Phys. Chem. 62 (1844), p. 535. Für die verschiedenen üblichen Methoden zur Widerstandsbestimmung vgl. man *F. Kohlrausch*, Lehrbuch der praktischen Physik, Leipzig 1905, p. 413ff.

77) *G. Kirchhoff*, Ann. Phys. Chem. 64 (1845), p. 512; Ges. Abh. Leipzig 1882, p. 14.

angenommene Stellung einnimmt[78]). Die erste *Kirchhoff*sche Gleichung (89), angewandt auf die drei Knotenpunkte A, B, C, liefert dann:

$$(102)\qquad \begin{cases} J_1 - J_3 - i_2 = 0, \\ J_2 - J_1 - i_3 = 0, \\ J_3 - J_2 - i_1 = 0, \end{cases}$$

während die zweite Gleichung (90), angewandt auf die drei Stromkreise SAB, SBC und SCA unter Benutzung von (102) die Beziehungen gibt

$$(102')\qquad \begin{cases} (R_1 + r_2 + r_3)J_1 - r_3 J_2 - r_2 J_3 = E, \\ (R_2 + r_3 + r_1)J_2 - r_1 J_3 - r_3 J_1 = 0, \\ (R_3 + r_1 + r_2)J_3 - r_2 J_1 - r_1 J_2 = 0. \end{cases}$$

Aus (102′) folgen J_1, J_2, J_3, nachher liefert (102) die Werte i_1, i_2, i_3 So erhält man z. B. für i_1 den Wert:

$$(103)\qquad i_1 = E\frac{R_2 r_2 - R_3 r_3}{\Delta},$$

wobei Δ die Determinante des Gleichungssystems (102′) bedeutet und durch die verschiedenen Widerstände ausgedrückt werden kann in der Form

$$(103')\qquad \Delta = R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 (r_1 + r_2) + R_2 R_3 (r_2 + r_3) \\ + R_3 R_1 (r_3 + r_1) + (R_1 + R_2 + R_3)(r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1).$$

Unter Benutzung der obigen Resultate findet sich, daß man bei gegebenen Apparaten und Widerständen die empfindlichste Anordnung erhält, wenn man den Knotenpunkt zwischen den beiden größten Widerständen (R_2, R_3) mit demjenigen zwischen den beiden kleinsten (r_2, r_3) durch diejenige Leitung von den zwei noch übrig gebliebenen (Galvanometer- resp. Elementleitung) verbindet, welche den größeren Widerstand hat.

Handelt es sich um die Vergleichung sehr kleiner Widerstände (dicke Stäbe), so ist die *Wheatstone*sche Brücke in gewöhnlicher Anordnung ungeeignet. Es zeigen nämlich erstens alle Verbindungen der Widerstände miteinander einen Übergangswiderstand, der im vorliegenden Falle nicht mehr zu vernachlässigen ist, während man es zweitens praktisch nicht so einrichten kann, daß bei dicken Stäben der Strom schon in unmittelbarer Nähe der Verbindungsstelle über den ganzen Querschnitt gleichmäßig verteilt wird (Ausbreitungswider-

---

78) Vgl. z. B. *J. C. Maxwell*, Treatise on electr. and magn., Oxford 1881, 1, p. 436, Art. 347; man sehe auch *H. Weber*, Verein f. Naturwissensch. zu Braunschweig 5 (1886), p. 19.

stand). Man benutzt in diesem Falle entweder eine kompliziertere, von *W. Thomson*[79]) angegebene Drahtverzweigung, oder eliminiert die oben besprochenen Widerstände nach *A. Matthiessen* und *Hockin*[80]) durch Kombination von vier Beobachtungen in einer der *Wheatstone*schen Brücke im Prinzip gleichen Stromverzweigung.

20. Das magnetische Feld in speziellen Fällen: Einzelner gerader Draht, zwei oder mehrere parallele gerade Drähte. Erstreckt sich der einzelne Draht in der z-Richtung von $z = -\infty$ bis $z = +\infty$, so ergibt (96) für die z-Komponente $\mathfrak{A}_z$ des Vektorpotentials für den Fall eines positiven Stromes J:

$$(104)\qquad \mathfrak{A}_z = \frac{J}{4\pi c_e}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{\sqrt{\varrho^2+z^2}} = -\frac{J}{2\pi c}\log\varrho + \text{const.},$$

wenn noch ϱ den senkrechten Abstand des Aufpunktes vom Drahte bedeutet und von einer (unendlich großen) Integrationskonstante abgesehen wird, während für das äußere Medium $\mu = 1$ gesetzt wird. Das zu demselben Strom gehörige skalare (magnetische) Potential ist

$$(105)\qquad \psi = -\frac{J}{c}\frac{\vartheta}{2\pi},$$

wenn ϑ den um die z-Achse gemessenen Winkel bedeutet.

Nach (104) oder (105) ergibt (17) oder (22)

$$(106)\qquad \mathfrak{H}_z = \mathfrak{H}_\varrho = 0,\quad \mathfrak{H}_\vartheta = \frac{J}{2\pi c}\cdot\frac{1}{\varrho}.$$

Gleichung (106) gilt für beliebige Querschnittsform des stromführenden Drahtes, so lange die Entfernung ϱ groß ist. Beim kreisförmigen Draht gilt (104) und (106) durchweg bis in unmittelbare Nähe der Drahtoberfläche.

Im Innern dieses Drahtes existiert kein Potential ψ, wohl aber das Vektorpotential $\mathfrak{A}^i$, für dessen z-Komponente man nach (18″) und (20) erhält:

$$(104')\qquad \mathfrak{A}_z^i = -\frac{J\mu}{4\pi c}\frac{\varrho^2}{a^2} + \text{const.},$$

wenn das Drahtmaterial die Permeabilität μ hat und der Drahtradius gleich a gesetzt wird. Aus (107) folgt nach (17) und (15)

$$(106')\qquad \mathfrak{H}_z = \mathfrak{H}_\varrho = 0,\quad \mathfrak{H}_\vartheta = \frac{J}{2\pi c}\frac{\varrho}{a^2}.$$

---

79) *W. Thomson*, Phil. Mag. (4) 24 (1862), p. 149. Vgl. auch zur praktischen Ausführung *W. Jaeger*, *St. Lindeck* u. *H. Diesselhorst*, Zeitschr. f. Instr. 23 (1903), p. 33 u. 65, sowie Wiss. Abh. d. P. T. Reichsanstalt 4 (1903), p. 118.

80) Vgl. *F. Kohlrausch*, Lehrbuch der praktischen Physik, Leipzig 1910, p. 451.

Der unendlich lange, gerade Draht ist eine recht unphysikalische Abstraktion, da der Energiegehalt zwischen zwei Ebenen $z = \text{const.}$ in endlichem Abstande voneinander sich als unendlich groß erweist (vgl. auch Nr. 32a).

Sind mehrere unendlich lange parallele Drähte $1, \ldots, p, \ldots, n$ vorhanden, welche von den Strömen $J_1, \ldots, J_p, \ldots, J_n$ in der z-Richtung durchflossen werden, so hat das dazu gehörige Vektorpotential wieder nur eine z-Komponente und es gilt einfach:

$$(107) \qquad \mathfrak{A}_z = -\sum_1^n \frac{J_p}{2\pi c} \log \varrho_p + \text{const.}$$

ϱ_p bedeutet dabei den senkrechten Abstand des Aufpunktes vom p^{ten} Drahte. Gleichung (107) ist genau richtig bis in unmittelbarer Nähe der Drahtoberflächen, wenn die Querschnitte kreisförmig sind und das Drahtmaterial dieselbe Permeabilität (z. B. $\mu = 1$) wie die des Außenraums hat. Das innere Feld des p^{ten} Drahtes bekommt man, indem man über sein eigenes nach (104′) gebildetes Vektorpotential noch die äußeren Potentiale der sonstigen Drähte überlagert, so daß

$$(107') \qquad -\mathfrak{A}_z^i = \frac{\mathfrak{J}_p}{4\pi c} \frac{\varrho^2}{a_p^2} + \sum_1^{p-1} \frac{\mathfrak{J}_p}{2\pi c} \log \varrho_p + \sum_{p+1}^n \frac{\mathfrak{J}_p}{2\pi c} \log \varrho_p .$$

Ist das Drahtmaterial magnetisierbar ($\mu \neq 1$), so führt die Bestimmung des Feldes auch bei kreisförmigem Querschnitt auf die Lösung einer Randwertaufgabe, näher definiert durch (18″), (20) und (21).

Als Beispiel sei erwähnt der Fall zweier paralleler Drähte von kreisförmigem Querschnitt (Radius $= a$), die in entgegengesetzter Richtung vom Strome J durchflossen werden. Für diese gilt, so lange μ durchweg const., z. B. gleich 1 ist, im Außenraum:

$$(108) \qquad \mathfrak{A}_z = -\frac{\mathfrak{J}}{2\pi c} \log \frac{\varrho_1}{\varrho_2};$$

im Innern des ersten resp. zweiten Drahtes hat man[81]):

$$(108') \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{A}_z^i &= -\frac{J}{2\pi c}\left(\frac{1}{2}\,\frac{\varrho_1^2 - a^2}{a^2} - \log \frac{\varrho_2}{a}\right) \\ &\text{resp.} \\ \mathfrak{A}_z^i &= \frac{J}{2\pi c}\left(\frac{1}{2}\,\frac{\varrho_2^2 - a^2}{a^2} - \log \frac{\varrho_1}{a}\right). \end{aligned} \right.$$

Ist für die Drähte $\mu \neq 1$, so kann $\mathfrak{A}$ in Strenge unter Einführung von Bipolarkoordinaten bestimmt werden. So lange indessen

81) In (108′) wurden zu den Formeln solche im übrigen belanglose Konstanten hinzugefügt, daß das Vektorpotential an der Oberfläche der Drähte stetig ist.

der Abstand der beiden Drahtmittellinien d nicht zu klein im Vergleich mit a ist, genügt die Näherung, die man erhält, wenn man über das nach (107) und (107') gebildete Feld noch die durch die beiden Drähte einzeln verursachte Strömung überlagert. Hierbei kann man das ursprüngliche Feld des einen Drahtes in der Nähe des anderen als homogen ansehen und erhält dann ohne weiteres im Außenraume:

$$(109)\qquad \mathfrak{A}_z = -\frac{J}{2\pi c}\left[\log\frac{\varrho_1}{\varrho_2} + \frac{a}{d}\frac{\mu-1}{\mu+1}\left(\frac{a}{\varrho_1}\sin\vartheta_1 + \frac{a}{\varrho_2}\sin\vartheta_2\right)\right],$$

und im Innern des ersten resp. zweiten Drahtes:

$$(109')\qquad \begin{cases} \mathfrak{A}_z^i = -\dfrac{J\mu}{2\pi c}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\varrho_1^2}{a^2} + \dfrac{2}{\mu+1}\dfrac{\varrho_1}{d}\sin\vartheta_1\right) \\ \text{resp.} \\ \mathfrak{A}_z^i = \dfrac{J\mu}{2\pi c}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\varrho_2^2}{a^2} - \dfrac{2}{\mu+1}\dfrac{\varrho_2}{d}\sin\vartheta_2\right), \end{cases}$$

wenn unter ϑ_1 resp. ϑ_2 die um die Achsen des ersten resp. zweiten Drahtes gemessenen Polarwinkel bedeuten, von der Verbindungslinie der Mittelpunkte der Drahtquerschnitte als Nullinie aus gemessen, wobei letztere vom ersten nach dem zweiten Draht hinzeigt.

Unter Benutzung von Bipolarkoordinaten läßt sich auch das elektrische Feld zweier paralleler Drähte leicht angeben. Man führe die neuen Koordinaten α und β ein durch den Ansatz:

$$(110)\qquad e^{\alpha+i\beta} = \frac{(x+iy)+\frac{D}{2}}{(x+iy)-\frac{D}{2}},$$

wobei x, y rechtwinklige Koordinaten in der Ebene senkrecht zu den Drahtachsen bedeuten, während der Nullpunkt $x = y = 0$ in der Mitte zwischen den beiden Drähten liegt. Die Drahtoberflächen bilden dann Kurven $\alpha = \text{const.}$ mit

$$\alpha = \mp\alpha_0 = \mp\frac{1}{2}\log\frac{d+D}{d-D},$$

wenn noch $D = 2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - a^2}$ die Länge derjenigen Linien bedeutet, die man durch den Punkt $x = y = 0$ als Tangente an die beiden Kreisquerschnitte ziehen kann, gemessen zwischen den beiden Berührungspunkten. Führt man um die Punkte $x = \pm\frac{D}{2}$ der x-Achse Polarkoordinaten ϱ_1, ϑ_1 resp. ϱ_2, ϑ_2 ein[82]), so ist allgemein

$$\alpha = \log\frac{\varrho_1}{\varrho_2},\quad \beta = \vartheta_1 - \vartheta_2.$$

82) Die Nullpunkte dieser Koordinatensysteme sind also verschieden von den vorher (bei der Besprechung des magnetischen Feldes) als Nullpunkte benutzten Mittelpunkten der Drahtquerschnitte.

Durchfließt nun wieder der Strom J beide Drähte in entgegengesetzten Richtungen, so gilt für das Potential im Innern des ersten resp. zweiten Drahtes einfach:

$$(111) \qquad \varphi_1 = -\frac{J}{\pi a^2 \sigma} z \quad \text{resp.} \quad \varphi_2 = \frac{J}{\pi a^2 \sigma} z - \varphi_0,$$

wobei φ_0 eine von dem Widerstand der sehr weit weg gedachten Verbindung der beiden Drähte abhängige Konstante bedeutet.

Das äußere Potential bestimmt sich nun nach Nr. 3 als Lösung der Potentialgleichung

$$(112) \qquad \Delta\varphi = 0, \quad \text{d. h.} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} + p^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

mit

$$p = \frac{D/2}{\mathfrak{Cof}\, \alpha - \cos \beta}$$

zu

$$(113) \qquad \varphi = + \frac{J}{\pi a^2 \sigma} \frac{\alpha}{\alpha_0} z - \frac{\varphi_0}{2} \frac{\alpha_0 + \alpha}{\alpha_0},$$

woraus man für die elektrischen Feldstärken erhält:

$$(114) \qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_\alpha = -\dfrac{1}{p} \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = -\dfrac{1}{p \alpha_0} \left(\dfrac{J}{\pi a^2 \sigma} z - \dfrac{\varphi_0}{2} \right), \\ \mathfrak{E}_\beta = -\dfrac{1}{p} \dfrac{\partial \varphi}{\partial \beta} = 0, \\ \mathfrak{E}_z = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = -\dfrac{J}{\pi a^2 \sigma} \dfrac{\alpha}{\alpha_0}. \end{cases}$$

Der Wert von $\mathfrak{E}_\alpha$ für $\alpha = \alpha_0$ stellt die Oberflächenladung des Drahtes pro Flächeneinheit dar. Sind die Drähte weit genug entfernt, so ist diese um den Umfang gleichmäßig verteilt und ergibt sich aus der Formel:

$$(114') \qquad \mathfrak{E}_\alpha = \mp \frac{\frac{a}{d}}{\log \frac{d}{a}} \left(\frac{J}{\pi a^2 \sigma} \frac{z}{d} - \frac{\varphi_0}{2d} \right).$$

21. Das magnetische Feld eines Kreisstroms. Führt man in der Ebene des (linearen) Kreisstromes vom Radius a Polarkoordinaten ϱ, ϑ ein und nennt die Koordinate senkrecht zu dieser Ebene z, so erhält man für die einzig vorhandene Komponente $\mathfrak{A}_\vartheta$ des Vektorpotentials $\mathfrak{A}$ nach (96) ohne weiteres:

$$(115) \qquad \mathfrak{A}_\vartheta = \frac{Ja}{2\pi c} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} \frac{\cos \vartheta \, d\vartheta}{\sqrt{z^2 + \varrho^2 + a^2 - 2a\varrho \cos \vartheta}}.$$

Durch die Substitution

$$\cos \frac{\vartheta}{2} = \xi$$

wird (115) in die übliche Form der vollständigen elliptischen Inte-

grale erster und zweiter Gattung F und E übergeführt. Man erhält:

$$(115') \qquad \mathfrak{A}_\vartheta = \frac{J}{\pi c}\sqrt{\frac{a}{\varrho}}\frac{1}{k}\left[\left(1-\frac{k^2}{2}\right)F(k) - E(k)\right],$$

wobei der Modul k durch die Formel:

$$(116) \qquad k^2 = \frac{4a\varrho}{z^2 + (\varrho + a)^2}$$

zu definieren ist[83]).

Auf der Achse des Kreises (z-Achse) und in unendlicher Entfernung wird $k = 0$, auf dem Drahte selbst ist $k = 1$. Für Werte von $k << 1$ ergibt (110′) die Entwicklung:

$$(115'') \qquad \mathfrak{A}_\vartheta = \frac{J}{32c}\sqrt{\frac{a}{\varrho}}k^3\left[1 + \frac{3}{4}k^2 + \frac{75}{128}k^4 + \cdots\right].$$

Aus $\mathfrak{A}_\vartheta$ folgen, gemäß (17), die Komponenten der magnetischen Feldstärke nach den Formeln:

$$\mathfrak{H}_\varrho = -\frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{A}_\vartheta, \quad \mathfrak{H}_\vartheta = 0, \quad \mathfrak{H}_z = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\varrho\,\mathfrak{A}_\vartheta;$$

die Kraftlinien werden gebildet von den Linien $\mathfrak{A}_\vartheta = \text{const.}$

Beschreibt man das Feld statt durch das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ durch das skalare Potential ψ, so erhält man für letzteres am bequemsten einen Ausdruck in Form einer Kugelfunktionenreihe[84]). Nach (99) gilt zunächst auf der Achse:

$$\psi = \psi_0 = \frac{J}{2c}(1 - \cos\alpha),$$

wobei α der Winkel ist, den die vom Aufpunkt nach einem Punkt des Stromes gezogene Gerade mit der Achse macht. Legt man nun durch den Stromkreis eine Kugel vom beliebigen Radius R und führt um ihren Mittelpunkt Kugelkoordinaten r, θ ein ($\theta = \text{const.}$ sind

83) *G. M. Minchin*, Phil. Mag. (5) 35 (1893), p. 354. In der Hydrodynamik treten diese Formeln wohl zuerst auf bei der Beschreibung der Flüssigkeitsbewegung in Wirbelringen; vgl. *W. Thomson*, Trans. Roy. Soc. Edinburgh 25 (1) (1869), p. 217 und *W. M. Hicks*, Phil. Trans. 171 (1881), p. 628.

84) *J. C. Maxwell*, Treatise on electr. and magn., Oxford 1881, 2, p. 303; vgl. auch *H. Weber*, Dedekind Festschr., Braunschweig 1901, p. 89, sowie *H. Diesselhorst*, Diss. Berlin 1896. Durch elliptische Integrale dritter Gattung wurde der räumliche Winkel dargestellt von *G. M. Minchin*, Phil. Mag. (5) 35 (1893), p. 354; das Verhalten des magnetischen Potentials ψ in der Nähe des Drahtes, welcher jetzt nicht mehr als unendlich dünn angenommen wird, untersucht derselbe Autor: Phil. Mag. (5) 36 (1893), p. 201. Eine für die Rechnung bequemere Darstellung mittels *Jacobi*scher θ-Funktionen, wobei der Gebrauch von Tafeln unnötig wird, gibt *H. Nagaoka*, Phil. Mag. (6) 6 (1903), p. 19.

Das Potential eines rechteckigen Stromes wird behandelt von *W. Kind*, Diss. Göttingen 1878 und *G. M. Minchin*, Electrician 903 (1895), p. 603 und 906 (1895), p. 706.

Breitenkreise), so erhält das Potential $\psi = \psi_0$ auf der Achse ($\theta = 0$ resp. $\theta = \pi$) die Form:

$$\psi_0 = \frac{J}{2c}\left\{1 - \frac{r - R\cos\theta_0}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta_0}}\right\}, \tag{117}$$

wobei θ_0 der Winkel ist, den die vom Mittelpunkte dieser Kugel nach einem Punkte des Stromes gezogene Linie mit der Achse bildet, so daß

$$\sin\theta_0 = \frac{a}{R}. \tag{118}$$

Statt (117) kann man auch, je nachdem $r < R$ oder $r > R$ ist, schreiben[85]):

$$\psi_0 = \frac{J}{2c}\left[(1 + \cos\theta_0) - \sin^2\theta_0 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{r}{R}\right)^n P_n'(\cos\theta_0)\right] \tag{119}$$

resp.

$$\psi_0 = \frac{J}{2c}\sin^2\theta_0 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n'(\cos\theta_0). \tag{119'}$$

Mit Rücksicht darauf, daß ψ der Potentialgleichung genügt, folgt dann aus (119) und (119') ohne weiteres:

$$\psi = \frac{J}{2c}\left[(1 + \cos\theta_0) - \sin^2\theta_0 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{r}{R}\right)^n P_n'(\cos\theta_0) P_n(\cos\theta)\right] \tag{120}$$

resp.

$$\psi = \frac{J}{2c}\sin^2\theta_0 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n'(\cos\theta_0) P_n(\cos\theta), \tag{120'}$$

wobei (120) innerhalb und (120') außerhalb unsrer Kugel vom Radius R gilt. Die beiden magnetischen Feldkomponenten folgen nach (22) durch Anwendung der Formeln:

$$\mathfrak{H}_r = -\frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad \mathfrak{H}_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}.$$

Von Interesse für die Theorie der Tangentenboussole z. B. ist das Feld in der Nähe des Mittelpunktes des Kreisstromes. Man erhält aus (120), indem man, wie das für die Umgebung dieses Punktes am einfachsten ist, noch den Radius unserer Kugel zu $R = a$ annimmt:

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_\theta = -\frac{J}{2c}\frac{\sin\theta}{a}\Big[&P_1'(\cos\theta) - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2 P_3'(\cos\theta) \\ &+ \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{r}{a}\right)^4 P_5'(\cos\theta) + \cdots \\ &+ (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots 2n-1}{2\cdot 4\cdots 2n}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n} P_{2n+1}'(\cos\theta) + \cdots\Big],\end{aligned} \tag{121}$$

85) Das Resultat folgt aus der bekannten Entwicklung der Quadratwurzel unter Benutzung der Relationen zwischen P_n' und P_n.

oder auch ausgerechnet:

$$(121') \qquad \mathfrak{H}_\theta = -\frac{J}{2c}\frac{\sin\theta}{a}\left[1 - \frac{3}{8}\frac{r^2}{a^2}(3 + 5\cos 2\theta) + \cdots\right].$$

Bei der Anwendung dieses Resultats auf die Tangentenbussole ist zu bedenken, daß θ das Komplement des gewöhnlich benutzten, von der Ebene des Stromkreises aus gemessenen Winkels ist.

22. Das magnetische Feld einer Spule. Befindet man sich nicht in unmittelbarer Nähe der Wicklung, so wird man für die Rechnung den Wicklungsraum als gleichmäßig vom Strome erfüllt ansehen können. Wird der Draht vom Strome $\mathfrak{J}$ durchflossen und ist die Anzahl Windungen n, so wird der in Rechnung zu ziehende Strom pro Flächeneinheit (vgl. Fig. 4)

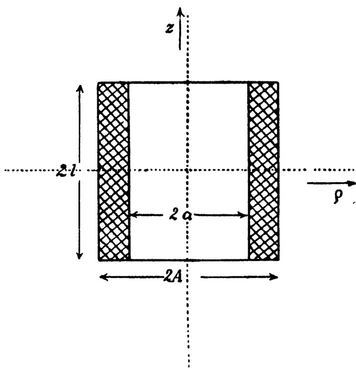


Fig. 4.

$$(122) \qquad \mathfrak{J} = \frac{nJ}{2l(A-a)}.$$

Verschließt man die Spule durch zwei Ebenen $z = +l$ und $z = -l$, so gilt nach (99) für das skalare Potential $\psi = \psi_a$ im äußeren Raum:

$$\psi_a = \frac{\mathfrak{J}}{4\pi c}\int\limits_{\varrho=a}^{\varrho=A} d\varrho \int\limits_{z=-l}^{z=+l} dz \int\limits_0^{\varrho} \varrho\, d\varrho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\mathfrak{J}}{4\pi c}\int\limits_a^A d\varrho \int\limits_0^{\varrho} \varrho\, d\varrho \int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{1}{r}\right]_{z=-l}^{z=+l} d\varphi,$$

wobei r den Abstand des Integrationspunktes vom Aufpunkt bedeutet[86]).

Schreibt man

$$(123) \qquad \psi_a = \Psi_1 - \Psi_2$$

mit

$$(124) \quad \Psi_1 = \frac{J}{2c}\int\limits_a^A d\varrho \int\limits_0^{\varrho} \varrho\, d\varrho \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{r}\right)_{z=l} d\varphi \text{ und } \Psi_2 = \frac{J}{2c}\int\limits_a^A d\varrho \int\limits_0^{\varrho} \varrho\, d\varrho \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{r}\right)_{z=-l} d\varphi,$$

so kann Ψ_1 resp. Ψ_2 gedeutet werden als das Potential je einer geeignet mit magnetischen Massen belegter Kreisscheiben; im Grenzfall $A - a << a$ ist die Belegung gleichförmig. Im Innenraum gilt die Formel

$$(125) \qquad \psi = \psi_i = \Psi_1 - \Psi_2 - \frac{\mathfrak{J}}{c}(A-a)z,$$

da das Potential entstanden gedacht werden kann durch Differenzwirkung einer unendlich langen Spule mit zwei aufgesetzten bis ins Unendliche reichenden Stücken, welche vom entgegengesetzt gerichteten Strome durchflossen werden.

86) Spulen mit Eisenkern werden behandelt von *W. Rogowski*, Diss. Danzig 1908.

Die Potentiale Ψ_1 und Ψ_2 können nur auf der Mittellinie in endlicher Form angegeben werden. Dort gilt, so lange $A - a << a$ ist:

$$\Psi_1 = \Psi_1{}^0 = \frac{1}{2c}\frac{nJ}{2l}\left(\sqrt{a^2 + (z-l)^2} - \sqrt{(z-l)^2}\right) \tag{126}$$

und im allgemeinen Falle:

$$\begin{aligned}\Psi_1 = \Psi_1{}^0 = \frac{\mathfrak{J}}{4c}\Big[\Big\{A\sqrt{A^2 + (z-l)^2} - a\sqrt{a^2 + (z-l)^2}\Big\} \\ - 2(A-a)\sqrt{(z-l)^2} \\ + (z-l)^2 \log \frac{A + \sqrt{A^2 + (z-l)^2}}{a + \sqrt{A^2 + (z-l)^2}}\Big].\end{aligned} \tag{126'}$$

$\Psi_2{}^0$ folgt aus $\Psi_1{}^0$ durch Vertauschung von l mit $-l$; die Wurzeln sind in den beiden Ausdrücken stets positiv zu wählen. Für praktische Anwendungen interessiert hauptsächlich das Feld in der Umgebung der Achse $\varrho = 0$ [87]). Macht man den Ansatz

$$\Psi = \sum C_n(z)\,\varrho^n, \tag{127}$$

so folgt aus der Differentialgleichung für Ψ, daß man die C_n sukzessive durch Differentiation findet nach der Formel:

$$C_{n+2}(z) = -\frac{1}{(n+2)^2}\frac{d^2}{dz^2}C_n(z).$$

Im vorliegenden Falle, wo $C_0(z) = \Psi^0 = \Psi_1{}^0 - \Psi_2{}^0$ und $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=0} = 0$, erhält man demnach

$$\Psi = \Psi^0 - \frac{\varrho^2}{2^2}\frac{d^2}{dz^2}\Psi^0 + \frac{\varrho^4}{2^2 4^2}\frac{d^4}{dz^4}\Psi^0 - + \cdots. \tag{128}$$

Für die Anwendung sowie für die Substitution in (128) bequemer wie die Formeln (126) und (126′) sind Entwicklungen von Ψ_0 nach Potenzen von $z - z_0$, wenn z_0 denjenigen Punkt bedeutet, in dessen Umgebung man das Feld berechnen will. Die betreffende Entwicklung lautet in der Nähe des Mittelpunktes ($z_0 = 0$) für die dünne Spule ($A - a << a$):

$$\Psi^0 = \frac{1}{c}\frac{nJ}{2l}\left(1 - \frac{l}{d}\right)z\left[1 + \frac{1}{2}\frac{l}{d}\left(1 + \frac{l}{d}\right)\frac{z^2}{d^2} + \cdots\right], \tag{129}$$

wenn $d^2 = a^2 + l^2$ gesetzt wird.

---

87) Einen allgemeinen Ausdruck für das Potential einer gleichmäßig mit Masse belegten Scheibe und damit zugleich für das Potential einer unendlich dünnen Spule ($A - a << a$) erhält man leicht (analog wie im vorigen Paragraphen für die Doppelschicht) in Form einer Kugelfunktionenreihe; vgl. *J. C. Maxwell*, Treatise on electr. and magn., Oxford 1881, 2, p. 284 Art. 676, sowie *W. Thomson* and *Tait*, Natural Philosophy, Art. 546. In Form elliptischer Integrale wird das Potential der Kreisscheibe erhalten von *G. M. Minchin*, Phil. Mag. (5) 37 (1894), p. 204; eine Integraldarstellung mit *Bessel*schen Funktionen findet sich bei *H. Weber*, J. f. Math. 75 (1872), p. 89.

Hieraus oder auch direkt aus (126') folgt für den allgemeinen Fall die Entwicklung:

$$(129') \quad \Psi^0 = \frac{\mathfrak{J}}{c} lz \Big[\Big\{ \frac{A-a}{l} - \log \frac{A+D}{a+d} \Big\} - \frac{z^2}{2} \Big\{ \frac{1}{D(A+D)} - \frac{1}{d(a+d)} - \frac{l^2}{3} \Big(\frac{A+2D}{D^3(A+D)^2} - \frac{a+2d}{d^3(a+d)^2} \Big) \Big\} + \cdots \Big],$$

wenn analog wie oben $D^2 = A^2 + l^2$ gesetzt wird. Für die verschiedenen Grenzfälle (lange, resp. flache Spulen z. B.) kann man natürlich auch wieder noch die geschweiften Klammern durch geeignete Entwicklungen ersetzen[88]). Ist z. B. die Spule nicht nur dünn im Vergleich mit ihrem Durchmesser, sondern dieser auch klein im Vergleich mit der Länge, so ergibt (129):

$$\Psi^0 = \frac{1}{2c} \frac{nJ}{2l} \frac{a^2}{l^2} z \Big[1 + \frac{z^2}{l^2} + \cdots \Big],$$

so daß nach (125) und (128) mit Rücksicht auf (122):

$$(130) \qquad \Psi_i = -\frac{1}{c} \frac{nJ}{2l} z \Big[\Big(1 - \frac{a^2}{2l^2} \Big) - \frac{1}{4} \frac{a^2}{l^2} \frac{2z^2 - 3\varrho^2}{l^2} + \cdots \Big].$$

Der Betrag der Inhomogenität des Feldes wird durch den zweiten Term der eckigen Klammer zum Ausdruck gebracht.

Innerhalb der Spule ist also in der Nähe der Mitte die in Richtung der Achse gerichtete Feldstärke in erster Näherung:

$$\mathfrak{H}_z = \frac{1}{c} \frac{nJ}{2b};$$

außerhalb der Spule wird dieselbe:

$$\mathfrak{H}_z = -\frac{1}{c} \frac{nJ}{2l} \frac{a^2}{2l^2},$$

also im Verhältnis $a^2/2l^2$ geringer. Die Kraftlinienverteilung im ganzen Raume wird veranschaulicht durch Fig. 5[89]). Dieselbe ist so eingerichtet, daß der Kraftfluß konstant ist zwischen zwei Rotationsflächen, welche durch Umdrehung aufeinander folgender Kraftlinien um die Spulenachse entstehen. Die Wicklung ist bei der Ausrechnung als unendlich dünn angenommen, während $l = 2a$ gesetzt ist.

Die Homogenität wird verbessert, indem man an den Enden der Zylinderspule zwei Spulen in Form abgestumpfter Kegel aufsetzt[90]).

---

88) Solche Entwicklungen, auch für $z_0 \neq 0$, finden sich bei *J. C. Maxwell*, Treatise on electr. and magn., Oxford 1881, 2, p. 324ff. Art. 709ff., sowie besonders ausführlich bei *E. Mascart* et *J. Joubert*, Leçons sur l'électricité et le magnétisme, Paris 1886, p. 81ff.

89) Diese Figur wurde mir freundlichst zur Verfügung gestellt von Herrn Prof. *R. Emden*.

90) *L. Houllevigue*, Journ. de phys. (3) 7 (1898), p. 466.

Eine solche Konstruktion bildet die Annäherung an ein der Länge nach gleichmäßig bewickeltes Ellipsoid, das ebenso wie die gleichmäßig bewickelte Kugel im Innern ein absolut homogenes Feld erzeugt[91]).

Ist die Spule flach, d. h. ist sowohl $(A - a)$ wie $l << a$, so ergibt (125) für Ψ^0 die Näherungsformel:

$$(131) \quad \Psi^0 = \frac{\mathfrak{J} b}{c} z \left[\left(1 - \frac{l}{a} + \frac{1}{2} \frac{b l}{a^2}\right) + \frac{l}{2a} \frac{z^2}{a^2} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{b}{a}\right) + \cdots \right],$$

wobei die Faktoren der einzelnen Glieder richtig sind bis auf Größen

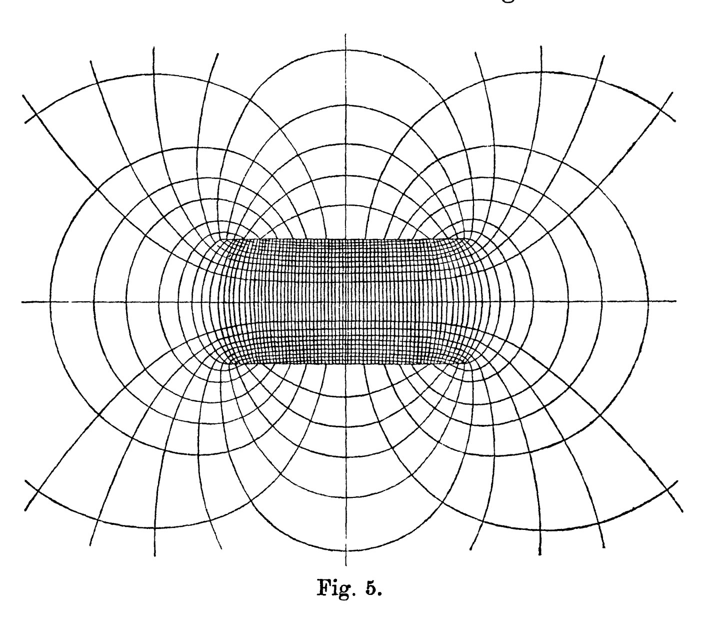


Fig. 5.

von der Ordnung l^3/a^3 und zur Abkürzung $A - a = b$ gesetzt wurde. Nach (125) und (128) wird wieder:

$$(131') \quad \Psi_i = -\frac{1}{c} \frac{\mathfrak{J} b l}{a} z \left[\left(1 - \frac{1}{2} \frac{b}{a}\right) - \frac{2 z^2 - 3 \varrho^2}{4 a^2} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{b}{a}\right) + \cdots \right]$$

eine Formel, die bei der Berechnung des Kraftfeldes einer mit mehreren Windungen versehenen Tangentenbussole Anwendung findet.

Neben dem magnetischen Felde wäre es für manche Zwecke wichtig, auch das elektrische Feld von Spulen zu kennen. Dieses ist indessen als Randwertaufgabe (vgl. Nr. **3**) ein schwierigeres Problem wie das oben behandelte und wurde wohl deshalb in der Literatur nur gestreift[92]).

91) Vgl. hierzu *J. C. Maxwell*, Treatise on electr. and magn., Oxford 1881, 2, p. 279 ff., Art. 670 ff.

92) *M. Brillouin*, Ann. chim. phys. 26 (1902), p. 460, betrachtet den Fall

II. Quasistationäres Feld.

A. Allgemeines.

23. Grundgleichungen und Potentiale. Im folgenden sollen solche Vorgänge betrachtet werden, die zeitlich so langsam verlaufen, daß der Raum, welcher von dem ausgesandten elektromagnetischen Felde in einer Zeit überstrichen wird, während welcher sich der Zustand des Systems nicht merklich ändert, als unendlich groß zu betrachten ist im Vergleich mit den Dimensionen des Systems, wenigstens soweit die Ausbreitung im freien Äther in Frage kommt.

a) *Ruhende Körper.* Für ruhende Systeme kommt man dann oft zu einer befriedigenden Beschreibung, indem man den Verschiebungsstrom $\varepsilon\dot{\mathfrak{E}}$ durchweg vernachlässigt und demgemäß die Grundgleichungen in der Form schreibt[93]):

$$\text{(I')} \qquad \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{B}} = \frac{\mu}{c}\dot{\mathfrak{H}} = -\operatorname{rot}\mathfrak{E},$$

$$\text{(II')} \qquad \frac{1}{c}\mathfrak{J} = \frac{\sigma}{c}(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_e) = \operatorname{rot}\mathfrak{H},$$

wenn wir uns von vornherein auf isotrope Körper beschränken und $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$ setzen. Der einzige Unterschied gegen den stationären Fall besteht also darin, daß die elektrische Feldstärke jetzt nicht mehr wirbelfrei verteilt ist. Dementsprechend sind das elektrische und magnetische Feld nicht mehr wie im Teil I in Strenge jedes für sich zu bestimmen; man kann aber das ganze Feld aus einem Vektor $\mathfrak{P}$ ableiten[94]). Mit Rücksicht auf (16) und (I') kann man nämlich zunächst unter Einführung eines skalaren Potentials φ schreiben:

$$\text{(132)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{H} = \dfrac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathfrak{P}, \\ \mathfrak{E} = -\dfrac{\dot{\mathfrak{P}}}{c} - \operatorname{grad}\varphi. \end{cases}$$

Aus der nach (II') für $\mathfrak{P}$ und φ folgenden Gleichung fällt dann φ

---

einer Zylinderspule, die längs einer Erzeugenden einen Potentialsprung (als Stromquelle) besitzt, es hat indessen das sich ergebende elektrische Feld nur sehr entfernte Ähnlichkeit mit dem einer gewöhnlichen Spule. *P. Drude,* Ann. d. Phys. 9 (1902), p. 324, berechnet die Kapazität einer Spule (für seine Theorie des Tesla-transformators), indem er dieselbe durch zwei auf entgegengesetzt gleiche Potentiale geladene Kreisringe in einem Abstande gleich der Länge der Spule ersetzt.

93) Vgl. *Maxwell*sche Theorie, Art. *H. A. Lorentz* V 13, Nr. 6 und Nr. 9.

94) Vgl. das über den ähnlich gebauten *Hertz*schen Vektor Gesagte in Elektromagnetische Wellen, Art. *M. Abraham* V 18, Nr. 5.

heraus, wenn man die zulässige Annahme

$$\text{div}\,\mathfrak{P} = -\frac{\mu\sigma}{c}\varphi \tag{133}$$

macht, wodurch diese Gleichung die Form annimmt

$$\text{grad div}\,\mathfrak{P} - \text{rot rot}\,\mathfrak{P} - \frac{\mu\sigma}{c^2}\dot{\mathfrak{P}} = -\frac{\mu\sigma}{c}\mathfrak{E}_e \tag{134}$$

oder

$$\Delta\mathfrak{P} - \frac{\mu\sigma}{c^2}\dot{\mathfrak{P}} = -\frac{\mu\sigma}{c}\mathfrak{E}_e, \tag{134'}$$

während $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ nach (132) unter Berücksichtigung von (133) jetzt allein durch $\mathfrak{P}$ ausgedrückt sind. Hat man z. B. einen Körper, in dem zeitlich veränderliche, eingeprägte elektrische Kräfte wirken, und will man das zugehörige elektromagnetische Feld berechnen, so ist der Gang der Rechnung folgender: Zunächst bestimmt man die zwei zum Innern, resp. zum Äußeren des Körpers gehörigen Funktionen $\mathfrak{P}$ so als Lösungen von (134'), daß die Bedingungen im Unendlichen und die Grenzbedingungen an der Oberfläche erfüllt sind, wobei letztere besagen, daß die Tangentialkomponenten von $\mathfrak{H}$ und die Normalkomponenten von $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$ stetig übergehen. Diese Feldstärken leiten sich nach der ersten Gleichung von (132) ab. Aus $\mathfrak{P}$, das jetzt vollständig bestimmt ist, folgt dann im Innern des Körpers der Wert von $\mathfrak{E}$ ohne weiteres mit Rücksicht auf (133) aus der zweiten Gleichung von (132) durch Differentiation. Für den den Körper umgebenden Nichtleiter ($\sigma = 0$) versagt indessen diese Berechnungsweise, weil dort Gleichung (133) ihre Bedeutung als Verbindungsglied von $\mathfrak{P}$ mit φ verliert. Die Aussage, daß außer den Ladungen auf der Oberfläche des Körpers keine anderen mehr im Nichtleiter vorhanden sind,

$$\text{div}\,\mathfrak{E} = 0$$

führt dann aber für das Potential φ, mit Rücksicht auf (132) und (133) mit $\sigma = 0$ zu der Bestimmungsgleichung

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{c}\,\text{div}\,\dot{\mathfrak{P}} = 0 \tag{134''}$$

Da nach dem Obigen einerseits $\mathfrak{P}$ im ganzen Raum und andererseits $\mathfrak{E}$ an der Oberfläche des Körpers bekannt ist, folgt aus (134'') das Potential φ bis auf eine belanglose additive Konstante. Sind noch fremde Ladungen im Nichtleiter zerstreut, so braucht man dem eben erhaltenen φ nur noch das elektrostatische Potential dieser Ladungen zu überlagern.

Ist die Strömung schon bekannt, so verwendet man mit Vorteil das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ zur Beschreibung des magnetischen Feldes, wie es in Nr. 4 definiert wurde und dessen Wert man aus den bekannten

Strömen durch Integration nach (25) findet. Der Unterschied in der Definition von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{P}$ besteht darin, daß statt Gleichung (133) durchweg div $\mathfrak{A} = 0$ gilt. Im freien Äther sind also $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{A}$ durch dieselbe Gleichung definiert. Auch das skalare magnetische Potential ψ (vgl. Nr. 4) ist außerhalb der Leiter ebenso wie im stationären Fall ohne weiteres zu verwenden. Ein skalares elektrisches Potential φ, aus dem $\mathfrak{E}$ ableitbar, existiert indessen nicht mehr. Statt dessen kann man mit Rücksicht auf die Gleichung div $\mathfrak{E} = 0$ dort, wo keine Ladungen vorhanden sind, $\mathfrak{E}$ aus einem Vektor $\mathfrak{G}$ ableiten nach der Gleichung:

$$\mathfrak{E} = \operatorname{rot} \mathfrak{G}, \tag{135}$$

welcher z. B. gelegentlich von *Maxwell* (Current-Funktion) benutzt wurde[95]). Die frühere Bestimmung von $\mathfrak{E}$ aus einem Potential wird näherungsweise richtig, wenn man die vom veränderlichen Magnetfeld im Äther erzeugten elektrischen Kräfte vernachlässigt. Nur im Inneren der Leiter werden dann bei dieser Annahme die Gleichungen gegenüber dem stationären Fall abgeändert.

b) *Bewegte Körper.* Für bewegte Körper (Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes gleich $\mathfrak{v}$) genügt es in den meisten praktischen Fällen, nur die linke Seite der Gleichung (I′) zu vervollständigen durch das der „Induktion durch Bewegung“ entsprechende Glied $\frac{\mu}{c} \operatorname{rot} [\mathfrak{H}\mathfrak{v}]$. Die Grundgleichungen lauten dann[96]):

$$\frac{\mu}{c} \dot{\mathfrak{H}} + \frac{\mu}{c} \operatorname{rot} [\mathfrak{H}\mathfrak{v}] = - \operatorname{rot} \mathfrak{E}, \tag{I″}$$

$$\frac{\sigma}{c} (\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_e) = \operatorname{rot} \mathfrak{H}. \tag{II″}$$

Streng genommen wäre auch die linke Seite von (II′) durch Glieder zu vervollständigen, die dem Verschiebungsstrom, dem Konvektionsstrom und dem „Röntgen“strom entsprechen; dieselben können aber öfters außer Betracht gelassen werden. Die verschiedenen Theorien für bewegte Körper (von *Hertz*, *Lorentz*, *Cohn*, *Minkowski* usw.) sind bei Zulassung dieser Vernachlässigungen alle gleichlautend. Statt rot $[\mathfrak{H}\mathfrak{v}]$ in Gleichung (I″) kann man für starre Körper auch schreiben:

$$(\mathfrak{v} \operatorname{grad}) \mathfrak{H} + [\mathfrak{H}, \tfrac{1}{2} \operatorname{rot} \mathfrak{v}].$$

Diesen beiden Glieder entsprechen dann die von der Translations-

95) *J. C. Maxwell,* Treatise on electr. a. magn., Oxford 1881, 2, p. 263, Art. 647 ff.

96) Vgl. *Maxwell*sche Theorie, Art. *H. A. Lorentz* V 13, Nr. 6. Die dortigen Hauptgleichungen gehen mit den weiter unten angegebenen Vernachlässigungen in (I″) und (II″) über auf Grund der dortigen Relation (14) und der in Nr. 17 angegebenen Stromzerlegung.

bewegung, resp. Drehbewegung an der betreffenden Stelle erzeugten Wirbel der elektrischen Kraft.

Die Grenzbedingungen an der Oberfläche bewegter Körper nehmen nach (I″) und (II″) eine andere Gestalt an, wie bisher. Nach (II″) gehen zwar noch immer die Tangentialkomponenten von $\mathfrak{H}$ an der Trennungsfläche der Körper 1 und 2 stetig ineinander über, die Tangentialkomponenten $\mathfrak{E}_h$ von $\mathfrak{E}$ indessen zeigen dort einen Sprung von der Größe

$$(136)\qquad \mathfrak{E}_{h2} - \mathfrak{E}_{h1} = \frac{1}{c}[\mathfrak{B}\mathfrak{v}]_{h1} - \frac{1}{c}[\mathfrak{B}\mathfrak{v}]_{h2}$$

m. a. W. die elektrische Feldstärke hat an der Oberfläche bewegter Körper einen Flächenwirbel von der Größe:

$$(137)\qquad [\mathfrak{n}, \mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1] = \frac{1}{c}\Big[\mathfrak{n}[\mathfrak{B}\mathfrak{v}]\Big]_1 - \frac{1}{c}\Big[\mathfrak{n}[\mathfrak{B}\mathfrak{v}]\Big]_2,$$

wobei $\mathfrak{n}$ die von 1 nach 2 positiv gerechnete Einheitsnormale bedeutet. Da die Normalkomponente von $\mathfrak{B}$ die Trennungsfläche stetig durchsetzt, kann man den Flächenwirbel von $\mathfrak{E}$ auch darstellen in der Form:

$$(137')\qquad [\mathfrak{n}, \mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1] = \frac{\mathfrak{v}_n}{c}(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2) - (\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2)\frac{\mathfrak{B}_n}{c}.$$

Bewegt sich der Körper im freien Raum, so kann man den Flächenwirbel für unmagnetische Körper noch einfacher ausdrücken durch die Formel:

$$(137'')\qquad [\mathfrak{n}, \mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1] = -\mathfrak{v}_1\frac{\mathfrak{B}_n}{c},$$

wobei $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit der Oberfläche des betreffenden Körpers ist.

Ebenso wie oben kann man auch hier einen Vektor $\mathfrak{P}$ einführen, definiert durch:

$$(138)\qquad \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{P} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{P} - \frac{\mu\sigma}{c^2}(\dot{\mathfrak{P}} - [\mathfrak{v}\operatorname{rot}\mathfrak{P}]) = -\frac{\mu\sigma}{c}\mathfrak{E}_e$$

oder

$$(138')\qquad \Delta\mathfrak{P} - \frac{\mu\sigma}{c^2}(\dot{\mathfrak{P}} - [\mathfrak{v}\operatorname{rot}\mathfrak{P}]) = -\frac{\mu\sigma}{c}\mathfrak{E}_e,$$

aus dem $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$ folgen nach den Gleichungen:

$$(139)\qquad \begin{cases} \mathfrak{H} = \dfrac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathfrak{P}, \\ \mathfrak{E} = -\dfrac{\dot{\mathfrak{P}}}{c} + \left[\mathfrak{v}\operatorname{rot}\dfrac{\mathfrak{P}}{c}\right] + \dfrac{c}{\mu\sigma}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{P}. \end{cases}$$

Für Nichtleiter versagt die letzte Gleichung von (139), weil auch hier wieder die zu grunde gelegte Zusammenhangsformel zwischen $\mathfrak{P}$ und φ als solche ihren Sinn verliert. Man kann aber immer noch wie oben $\mathfrak{E}$ bestimmen aus

$$(139')\qquad \mathfrak{E} = -\frac{\dot{\mathfrak{P}}}{c} + \left[\mathfrak{v}\operatorname{rot}\frac{\mathfrak{P}}{c}\right] - \operatorname{grad}\varphi.$$

Das Potential φ erhält man dann im Außenraum für sich aus der Gleichung

$$(139'') \quad \Delta\varphi = -\frac{1}{c}\operatorname{div}(\dot{\mathfrak{P}} - [\mathfrak{v} \operatorname{rot} \mathfrak{P}]) = \frac{1}{c}(\operatorname{rot}\mathfrak{P}, \operatorname{rot}\mathfrak{v}),$$

deren Lösung an der Oberfläche der Körper den vorher besprochenen Grenzbedingungen anzupassen ist.

Das über die verschiedenen anderen Potentiale oben für ruhende Körper Gesagte überträgt sich ohne weiteres.

24. Die Energiegleichung. Aus (I′) und (II′) folgt die Energiegleichung in der Form[97]:

$$(140) \qquad \dot{W}_m + Q + \operatorname{div}\mathfrak{S} = \mathfrak{J}\mathfrak{E}_e,$$

wobei $W_m = \frac{\mu}{2}\mathfrak{H}^2$ die magnetische Energie, $Q = \sigma(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_e)^2 = \mathfrak{J}(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_e)$ die *Joule*sche Wärme, $\mathfrak{S} = c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$ den *Poynting*schen Strahlungsvektor und $\mathfrak{J}\mathfrak{E}_e$ die von den eingeprägten elektrischen Kräften geleistete Arbeit, alles pro Volumeneinheit gerechnet, bedeutet. Infolge der Vernachlässigung des Verschiebungsstroms tritt die elektrische Energie $W_e = \frac{\varepsilon}{2}\mathfrak{E}^2$ nicht in der Energiegleichung auf, die Grundgleichungen (I′) und (II′) beschreiben also nur solche Zustände, bei denen dieselbe praktisch neben der magnetischen Energie zu vernachlässigen ist. Sind die stromführenden Systeme auf einen endlichen Bereich beschränkt, so ergibt (133) durch eine Integration über den Raum:

$$(141) \qquad \int (\dot{W}_m + Q)\,dS = \int \mathfrak{J}\mathfrak{E}_e\,dS,$$

da das über eine unendlich entfernte Fläche erstreckte Integral $\int \mathfrak{S}_n\,d\sigma$ verschwindet, wie sich aus der expliziten Darstellung (25) des Vektorpotentials, spezialisiert für große Abstände von den Strömen, ohne weiteres ergibt. Soweit (I′) und (II′) ausreichen, findet also Energieverlust durch Strahlung nicht statt.

Für bewegte Körper erhält man aus (I″) und (II″) die Energiegleichung, bezogen auf ein ruhendes Raumteilchen, in der Form:

$$(142) \qquad \dot{W}_m + Q + \frac{\mathfrak{v}}{c}[\mathfrak{J}\mathfrak{B}] + \operatorname{div}(\mathfrak{S} + \mathfrak{S}') = \mathfrak{J}\mathfrak{E}_e,$$

wenn man noch neben dem gewöhnlichen Strahlungsvektor $\mathfrak{S}$ den Vektor

$$(143) \qquad \mathfrak{S}' = [\mathfrak{H}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]]$$

97) Für die allgemeine Form der Energiegleichung sei verwiesen auf *Maxwell*sche Theorie, Art. *H. A. Lorentz* V 13, Nr. 22 und Nr. 23. Man vgl. auch *G. Nordström*, Die Energiegleichung für das elektromagnetische Feld bewegter Körper. Diss. Helsingfors 1908.

einführt, welcher dem absoluten Betrag nach gleich $|\mathfrak{H}||\mathfrak{B}||\mathfrak{v}| \sin(\mathfrak{v}, \mathfrak{B})$ ist und in der $\mathfrak{v}, \mathfrak{B}$-Ebene senkrecht auf $\mathfrak{B}$ steht. Das Auftreten dieses neuen Strahlungsvektors $\mathfrak{S}'$ neben $\mathfrak{S}$ wird sofort verständlich, wenn man bedenkt, daß $\frac{1}{c}[\mathfrak{B}\mathfrak{v}]$ nach (I′) die durch die Bewegung erzeugte elektrische Kraft darstellt. Die Rechnung ergibt ursprünglich ein Glied von der Form ($\mathfrak{H}$ rot $[\mathfrak{B}\mathfrak{v}]$), wofür man dann auch schreiben kann ($[\mathfrak{B}\mathfrak{v}]$ rot $\mathfrak{H}$) — div $[\mathfrak{H}[\mathfrak{B}\mathfrak{v}]]$, was mit Rücksicht auf (II″) die Energiegleichung in der Form (142) ergibt. Das Glied $\frac{\mathfrak{v}}{c}[\mathfrak{J}\mathfrak{B}]$ ist als Arbeitsleistung der *Biot-Savart*schen Kraft $\frac{1}{c}[\mathfrak{J}\mathfrak{B}]$ aufzufassen. Statt in der Form (142) kann man die Energiegleichung ersichtlich auch schreiben:

$$(142') \qquad \frac{dW_m}{dt} + Q + \frac{\mathfrak{v}}{c}[\mathfrak{J}\mathfrak{B}] + \operatorname{div}(\mathfrak{S} + \mathfrak{S}' - W_m \mathfrak{v}) = \mathfrak{J}\mathfrak{E}_e,$$

wenn $\frac{dW_m}{dt}$ die Änderungsgeschwindigkeit der in dem betreffenden bewegten Element enthaltenen magnetischen Energie bedeutet.

Führt man noch den Tensor der *Maxwell*schen Spannungen τ^* ein[98]), so kann man (142′) die einfache Form geben[99]):

$$(142'') \qquad \frac{dW_m}{dt} + Q + \operatorname{div}\mathfrak{S} + (\tau^* \operatorname{def}\mathfrak{v}) = \mathfrak{J}\mathfrak{E}_e.$$

Im allgemeinen ist übrigens (142) resp. (142′) noch zu vervollständigen durch die Arbeit der Kräfte nicht elektromagnetischen Ursprungs.

B. Spezielles über Körper- und Flächenleiter.

25. Körperliche Leiter. a) *Ruhende Körper.* Der wichtigste Fall, bei dem die durch ein veränderliches magnetisches Feld erzeugten Wechselströme zur Messung verwandt werden, ist der der Induktionswage[100]). Im Innern einer wechselstromdurchflossenen Spule befindet sich ein Kern aus irgend einem Metall, in dem die Wirbelströme entstehen; gemessen wird die dadurch hervorgerufene scheinbare Änderung des Widerstandes und der Selbstinduktion (vgl. Nr. **27** u. f.) der umgebenden Spule. Will man aus diesen Messungen Rückschlüsse

---

98) Vgl. *Maxwell*sche Theorie, Art. *H. A. Lorentz* V 13, Nr. 23.

99) Für die Definition der Tensoroperationen def $\mathfrak{v}$ und (τ^* def $\mathfrak{v}$) vgl. man *R. Gans,* Einführung in die Vektoranalysis, Leipzig 1969, p. 80.

100) Dieselbe wurde zuerst angegeben von *D. E. Hughes*, Phil. Mag. (5) 8 (1879), p. 50; eine orientierende Rechnung über ihr Verhalten gaben *O. J. Lodge,* Phil. Mag. (5) 9 (1880), p. 123 und *Lord Rayleigh*, Rep. Brit. Assoc. 1880, indem sie den Kern durch eine Drahtwindung ersetzt dachten.

auf den absoluten Wert der Leitfähigkeit machen, so muß natürlich die Stromverteilung im Kern berechnet sein. Eine erste Näherung für nicht zu schnelle Wechsel erhält man, indem die vom magnetischen Wechselfeld induzierte elektrische Kraft als eingeprägte behandelt wird, während dem das Feld der so erzeugten Ströme als so klein angesehen wird, daß das zugehörige magnetische Feld nicht mehr der Grund für neue Induktionen sein kann.

Ist z. B. in einer (unendlich) langen Spule, die in ihrem Innern das in der z-Richtung gerichtete homogene magnetische Wechselfeld

$$\mathfrak{H}_z = H_0 e^{i\nu t} \tag{143}$$

erzeugt, ein langer zylindrischer Kern vom Radius a und mit der Leitfähigkeit σ angebracht, so werden in demselben Kreisströme $\mathfrak{J} e^{i\nu t}$ erzeugt, die sich nach (I') bestimmen aus

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr} r\mathfrak{J} = -\frac{i\nu\mu\sigma}{c} H_0$$

zu:

$$\mathfrak{J} = -\frac{i\nu\mu\sigma}{2c} H_0 r, \tag{144}$$

wenn r der Abstand von der Mittellinie des Kernes ist. Die Werte $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{J}$ aus (143) und (144) erfüllen indessen nicht die zweite Grundgleichung (II'); eine zweite Näherung erhält man, indem jetzt aus dieser Gleichung das zum Werte $\mathfrak{J}$ aus (144) zugehörige magnetische Feld berechnet wird, welches dann wieder in Gleichung (I') als Ursache eines Induktionsstroms höherer Ordnung auftreten kann. Durch fortgesetzte Näherung ist es möglich, den genannten Ausdruck für die Induktionsströme zu gewinnen. Kann und will man sich auf eine erste Näherung beschränken, so ist es in allgemeineren Fällen vorteilhaft, das induzierende Magnetfeld nach (17) aus einem Vektorpotential $\mathfrak{A}_0$ abzuleiten; man erhält dann aus (I')

$$\mathfrak{E} = -\frac{\dot{\mathfrak{A}}_0}{c} - \operatorname{grad}\varphi, \tag{145}$$

so daß man nach (II') das skalare Potential φ zu bestimmen hat aus

$$-\operatorname{div}\mathfrak{E} = \Delta\varphi + \frac{1}{c}\operatorname{div}\dot{\mathfrak{A}}_0 = 0, \tag{146}$$

wenn noch $\mathfrak{E}_e = 0$ gesetzt wird. Die Größe $\frac{\dot{\mathfrak{A}}_0}{c}$ spielt dieselbe Rolle, wie eine gewöhnliche eingeprägte elektrische Kraft (vgl. Gleichung (2')). Gleichung (146) ist dann weiter zu behandeln, wie im ersten Abschnitt angegeben.

Manchmal ist es indessen weitaus vorzuziehen, das Problem auf

Grund von (I′) und (II′) sofort ins strenge zu stellen[101]). Man kann dann im allgemeinen von den Gleichungen (134) oder (138) für $\mathfrak{P}$ ausgehen. In dem schon oben betrachteten besonderen Fall kann man ebenso gut aus (I′) und (II′) gleich für die Größe H, definiert durch den Ansatz:

$$\mathfrak{H}_z = He^{i\nu t}, \tag{147}$$

die Gleichung gewinnen:

$$\Delta H - \frac{i\mu\sigma\nu}{c^2} H = 0 \tag{148}$$

mit der Grenzbedingung

$$H = H_0 \quad \text{für} \quad r = a. \tag{148'}$$

Setzt man noch

$$k^2 = -\frac{i\mu\sigma\nu}{c^2}, \tag{149}$$

so wird demnach

$$H = H_0 \frac{J_0(kr)}{J_0(ka)}, \tag{150}$$

wo J_0 die gewöhnliche *Bessel*sche Funktion nullter Ordnung bedeutet. Der Strom $\mathfrak{J}$ folgt nach (II′) durch Differentiation von (150). Für kleine Werte von ka und damit auch von kr hat man statt (150)

101) Der Fall einer Kreisscheibe, der der ursprünglichen Hughesschen Anordnung entspricht, wird behandelt von *H. Lamb,* Proc. Roy. Soc. London 42 (1887), p. 289, sowie von *A. Oberbeck,* Ann. d. Phys. 31 (1887), p. 812; für die zur Anwendung kommende spezielle Methode vgl. Nr. **26** dieses Artikels. Der hier näher ins Auge gefaßte Fall eines zylindrischen Kernes wird behandelt von *A. Oberbeck,* Ann. d. Phys. 21 (1884), p. 672, und von *H. Lamb,* Proc. London math. soc. (1884), p. 139, sowie von *W. v. Ignatowski,* Journ. d. russ. phys. chem. Ges. 34 (1902), p. 49. Experimentelle Untersuchungen wurden mit der Induktionswage u. a. ausgeführt von *A. Oberbeck* u. *J. Bergmann,* Ann. d. Phys. 31 (1887), p. 792; *J. Bergmann*, Ann. d. Phys. 42 (1891), p. 90; *M. Wien,* Ann. d. Phys. 49 (1893), p. 306, der eine allgemeine Methode zur Messung der Leitfähigkeit im obigen Sinne ausarbeitet. Zur Bestimmung der Leitfähigkeit von Na. wurde die *Wien*sche Methode benutzt von *E. Lohr*, Wien Ber. 113 (1904), p. 911. Eine genauere Untersuchung des Einflusses der endlichen Länge der Kerne, sowie eine vollständige Theorie der Induktionswage für Kerne mit kreisförmigem, resp. rechteckigem Querschnitt gibt *J. W. Grover,* Diss. München 1908. Für die Technik ist der Fall eines Kernes aus Blech von Wichtigkeit, vgl. *J. J. Thomson*, Elektrician 28 (1892), p. 599 und *P. Debye*, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 54 (1906), p. 418, der u. a. experimentell untersucht wird von *A. Kühns,* Elektrot. Zeitschr. 27 (1906), p. 901. Der Fall einer Kugel in einem magnetischen Wechselfeld wird behandelt von *A. Oberbeck,* Ann. d. Phys. 31 (1887), p. 812; *H. Lamb,* Proc. London math. soc. (1884), p. 139; *C. Niven,* Philos. Trans. 172 (1882), p. 307 und von *C. S. Whitehead,* Phil. Mag. 48 (1899), p. 165. Einige Folgerungen der *Hertz*schen Theorie (vgl. Anm. 83) für eine Kugel im Drehfeld werden experimentell geprüft von *O. M. Corbino*, Phys. Zeitschr. 6 (1905), p. 227 und Nuovo Cim. (5) 9 (1905), p. 204.

in erster Näherung:

$$H = H_0\left(1 - i\frac{\mu\sigma\nu}{4c^2}(a^2 - r^2)\right). \tag{150'}$$

Das Zusatzglied entspricht dem magnetischen Felde des durch (144) dargestellten spezifischen Stromes. Für große Werte von ka und kr kann (150) ersetzt werden durch den Näherungswert

$$H = H_0\sqrt{\frac{a}{r}}\, e^{-\sqrt{\frac{\mu\sigma\nu}{2c^2}}(a-r)}\, e^{-i\sqrt{\frac{\mu\sigma\nu}{2c^2}}(a-r)}, \tag{150''}$$

der entsprechend dem nach dem Innern des Kernes hin sehr stark abfallenden Exponentialfaktor den „Skin"effekt zum Ausdruck bringt. Die Wirkung der Wirbelströme im Kern verkleinert im Innern der Spule das ursprüngliche Magnetfeld; neben einer scheinbaren Vergrößerung des Widerstandes erzeugt derselbe also im Anschluß an die energetische Definition (Nr. 29) des Selbstinduktionskoeffizienten noch eine Verringerung des Selbstinduktionskoeffizienten der umgebenden Spule.

b) *Bewegte Körper.* Sind die Geschwindigkeiten der Bewegung klein, so genügt in manchen Fällen eine Näherung, welche der in dieser Nummer zuerst behandelten ganz analog ist. Sei nämlich $\mathfrak{A}_0$ wieder das Vektorpotential des ursprünglich vorhandenen magnetischen Feldes, dann ergibt sich $\mathfrak{E}$ nach (I'') näherungsweise aus:

$$\mathfrak{E} = -\frac{\dot{\mathfrak{A}}_0}{c} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}, \operatorname{rot}\mathfrak{A}_0] - \operatorname{grad}\varphi, \tag{151}$$

wenn wir noch mit Rücksicht darauf, daß keine Ladungen im Raum vorhanden sind, φ bestimmen aus:

$$-\operatorname{div}\mathfrak{E} = \Delta\varphi + \frac{1}{c}\operatorname{div}(\dot{\mathfrak{A}}_0 - [\mathfrak{v}\operatorname{rot}\mathfrak{A}_0]) = 0. \tag{152}$$

Das Potential φ genügt also derselben Gleichung wie im stationären Fall, wenn wir die Größe:

$$\frac{\dot{\mathfrak{A}}_0}{c} - \left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\operatorname{rot}\mathfrak{A}_0\right]$$

als eingeprägte elektrische Kraft auffassen. Bei dieser Näherung ist, wie leicht ersichtlich, die Rückwirkung der „induzierten Ströme erster Ordnung" auf das Feld unberücksichtigt geblieben. Durch sukzessive Übereinanderlagerung der Wirkungen der Felder erster, zweiter usw. Ordnung kann man das Induktionsproblem wieder in Strenge lösen. Wenn ausführbar, so ist die direkte Integration indessen vorzuziehen; wie diese zu erfolgen hat, möge an dem folgenden einfachen Beispiel erläutert werden[102]).

---

102) Die zuerst von *Arago*, Ann. de chim. et phys. 27 (1824), p. 363 und 28

Ein um seine Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierender Zylinder von der Leitfähigkeit σ und der Permeabilität $\mu = 1$ (Radius $= a$) befindet sich in einem homogenen Magnetfeld der Stärke H_0, dessen Kraftlinien senkrecht zur Zylinderachse verlaufen. Fällt die Zylinderachse mit der z-Achse des Koordinatensystems und die Richtung der Feldstärke H_0 mit der x-Achse zusammen, so kann das ursprüngliche Feld nach (139) abgeleitet werden aus einem Vektor $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_z^0 = u_0$, dessen einzig vorhandene z-Komponente den Wert hat:

$$(152) \qquad u_0 = H_0 y = H_0 \varrho \sin \varphi = \Im [H_0 \varrho e^{i\varphi}],$$

wobei noch in der $x - y$-Ebene Polarkoordinaten ϱ, φ eingeführt wurden. Auch der Vektor $\mathfrak{P}$ des induzierten Zusatzfeldes hat nur z-Komponenten, die im Innern des Zylinders u_i und im Außenraum u_a heißen mögen. Dann gilt nach (138′) mir $\mathfrak{v}_\varrho = 0$, $\mathfrak{v}_\varphi = \varrho\omega$, $\mathfrak{v}_z = 0$:

$$(153) \qquad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\varrho\frac{\partial u_i}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial \varphi^2} - \frac{\sigma\omega}{c^2}\frac{\partial u_i}{\partial \varphi} = 0$$

und im Außenraum ($\mathfrak{v}_\varrho = \mathfrak{v}_\varphi = \mathfrak{v}_z = 0$):

$$(153') \qquad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\varrho\frac{\partial u_a}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u_a}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Rechnet man mit komplexen Größen, von denen man später den imaginären Teil nimmt, so folgt aus (153) und (153′)[103]:

(1825), p. 325 beschriebenen Einwirkungen rotierender Leiter auf beweglich aufgehängte Magnetnadeln, welche dann von *M. Faraday*, Exp. Res. Ser. 1, § 81 u. f. (1831) auf die vorhandenen induzierten Ströme zurückgeführt wurden, sind in der angegebenen Art zuerst näherungsweise berechnet von *Jochmann*, Crelles Journ. 63 (1863), p. 1; Ann. Phys. Chem. 122 (1864), p. 214. Die Wirkung einer leitenden Kugel auf die Schwingungen eines Magneten wird untersucht von *Riecke*, Gött. Abhdl. 21 (1876), p. 1. Die strenge Berechnung der in Kugeln durch bewegte Magnete erzeugten Ströme rührt her von *H. Hertz*, Diss. Berlin 1880 oder Ges. Werke Bd. I, p. 37. Die Induktionsströme erster Ordnung in Ellipsoide werden berechnet von *R. Gans*, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 48 (1902), p. 1; eine allgemeine Untersuchung über die bei diesen Problemen auftretenden harmonischen Funktionen wird angedeutet von *A. Tauber*, Ber. d. Deutsch. Math.-Ver. 7 (1899), p. 14. Der für die Technik wichtige Fall der Wirbelstrombremsen wird behandelt von *R. Rüdenberg*, Samml. elektrot. Vortr. Nr. 8, Bd. X, Stuttgart 1906. Zu diesen Erscheinungen gehören auch die der sogenannten Unipolar-Induktion Genaueres in *Maxwell*sche Theorie, Art. *H. A. Lorentz* V 13, Nr. 18. Kritisches über die oft aufgeworfene Frage nach dem Mitrotieren der Kraftlinien findet sich bei *H. Poincaré*, Eclair. électr. 23 (1900), p. 41. Eine historische Darstellung der ausgedehnten Literatur findet sich bei *S. Valentiner*, Die elektromagn. Rotationen und die Unipolarinduktion. Karlsruhe 1904.

103) $J_1(ka)$ bedeutet die *Bessel*sche Funktion erster Ordnung mit dem Argument ka.

$$(154)\quad \begin{cases} u_i = 2H_0 a \dfrac{1}{J_1(ka) + ka\,J_1'(ka)} J_1(k\varrho)\, e^{i\varphi}, \\ u_a = H_0 a \dfrac{J_1(ka) - ka\,J_1'(ka)}{J_1(ka) + ka\,J_1'(ka)} \dfrac{a}{\varrho} e^{i\varphi}, \end{cases} \qquad k^2 = \frac{\sigma\omega}{c^2} e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

wobei die ursprünglich verfügbaren konstanten Faktoren dadurch bestimmt werden, daß an der Oberfläche des Zylinders ($\varrho = a$) sowohl die Tangential- wie die Normalkomponenten von $\mathfrak{H}$ stetig übergehen, letzteres, weil μ für den ganzen Raum denselben Wert hat. Bei Benutzung der Differentiationsvorschrift (139) ist jetzt $\mathfrak{H}$ im ganzen Raum, $\mathfrak{E}$ indessen nur im Innern des Zylinders aus (154) zu bestimmen. Im Außenraum müssen wir (vgl. das Ende von Nr. **23**) zunächst ein Potential φ bestimmen, so beschaffen, daß die aus φ abgeleitete tangentiale elektrische Feldstärke gegen die innere entsprechende einen Sprung zeigt von der Größe

$$\frac{1}{c}[\mathfrak{H}\mathfrak{v}].$$

Dieses ist hier, wie man sich sofort überzeugt, der Fall, wenn die äußere tangentiale elektrische Feldstärke verschwindet. Demnach wird überall im Außenraum $\varphi = 0$, ein äußeres elektrisches Feld ist nicht vorhanden. Man versteht dieses Resultat wohl am besten, wenn man sich die Entstehung der Ströme überlegt, während dem der Zylinder in Rotation versetzt wird. Man sieht dann, daß keine normal zur Oberfläche gerichtete Strömung vorhanden ist, also auch keine Ladungen erzeugt werden können. Die Sachlage würde indessen sofort eine andere, wenn wir dem Zylinder eine endliche Länge erteilen würden. Die Formeln (154) vereinfachen sich im Grenzfall $ka \ll 1$ zu

$$(154')\quad \begin{cases} u_i = H_0 \varrho e^{i\varphi}\left(1 - i\dfrac{\sigma\omega}{8c^2}(\varrho^2 - 2a^2)\right) \\ u_a = -i\dfrac{\sigma\omega a^2}{8c^2} H_0 a \dfrac{a}{\varrho} e^{i\varphi}, \end{cases}$$

woraus z. B. nach (139) in erster Näherung:

$$\mathfrak{E}_z = -\frac{\omega}{c}\frac{\partial u_i}{\partial \varphi} = -\frac{i\omega}{c} H_0 \varrho e^{i\varphi}.$$

Für große Werte von ka und $k\varrho$ wird:

$$(154'')\quad \begin{cases} u_i = \dfrac{H_0 a}{\xi a}\sqrt{\dfrac{2a}{\varrho}}\, e^{-\xi(a-\varrho)}\, e^{i\left\{\varphi - \frac{\pi}{4} - \xi(a-\varrho)\right\}} \\ u_a = -H_0 a \dfrac{a}{\varrho} e^{i\varphi}\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{\xi a} e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) \end{cases} \qquad \xi = \sqrt{\frac{\sigma\omega}{2c^2}}$$

und demnach

$$\mathfrak{E}_z = -\frac{i\omega}{c}\frac{H_0 a}{\xi a}\sqrt{\frac{2a}{\varrho}}\, e^{-\xi(a-\varrho)}\, e^{i\left\{\varphi - \frac{\pi}{4} - \xi(a-\varrho)\right\}}.$$

Bei kleinen Geschwindigkeiten ist also der ganze Zylinder von Strömen erfüllt, die gegen das erzeugende magnetische Feld eine Phasenverschiebung von π haben. Bei großen Geschwindigkeiten bildet sich wieder ein „Skin"-Effekt aus, die Ströme sind auf eine Schicht in der Nähe der Oberfläche beschränkt und haben in der Grenze in unmittelbarer Nähe der Oberfläche eine Phasenverschiebung von $3\pi/4$ gegen das erzeugende Feld.

26. Flächenleiter. Für Flächenleiter, deren Dicke so klein ist, daß bei dem in Betracht kommenden Tempo der Änderungen des magnetischen Feldes der Strom noch als in der Dickenrichtung gleichförmig über den Querschnitt verteilt angenommen werden kann, wird es möglich, die Bestimmung der Induktionswirkungen in sehr einfacher Weise auszuführen[104]). Berechnet man $\mathfrak{H}$ aus einem Vektorpotential $\mathfrak{A}$, so gilt (vgl. Nr. 3) im Raume außerhalb der Stromschicht:

$$\Delta \mathfrak{A} = 0. \tag{18}$$

Beschränken wir uns nun auf eine ebene Schicht in der x, y-Ebene von der Dicke δ, so sind auf beiden Seiten $z = \pm \frac{\delta}{2}$ die magnetischen Feldstärken parallel zur Schicht, soweit sie vom Strome herrühren, einander gleich. Nennt man dieselben in unmittelbarer Nachbarschaft der Schicht H_x und H_y, so gibt Gleichung (II′) die Beziehung:

$$H_x = \frac{1}{2c} J_y, \quad H_y = -\frac{1}{2c} J_x, \tag{155}$$

wenn J der Strom in der Schicht bedeutet. In diese Grenzbedingungen wollen wir nun statt H und J die Komponenten A_x und A_y des Vektorpotentials $\mathfrak{A}$ für $z = \frac{\delta}{2}$ einführen. Es hat einerseits das vom Strome herrührende Vektorpotential $\mathfrak{A}$ keine z-Komponente, so daß man erhält

$$H_x = -\frac{\partial}{\partial z} A_y, \quad H_y = \frac{\partial}{\partial z} A_x. \tag{156}$$

Andererseits folgt allgemein aus (I′):

$$\mathfrak{J} = -\frac{\sigma}{c}(\dot{\mathfrak{A}} + \dot{\mathfrak{A}}_0) - \operatorname{grad} \varphi, \tag{157}$$

wenn noch $\dot{\mathfrak{A}}_0$ das Vektorpotential des äußeren erregenden magnetischen Feldes bedeutet. Sieht man von einer von eingeprägten Kräften gewöhnlicher Art herrührenden Strömung ab, so kann $\varphi = 0$ gesetzt

104) Die Methode rührt her von *J. C. Maxwell*, Treatise on electr. and magn. Oxford 1881, Bd. 2, p. 263, Art. 647f., sowie Proc. Roy. Soc. 20, p. 160.

werden, dann wird nach (157):

$$J = -\frac{\sigma\delta}{c}(\dot{A} + \dot{A}_0). \tag{158}$$

Die Kombination von (156) und (158) mit (155) liefert also die an der Schicht ($z = 0$) zu erfüllende Bedingung:

$$\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\sigma\delta}{2c^2}\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\sigma\delta}{2c^2}\frac{\partial A_0}{\partial t}. \tag{159}$$

Die Gleichung (18), die ja von vornherein im ganzen Raum erfüllt sein muß, zusammen mit der Randbedingung (159) definiert das Problem vollständig.

Sind z. B. in der Schicht Ströme erzeugt, deren Vektorpotential zur Zeit $t = 0$ gegeben ist durch

$$\mathfrak{A}_x = f_1(x, y, z), \quad \mathfrak{A}_y = f_2(x, y, z), \tag{160}$$

so ist, da (18) die Zeit nicht enthält, auch

$$\mathfrak{A}_x = f_1(x, y, z + ut), \quad \mathfrak{A}_y = f_2(x, y, z + ut) \tag{160'}$$

eine Lösung. Denken wir uns nun die Ursache der Induktion zur Zeit $t = 0$ plötzlich verschwunden, so werden die Gleichungen (160′) das Magnetfeld für alle folgenden Zeiten richtig darstellen, wenn wir noch, damit die Grenzbedingung (160) mit $A_0 = 0$ erfüllt ist, die Geschwindigkeit u bestimmen zu

$$u = \frac{2c^2}{\sigma\delta}. \tag{161}$$

Ist die Leitfähigkeit unendlich groß, so wird $u = 0$, so daß das Feld (160′) und damit die Ströme in der Platte für alle Zeiten erhalten bleiben. Denken wir uns andererseits auf der positiven Seite der Schicht zur Zeit $t = 0$ plötzlich ein System erzeugt, dem das Vektorpotential $\mathfrak{A}_0$ zukommt, so folgt aus (150) für den Oberflächenwert A des von den Strömen herrührenden Vektorpotentials $\mathfrak{A}$

$$A = -A_0 \quad \text{für} \quad t = 0.$$

Man kann nun den Wert $A = -A_0$ gemäß (18) in den oberen Raum ($z > 0$) fortsetzen, indem man für $t = 0$ das Vektorpotential $-\mathfrak{A}(x, y, z)$ berechnet als zugehörig zu einem dem erregenden System ganz gleichen, das in bezug auf die Ebene $z = 0$ spiegelbildlich zum erregenden Systeme liegt. Im unteren Raum $z < 0$ ist die Wirkung zur Zeit $t = 0$ Null; das Vektorpotential der Strömung entspricht also für $z < 0$ und $t = 0$ einem mit dem erregenden zusammenfallenden System, bei dem alle Ströme im Vergleich mit dem ursprünglichen die umgekehrte Richtung erhielten. Bleibt das erregende Feld weiterhin konstant, so wird der zeitliche Verlauf der Vorgänge

(für $t > 0$) ohne weiteres durch (160′) bestimmt, so daß z. B. für $z > 0$ das Vektorpotential der Ströme in der Schicht dem sich mit der Geschwindigkeit u nach $z = -\infty$ bewegenden Spiegelbild des ursprünglichen Systems entspricht.

Durch geeignete Übereinanderlagerung solcher den unendlich kleinen Änderungen des erregenden Systems entsprechenden bewegten Bilder erhält man ohne weiteres auch die Lösung für die Wirkung der von irgend einem beliebig veränderlichen System erzeugten Ströme in sehr anschaulicher Form.

Zur Lösung kann man ganz ähnlich wie oben auch von dem skalaren magnetischen Potential ausgehen. Unter Benutzung der in diesem Falle geltenden Formeln fand z. B. *Maxwell*[105]), daß die Kraftwirkung, welche von einer leitenden Ebene auf einen parallel mit derselben im Abstande $z = h$ gleichförmig mit der Geschwindigkeit v in der x-Richtung bewegten magnetischen Pol von der Stärke 1 ausgeübt wird, sich zusammensetzt aus einer verzögernden Kraft

$$X = -\frac{1}{4h^2}\frac{vu}{(u+\sqrt{u^2+v^2})\sqrt{u^2+v^2}}$$

und einer abstoßenden Kraft

$$Z = \frac{1}{4h^2}\frac{v^2}{(u+\sqrt{u^2+v^2})\sqrt{u^2+v^2}},$$

wobei die Geschwindigkeit u durch (161) definiert wird.

In analoger Weise gelang es von den von *Arago* entdeckten Kräften einer rotierenden Kreisscheibe auf einen Magnetpol Rechenschaft zu geben[106]).

C. Lineare Leiter.

27. Die gewöhnlichen Differentialgleichungen für Stromkreise ohne Kapazität. Definition der Induktionskoeffizienten. Für lineare

105) *J. C. Maxwell,* Treatise on electr. and magn. Oxford 1881, Bd. 2, p. 273, Art. 664 f.

106) *J. C. Maxwell,* Treatise on electr. and magn. Oxford 1881, Bd. 2, p. 275, Art. 668 f. Der Fall der Induktion in einer unendlich großen rotierenden Ebene wird behandelt von *A. B. Basset,* Phil. Mag. (5) 22 (1886), p. 140. Die Berechnung der Induktion in ellipsoidischen Flächen findet sich bei *H. Lamb,* Proc. Roy. Soc. London 42 (1887), p. 196. Eine ausgedehnte Behandlung der Induktion in ebenen, zylindrischen und sphärischen Flächen rührt her von *G. H. Bryan,* Phil. Mag. 38 (1894), p. 198 und 45 (1898), p. 381. Vgl. auch *J. Larmor,* Proc. Math Soc. London (2) 8 (1909), p. 1. Die Wirkung endlicher Stromschichten behandelt *J. H. Jeans,* Proc. Math. Soc. London 31 (1899) p. 151. Eine genaue Behandlung, ohne Vernachlässigung der Verschiebungsströme, der in einer Platte von einem parallelen wechselstromdurchflossenen Drahte induzierten Ströme gibt *T. Levi-Civita,* Rend. R. Acc. dei Lincei (5) 11 (1902), p. 163, 191 u. 228; Nuovo Cim. (5) 3 (1902), p. 442.

Leiter lassen sich die allgemeinen Beziehungen (I') und (II') ähnlich spezialisieren, wie das in Nr. **17** für die Ableitung der *Kirchhoff*schen Relationen geschah.

Nach (II') ist

$$\operatorname{div} \mathfrak{J} = 0, \tag{162}$$

so daß genau wie in Nr. **17** für jeden Knotenpunkt gilt:

$$\sum J_p = 0, \tag{162'}$$

wobei unter J_p der Gesamtstrom im p^{ten} Drahte verstanden wird. So lange wir (II') zugrunde legen und keine Verschiebungsströme berücksichtigen, ist also in einem Einzeldrahte die Stromstärke für alle Querschnitte dieselbe.

Gleichung (I') ergibt für jeden geschlossenen Umgang mit dem Längenelement ds

$$\int \mathfrak{E}_s ds = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \mathfrak{B}_n d\sigma = -\frac{\dot{Z}}{c}, \tag{163}$$

wenn $d\sigma$ resp. n Flächenelement resp. Normale der eingeschlossenen Fläche bedeuten und zur Abkürzung der durch diese Fläche pulsierende Kraftfluß

$$\int \mathfrak{B}_n d\sigma = Z \tag{164}$$

gesetzt wird. Mit Rücksicht auf die Definitionsgleichung (III) kann statt (163) auch geschrieben werden:

$$\int \frac{\mathfrak{J}_s}{\sigma} ds = \int \mathfrak{E}_{e s} ds - \frac{\dot{Z}}{c}. \tag{163'}$$

Nach (163') ist eine gleichmäßige Verteilung des Stromes über die Drahtquerschnitte außer bei ganz spezieller Verteilung der eingeprägten elektromotorischen Kräfte im allgemeinen ausgeschlossen. Für nicht zu schnell veränderliche Zustände wird es indessen in erster Näherung gestattet sein, mit einer gleichmäßigen Stromverteilung zu rechnen, bei der zugleich die Ströme $\mathfrak{J}$ der einzelnen Stromfäden noch keine Phasenverschiebung gegeneinander zeigen. Dazu ist vor allen Dingen nötig, daß es gestattet sei unter Z einen Mittelwert für die verschiedenen Stromfäden zu verstehen. Dann geht unter Berücksichtigung der Definitionen (91) und (92) für den Widerstand w und die elektromotorische Kraft E Gleichung (163') über in

$$\sum J_p w_p = \sum E_p - \frac{\dot{Z}}{c}. \tag{163''}$$

Ist $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$ und μ von $\mathfrak{H}$ unabhängig, so ist $\mathfrak{B}$ und damit auch Z eine lineare Funktion aller Ströme. Die Kombination von (163'')

und (162′) liefert also eine genügende Anzahl (Differential-) Gleichungen zur Bestimmung der Ströme in einem Netz[107]). Sind die Stromkreise $1 \ldots p \ldots n$ getrennt und setzt man nach dem eben Gesagten:

$$
(165) \qquad \begin{cases} \frac{Z_1}{c} = L_{11} J_1 + \cdots + L_{1p} J_p + \cdots + L_{1n} J_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{Z_p}{c} = L_{p1} J_1 + \cdots + L_{pp} J_p + \cdots + L_{pn} J_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{Z_n}{c} = L_{n1} J_1 + \cdots + L_{np} J_p + \cdots + L_{nn} J_n, \end{cases}
$$

so nennt man $L_{11}, \ldots, L_{pp}, \ldots, L_{nn}$ den *Selbstinduktionskoeffizient* des ersten usw. Stromkreises, während allgemein $L_{\mu\nu}$ der *gegenseitige Induktionskoeffizient* des μ^{ten} und ν^{ten} Stromkreises ist. Unter dem Kraftfluß Z ist hier natürlich der im obigen Sinne genommene Mittelwert verstanden.

Eine vollständige Bestimmung des magnetischen Feldes, wie oben vorgesehen, wird unnötig, wenn im ganzen Raume die Permeabilität μ konstant, z. B. gleich 1 ist. Bedeutet nämlich dq resp. q Querschnittselement resp. Querschnitt eines der Drähte, so ist in diesem Falle der Teil $\mathfrak{A}_\nu$ des Vektorpotentials $\mathfrak{A}$, der vom ν^{ten} Stromkreise herrührt, nach (25) gegeben durch:

$$
(166) \qquad 4\pi c \mathfrak{A}_\nu = J_\nu \int dq_\nu \int \frac{d\mathfrak{s}_\nu}{q_\nu r},
$$

oder bei konstantem Querschnitt

$$
(166') \qquad 4\pi c \mathfrak{A}_\nu = \frac{J_\nu}{q_\nu} \int dq_\nu \int \frac{d\mathfrak{s}_\nu}{r},
$$

wenn noch $d\mathfrak{s}_\nu$ das (gerichtete) Längenelement eines Stromfadens und r den Abstand des Integrationspunktes vom Aufpunkt bedeutet. Der aus (164) folgende Ausdruck für den Kraftfluß $Z_{\mu\nu}$, den der eben betrachtete ν^{te} Stromkreis durch den μ^{ten} hindurchschickt, ist, wie oben hervorgehoben, nicht unabhängig von der Wahl der Leitlinie dieses Stromes. Für eine erste Näherung wird es gestattet sein, mit dem oben schon gebrauchten Mittelwerte des betreffenden Kraftflusses, genommen über alle möglichen Stromlinien, zu rechnen, dann erhält

107) Um Z ohne Mühe in den später als Unbekannte auftretenden Strömen ausdrücken zu können, ist es vorteilhaft nicht die Gesamtströme als solche zu benutzen, sondern das Netz, mit Rücksicht auf (162), zunächst aufzulösen in geschlossene Kreisströme, welche auf ihrer ganzen Länge von nur *einem* Strome durchflossen werden. Vgl. *H. Helmholtz*, Ann. Phys. Chem. 83 (1851) p. 505 oder Wiss. Abh. Bd. I, p. 429, Leipzig 1882.

man, indem noch mit Rücksicht auf (17) das Oberflächenintegral in ein Linienintegral umgewandelt wird:

$$(167) \qquad 4\pi c Z_{\mu\nu} = \frac{1}{q_\mu}\int dq_\mu \int (\mathfrak{A}_\nu\, d\mathfrak{s}_\mu) = \frac{J_\nu}{q_\mu q_\nu}\int dq_\mu \int dq_\nu \int \frac{(d\mathfrak{s}_\mu\, d\mathfrak{s}_\nu)}{r}.$$

Hiernach ist also mit Rücksicht auf (156) der gegenseitige Induktionskoeffizient zu berechnen nach der Formel:

$$(168) \qquad 4\pi c^2 L_{\mu\nu} = \frac{1}{q_\mu q_\nu}\int dq_\mu \int dq_\nu \int\int \frac{(d\mathfrak{s}_\mu\, d\mathfrak{s}_\nu)}{r},$$

während sich für den Selbstinduktionskoeffizient ergibt[108]):

$$(169) \qquad 4\pi c^2 L_{\mu\mu} = \frac{1}{q_\mu^2}\int\int dq_\mu\, dq_\mu' \int\int \frac{(d\mathfrak{s}_\mu\, d\mathfrak{s}_\mu')}{r},$$

wobei die Integration zweimal über den betreffenden Draht zu erstrecken ist. Unter der Voraussetzung, daß die Drahtquerschnitte klein gegen die Entfernungen der Drähte sind, läßt sich (168) vereinfachen zu

$$(168') \qquad 4\pi c^2 L_{\mu\nu} = \int\int \frac{(d\mathfrak{s}_\mu\, d\mathfrak{s}_\nu)}{r}.$$

Nach (168) oder (168') folgt noch die Beziehung:

$$(170) \qquad L_{\mu\nu} = L_{\nu\mu}.$$

Die zuletzt erhaltene Beziehung (170) ist nicht auf den vorausgesetzten Fall konstanter räumlicher Permeabilität beschränkt, sie gilt allgemein, auch wenn ferromagnetische Körper sich im Felde befinden, so lange nur μ als von der Feldstärke unabhängig angesehen werden kann. Zerlegt man nämlich die Feldstärke $\mathfrak{H}$ sowie das Vektorpotential $\mathfrak{A}$, entsprechend dem Vorhandensein von n Strömen J_1 bis J_n, in n Teilfelder $\mathfrak{H}_1$ bis $\mathfrak{H}_n$ resp. n Teilpotentiale $\mathfrak{A}_1$ bis $\mathfrak{A}_n$, so ist der in (165) auftretende über den μ^{ten} Stromkreis gemittelte Kraftfluß Z_μ zusammengesetzt aus n Bestandteilen, so daß z. B.

$$Z_\mu = Z_{\mu 1} + \cdots + Z_{\mu\mu} \cdots + Z_{\mu n}.$$

Allgemein bedeutet dabei also $Z_{\mu\nu}$ den Kraftfluß, den der ν^{te} Stromkreis für sich allein genommen durch den μ^{ten} hindurchschickt, gemittelt für alle Stromfäden des letzteren. Nun ist also zunächst der Definition nach:

$$J_\mu Z_{\mu\nu} = \frac{J_\mu}{q_\mu}\int dq_\mu \int \mathfrak{B}_{n\nu}\, d\sigma_\mu = \int \mathfrak{J}_\mu\, dq_\mu \int \mathfrak{B}_{n\nu}\, d\sigma_\mu,$$

108) Die hier benutzte Definition des Selbst- und gegenseitigen Induktionskoeffizienten unterscheidet sich von der üblichen durch den Faktor $\frac{1}{4\pi c^2}$, so daß hier $4\pi c^2 L$ dem Zahlenwert nach mit der sonst gebräuchlichen Definition übereinstimmt.

wobei $\mathfrak{B}_{n\nu}$ die auf der vom Strome umrandeten Fläche mit dem Element $d\sigma_\mu$ senkrecht stehende Komponente des Teilfeldes $\mathfrak{B}_\nu$ bedeutet. Weiterhin ist nach (18):

$$\int \mathfrak{J}_\mu dq_\mu \int \mathfrak{B}_{n\nu} d\sigma_\mu = \int \mathfrak{J}_\mu dq_\mu \int \mathfrak{A}_{\nu s} ds = \int (\mathfrak{J}_\mu \mathfrak{A}_\nu) dS,$$

wobei letztere Integration über den ganzen unendlichen Raum erstreckt werden kann, oder auch mit Rücksicht auf (II'):

$$J_\mu Z_{\mu\nu} = c \int (\mathfrak{A}_\nu \operatorname{rot} \mathfrak{H}_\mu) dS.$$

Schließlich können wir dann unter Benutzung der Beziehung:

$$\operatorname{div} [\mathfrak{A}\mathfrak{H}] = \mathfrak{H} \operatorname{rot} \mathfrak{A} - \mathfrak{A} \operatorname{rot} \mathfrak{H},$$

und unter Berücksichtigung von (18) auch schreiben:

$$(171) \qquad \frac{J_\mu}{c} Z_{\mu\nu} = \int (\mathfrak{H}_\mu \operatorname{rot} \mathfrak{A}_\nu) dS = \int (\mathfrak{H}_\mu \mathfrak{B}_\nu) dS.$$

Ebenso folgt natürlich:

$$(171') \qquad \frac{J_\nu}{c} Z_{\nu\mu} = \int (\mathfrak{H}_\nu \mathfrak{B}_\mu) dS,$$

so daß, so lange die Permeabilität von der Feldstärke unabhängig ist:

$$(172) \qquad \frac{J_\mu}{c} Z_{\mu\nu} = \frac{J_\nu}{c} Z_{\nu\mu},$$

was mit Rücksicht auf die Definition (165) der Induktionskoeffizienten gleichbedeutend mit (170) ist.

Die alle unter sich gleichen Größen:

$$\frac{J_\mu}{c} Z_{\mu\nu} = \frac{J_\nu}{c} Z_{\nu\mu}$$

resp.

$$\int (\mathfrak{H}_\mu \mathfrak{B}_\nu) dS = \int (\mathfrak{H}_\nu \mathfrak{B}_\mu) dS$$

resp.

$$\mathfrak{L}_{\mu\nu} J_\mu J_\nu = \mathfrak{L}_{\nu\mu} J_\nu J_\mu$$

bedeuten die wechselseitige Energie der Stromkreise μ und ν (vgl. Nr. **29**). Diese Größe trat historisch zuerst auf als *F. Neumann*sches Potential, aus dem zugleich auch die Kraftwirkung zweier Ströme aufeinander ohne weiteres berechnet werden kann (vgl. Nr. **35**). Die obigen Überlegungen sind, wie schon hervorgehoben, nur so lange ausreichend als die Stromverteilung noch nicht merklich von der stationären abweicht. So lange diese Bedingung erfüllt ist, kann man demnach durch Bildung des oben definierten Begriffes des Induktionskoeffizienten die Integration der ursprünglichen *Maxwell*schen Gleichungen von vornherein ersetzen durch die viel einfachere Behandlung einer endlichen Zahl totaler Differentialgleichungen. Sobald in-

dessen die zeitliche Änderungsgeschwindigkeit so groß wird, daß bei periodischen Vorgängen z. B. die Wellenlänge im Innern der Leiter von der Größenordnung der Querschnittsdimensionen derselben wird, so ist eine Integration der Grundgleichungen nicht mehr zu umgehen. Hat man diese (vielleicht auch nur annähernd) ausgeführt und so die Stromverteilung über die Drahtquerschnitte bestimmt, dann kann man freilich wieder unter Benutzung dieses Resultats Widerstände und Induktionskoeffizienten definieren, mit deren Hilfe die Aufgabe dann nachträglich auf totale Differentialgleichungen zurückgeführt werden kann. Die Definition dieser Begriffe erfolgt dann wohl am besten energetisch in der in Nr. **29** angegebenen Art.

Sind die Stromkreise in Bewegung begriffen, so hat man nach (II″) auf der rechten Seite von (163) noch die Größe

$$-\frac{1}{c}\int \mathrm{rot}_n\,[\mathfrak{B}\mathfrak{v}]\,d\sigma$$

zu addieren. Nach einem bekannten Satze[109]) ist dann die ganze rechte Seite gleich der totalen Änderungsgeschwindigkeit $\frac{dZ}{dt}$ des Kraftflusses. Mit Rücksicht darauf, daß die Induktionskoeffizienten noch Parameter enthalten, welche die gegenseitige Lage der Stromkreise bestimmen und weil zugleich für die Berechnung des magnetischen Feldes nur die augenblickliche Lage der Ströme maßgebend ist, sind auch jetzt nach (165) die Erscheinungen mittels dieser Koeffizienten darstellbar.

28. Die Differentialgleichungen für Stromkreise mit Kapazität. Sind in einem Stromkreis größere Kondensatoren enthalten, so verliert die ausnahmslose Vernachlässigung der Verschiebungsströme ihre Berechtigung, dieselben müssen dann wenigstens im Innern der Kondensatoren als Fortsetzung des Leitungsstromes in Betracht gezogen werden. Setzt man für den spezifischen Verschiebungsstrom

$$\mathfrak{V} = \varepsilon\dot{\mathfrak{E}}, \tag{173}$$

so erhält man nach (I′) zunächst statt (162)

$$\mathrm{div}\,(\mathfrak{J} + \mathfrak{V}) = 0. \tag{174}$$

Gleichung (163) dagegen bleibt unverändert. Betrachtet man z. B. den Fall eines einzelnen Stromkreises mit eingeschalteter Kapazität, so besteht das Linienintegral in (163) aus einem Teil (1), der dem Leitungsstrom entlang geht, wo $\mathfrak{V} = 0$ angenommen werden kann, und einem Teil (2), der dem Verschiebungsstrom im Innern des Kon-

109) Vgl. *Maxwells* elektromagnetische Theorie, Art. *H. A. Lorentz* V 13, Nr. 4, Gleichung (14).

densators entlang geführt wird, wo $\mathfrak{J} = 0$ ist. Differenziert man nun (163) nach t, so kann für den Teil (1) des betreffenden Integrals geschrieben werden:

$$\int\limits_{(1)} \frac{\dot{\mathfrak{J}}}{\sigma} ds - \int\limits_{(1)} \dot{\mathfrak{E}}_e ds = w\dot{J} - \dot{E},$$

während sich für den zweiten Teil unter Berücksichtigung von (173) ergibt:

$$\int\limits_{(2)} \frac{\mathfrak{B}}{\varepsilon} ds = J \int\limits_{(2)} \frac{ds}{q\varepsilon} = J \frac{l}{q\varepsilon} = \frac{J}{K},$$

wobei q den für den Verschiebungsstrom im Innern des Kondensators verfügbaren Querschnitt und l den Abstand der Kondensatorplatten bedeutet. Die Größe K ist demnach die Kapazität des Kondensators.

Mit Rücksicht auf (174) und (165) lautet also jetzt die Differentialgleichung für den Strom in einem Kreis mit Selbstinduktion und Kapazität

$$L\ddot{J} + w\dot{J} + \frac{J}{K} = \dot{E}. \tag{175}$$

Sind mehrere Kreise oder ein Stromnetz vorhanden, so liefert wieder (163) und (174) in der oben angegebenen Art die genügende Anzahl Gleichungen zur Bestimmung der Ströme[110]. Streng genommen geht indessen von jeder Stelle der Drähte ein Verschiebungsstrom in das Diëlektrikum, so daß nach (174) der Strom J längs der Drähte nicht konstant sein kann. Man kann diesen Umstand näherungsweise in Rechnung ziehen, indem man jedem Element des Stromleiters eine spezifische Kapazität und Selbstinduktion zuschreibt. Der Strom ergibt sich dann als Funktion der Stelle im Draht und der Zeit durch die Lösung der mit der Wärmleitungsgleichung formal identischen Telegraphengleichung[111].

29. Die Energiegleichung. Vernachlässigt man die Verschiebungsströme, so ist nach (133) neben der von den eingeprägten elektrischen Kräften herrührenden Energie nur noch die Wärmeenergie Q und die magnetische Energie W_m zu berücksichtigen. Unter den spezielleren Voraussetzungen der Nr. 27 gilt für ein Stromnetz, wie ohne weiteres ersichtlich:

$$Q = \sum w_p J_p^2. \tag{176}$$

---

110) Dabei wird man dann noch auf den Begriff der gegenseitigen Kapazität geführt, welche indessen in den allermeisten Fällen unberücksichtigt bleiben kann. Vgl. hierzu *M. Wien,* Ann. Phys. Chem. 61 (1897), p. 151.

111) Vgl. Elektromagnetische Wellen, Art. *M. Abraham* V 18, Nr. 11.

Andererseits kann auch die magnetische Energie durch die Induktionskoeffizienten ausgedrückt werden.

Zunächst ist nämlich definitionsgemäß:

$$W_m = \frac{1}{2}\int \mathfrak{H}^2 dS, \tag{177}$$

wo die Integration über den ganzen Raum zu erstrecken ist. Ersetzt man nun $\mathfrak{H}$ durch rot $\mathfrak{A}$ und berücksichtigt, daß

$$\operatorname{div} [\mathfrak{A}\mathfrak{H}] = (\mathfrak{A} \operatorname{rot} \mathfrak{H}) - (\mathfrak{H} \operatorname{rot} \mathfrak{A}),$$

so wird mit Rücksicht auf (II') und der Bestimmungsgleichung (25) für $\mathfrak{A}$:

$$W_m = \frac{1}{8\pi c^2}\int\int \frac{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}{r} dS\, dS', \tag{177'}$$

wobei die Integration zweimal über den ganzen Raum zu erstrecken ist. Nach den Definitionsgleichungen (168) und (169) für die Induktionskoeffizienten erhält man also W_m als quadratische Funktion der n Ströme $J_1 \ldots J_p \ldots J_n$ in der Form:

$$\begin{aligned} 2W_m = {} & L_{11} J_1^2 + \cdots + L_{1p} J_p^2 + \cdots + L_{1n} J_n^2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + L_{p1} J_1^2 + \cdots + L_{pp} J_p^2 + \cdots + L_{pn} J_n^2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + L_{n1} J_1^2 + \cdots + L_{np} J_p^2 + \cdots + L_{nn} J_n^2, \end{aligned} \tag{178}$$

welche noch mit Rücksicht auf die Beziehung

$$L_{\mu\nu} = L_{\nu\mu}$$

etwas vereinfacht werden kann. Ebenso wie diese Beziehung bleibt auch die durch (178) dargestellte Berechnungsweise der magnetischen Energie auch dann noch gültig, wenn magnetisierbare Körper vorhanden sind, vorausgesetzt, daß μ von $\mathfrak{H}$ unabhängig ist.

Für einen einzelnen Stromkreis wird hiernach die Differentialgleichung (163'') mit der Energiegleichung identisch. Hält man an den Zusammenhängen (176) und (178) fest, so geben diese Formeln die Möglichkeit, Induktionskoeffizient und Widerstand auch für solche Zustände in einfacher Weise zu definieren, bei denen der Strom nicht mehr als gleichmäßig über den Drahtquerschnitt verteilt angesehen werden kann. Im allgemeinen würde dann w und L zeitlich variabel werden. Um dieses zu vermeiden, kann man bei periodischen Vorgängen zur Definition von w und L die über eine Periode gemittelten Energieausdrücke benutzen.

Sind in den Stromkreisen noch Kondensatoren vorhanden, so ist

in erster Näherung die Energiegleichung noch zu vervollständigen durch die hauptsächlich in Betracht kommende in denselben aufgespeicherte Energie, welche sich noch durch die Kapazitäten und Elektrizitätsmengen der Kondensatoren ausdrücken läßt[112]).

30. Induktionskoeffizienten für geradlinige Leiter. Der mittlere geometrische Abstand. Die Induktionskoeffizienten sind streng genommen nur definiert für geschlossene Stromkreise, die Formeln (168) und (169) legen es indessen nahe, den Induktionskoeffizienten zusammenzusetzen aus Bruchteilen, die einzelnen ungeschlossenen Stücken der Leitung entsprechen. In diesem Sinne wollen wir die folgenden Formeln für den Induktionskoeffizient eines endlichen geraden Drahtes auffassen. Die allgemeinen Formeln (168) und (169) lassen nämlich in diesem Falle nach *Maxwell*[113]) eine sehr einfache Interpretation zu. Das innere Doppelintegral in (168) entspricht dem $4\pi c^2$-fachen des gegenseitigen Induktionskoeffizienten m zweier paralleler Linien. Haben diese die Länge l und den gegenseitigen Abstand ξ, so wird

$$(179)\qquad 4\pi c^2 m = \int\int \frac{(d\mathfrak{s}_\mu\, d\mathfrak{s}_\nu)}{r} = l \log \frac{\sqrt{l^2+\xi^2}+l}{\sqrt{l^2+\xi^2}-l} - 2\sqrt{l^2+\xi^2} + 2\xi,$$

oder entwickelt nach Potenzen von ξ/l

$$(179')\qquad 4\pi c^2 m = 2l\left\{\log\frac{2l}{\xi} - 1 + \frac{\xi}{l} - \frac{1}{4}\frac{\xi^2}{l^2} + \cdots\right\}.$$

Sind nun die Querschnitte der Drähte klein gegen ihre Länge, so kann man für die Ausführung der noch erforderlichen Integration in (168) für das innere Integral nach (179′) Näherungswerte einsetzen. Benutzt man zwei Glieder dieser Reihe, so erhält man:

$$(180)\qquad 4\pi c^2 L_{\mu\nu} = 2l\left\{\log 2l - \frac{1}{q_\mu q_\nu}\int\int \log\xi\, dq_\mu\, dq_\nu - 1\right\}.$$

Setzt man schließlich

$$(181)\qquad \int\int \log\xi\, dq_\mu\, dq_\nu = q_\mu q_\nu \log R,$$

so ist R der *mittlere geometrische Abstand* der beiden Querschnitte voneinander. Mit dieser Abkürzung wird dann:

$$(182)\qquad 4\pi c^2 L_{\mu\nu} = 2l\left\{\log\frac{2l}{R} - 1\right\},$$

d. h. ebenso groß wie der gegenseitige Induktionskoeffizient zweier *Linien* im Abstande R voneinander. Nach (181) ist klar, daß R

112) Vgl. Elektrostatik und Magnetostatik, Art. *R. Gans* V 15, Nr. 7.

113) *J. C. Maxwell,* Treatise on electr. and magn. Oxford 1881, 2 p. 298, Art. 691, sowie Scientific Papers, Cambridge 1890, p. 280.

zwischen dem kleinsten und dem größten Abstand zweier Punkte der Querschnitte liegt. Für einen einzelnen Draht hat man die Integration (181) zweimal über den betreffenden Querschnitt zu erstrecken und erhält dann in R den mittleren geometrischen Abstand des Querschnitts von sich selbst. Gleichung (182) ergibt dann mit diesem Wert von R den Selbstinduktionskoeffizienten. Hat man R für kompliziertere Figuren zu bestimmen, so kann man mit Vorteil den folgenden sofort aus (181) folgenden Satz benutzen.

Sind R_A, R_B, ... die mittleren geometrischen Abstände verschiedener Teile mit den Flächeninhalten A, B, ... einer Figur von einer anderen Figur N, so ist der mittlere geometrische Abstand R der ganzen aus A, B, ... zusammengesetzten Figur von N gegeben durch:

$$(183) \qquad (A + B + \cdots) \log R = A \log R_A + B \log R_B + \cdots.$$

Sind die Leiter im Gegensatz zu den obigen Voraussetzungen kurz gegen ihren Abstand $l << \xi$, so kann man, indem (179) jetzt nach Potenzen von l/ξ entwickelt wird, für $L_{\mu\nu}$ in erster Näherung den Wert erhalten:

$$(182') \qquad 4\pi c^2 L_{\mu\nu} = l \frac{l}{\xi} \cdot$$

31. Werte für R in speziellen Fällen[114]. Nach (181) ist der mittlere geometrische Abstand R_0 eines Punktes von einem Querschnitt q_1 gegeben durch

$$q_1 \log R_0 = \int \log \xi \, dq_1,$$

sein Logarithmus ist also gleich dem logarithmischen Potential des gleichförmig mit Elektrizität von der Dichte 2π bedeckt gedachten Querschnitts dividiert durch dessen Flächeninhalt. Die Größe $q_1 \log R_0$ genügt also der Potentialgleichung, so daß es in manchen Fällen ohne direkte Ausführung der Integration in (181) möglich ist, R_0 in einfacher Weise zu finden. So ist z. B. das Potential φ einer Kreisscheibe vom Radius a in einem Punkt im Abstande $r > a$ vom Mittelpunkt

$$\varphi = \pi a^2 \log r$$

114) Die mittleren geometrischen Abstände von Kreisen und Linien voneinander finden sich bei *J. C. Maxwell,* Scientific Papers, Cambridge 1890, p. 280. Für eine Rechtecksfläche wird R berechnet von *B. Rosa,* Bull. of the Bur. of Stand. 3 (1907), p. 1, eine bequeme Näherungsformel gibt *Sumec,* Elektrot. Zeitschr. 27 (1906), p. 1175. Für Kombinationen mehrerer Kreisflächen (in Kabeln) wird R berechnet von *Ch. E. Guye,* Arch. des Sciences phys. et natur. 32 (1894), p. 480 u. p. 574, C. R. 118 (1894), p. 1329. Eine Zusammenstellung vieler Resultate findet sich bei *E. B. Rosa* und *L. Cohen,* Bull. of the Bur. of Stand. 5 (1909) p. 1.

und damit

$$(184)\qquad \log R_0 = \log r \quad \text{oder} \quad R_0 = r.$$

Ist $r < a$, so wird

$$\varphi = \frac{\pi}{2}(r^2 - a^2) + \pi a^2 \log a,$$

so daß

$$(184')\qquad \log R_0 = \frac{r^2 - a^2}{2a^2} + \log a \quad \text{oder} \quad R_0 = a e^{-\frac{a^2 - r^2}{2a^2}}.$$

Ebenso ergibt sich für einen kreisringförmigen Querschnitt mit den Radien a und b $(b > a)$:

$$(185)\qquad \begin{cases} \log R_0 = \log r & \text{für} \quad r > b, \\ \log R_0 = \dfrac{b^2 \log b - a^2 \log r}{b^2 - a^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{b^2 - r^2}{b^2 - a^2} & \text{für} \quad a < r < b, \\ \log R_0 = \dfrac{b^2 \log b - a^2 \log a}{b^2 - a^2} - \dfrac{1}{2} & \text{für} \quad r < a. \end{cases}$$

Aus den angegebenen Formeln folgt sofort für den mittleren geometrischen Abstand R zweier sich nicht überdeckender Kreisringe

$$(186)\qquad R = d,$$

wo d der Abstand ihrer Mittelpunkte ist.

Der Logarithmus des mittleren geometrischen Abstandes eines Kreisringes von sich selbst mit den Radien b und a folgt aus (185) durch einfache Integration zu:

$$(187)\qquad \log R = \log b - \frac{a^4}{(b^2 - a^2)^2} \log \frac{b}{a} + \frac{1}{4}\frac{3a^2 - b^2}{b^2 - a^2}.$$

Als Spezialfall dieser Formel ergibt sich für eine Kreisfläche vom Radius $b\,(a = 0)$:

$$(187')\qquad R = b e^{-1/4}$$

und für eine Kreislinie $(b = a)$:

$$(187'')\qquad R = b.$$

Der mittlere geometrische Abstand eines Kreisringes von mehreren anderen folgt sofort unter Benutzung des Satzes (183) am Ende der Nr. **30**.

32. Werte für die Induktionskoeffizienten in speziellen Fällen.

a) *Gerade Leiter.* Nach den Ausführungen der Nr. **30** ist der Selbstinduktionskoeffizient L eines langen geraden Drahtes (Länge $= l$) gleich dem gegenseitigen Induktionskoeffizienten zweier Linien von der Länge l in einem dem mittleren geometrischen Abstande des Querschnitts von sich selbst gleichen Abstand[115]). Für einen kreis-

115) Über die Bedeutung des Ausdrucks „Induktionskoeffizient eines endlichen geraden Drahtes" vgl. Nr. **30**.

förmigen Querschnitt erhält man also nach (182) und (187')

$$(188) \qquad 4\pi c^2 L = 2l\left(\log\frac{2l}{a} - \frac{3}{4}\right),$$

während der gegenseitige Induktionskoeffizient zweier gerader Leiter 1 und 2 mit kreisförmigem Querschnitt sich ergibt zu

$$(188') \qquad 4\pi c^2 L_{12} = 2l\left(\log\frac{2l}{d} - 1\right),$$

wenn d der Abstand der Kreismittelpunkte ist.

Setzt man R aus (187) in (182) ein, so folgt L für einen geraden Leiter mit kreisringförmigem Querschnitt.

Für zwei parallele Drähte (Länge $= l$, Radius $= a$ resp. b), die im selben Sinne vom Strome durchflossen werden, ergibt sich der mittlere geometrische Abstand R dieses Querschnittsystems von sich selbst durch zweimalige Anwendung der Regel (183) zu:

$$(189) \quad (F_1 + F_2)^2 \log R = F_1^2 \log R_1 + 2F_1F_2 \log R_{12} + F_2^2 \log R_2.$$

Hierin sind F_1 resp. F_2 die Flächeninhalte des ersten resp. zweiten Querschnittes, während R_1 resp. R_2 den mittleren geometrischen Abstand des ersten resp. zweiten Querschnittes von sich selbst und R_{12} den mittleren geometrischen Abstand der beiden Querschnitte voneinander bedeutet. In dem speziellen Falle zweier Kreisquerschnitte wird:

$$(a^2 + b^2)^2 \log R = (a^4 \log a + 2a^2b^2 \log d + b^4 \log b) - \tfrac{1}{4}(a^4 + b^4)$$

und damit nach (182):

$$(190) \quad 4\pi c^2 L = 2l\left\{\log 2l - \frac{a^4\log a + 2a^2b^2\log d + b^4 \log b}{(a^2+b^2)^2} - \frac{3a^4 + 8a^2b^2 - 3b^4}{(a^2+b^2)^2}\right\},$$

wenn noch d der Abstand der beiden Drahtachsen bedeutet, der übrigens ebenso wie a und b klein gegen l sein muß.

Werden die beiden Drähte in entgegengesetzter Richtung von demselben Strom durchflossen, so daß sie die Hin- und Rückleitung für denselben Strom bilden, so hat man darauf Rücksicht zu nehmen, daß in der Definitionsgleichung (169) die beiden Längenelemente $d\mathfrak{s}$ und $d\mathfrak{s}'$ in entgegengesetzten Richtungen positiv zu rechnen sind. Dann erhält man aus (169) zunächst für den Fall beliebiger, aber gleicher Querschnitte in derselben Näherung wie in Nr. **30**:

$$(191) \qquad 4\pi c^2 L = 2l \log\frac{R_{12}^2}{R_1 R_2}.$$

Man kann sich überzeugen, daß (191) auch dann noch gilt, wenn die beiden Querschnitte ungleichen Flächeninhalt und dementsprechend ungleiche spezifische Ströme aufweisen. In unserem speziellen Falle

erhält man[116]) aus (191) mit Rücksicht auf (186) und (187')

$$(192) \qquad 4\pi c^2 L = 2l\left(\log\frac{d^2}{ab} + \frac{1}{2}\right).$$

Der Selbstinduktionskoeffizient wird also nicht mehr wie in (176) und (178) mit wachsender Drahtlänge unendlich groß (vgl. dazu noch Nr. **20**).

Um z. B. den Selbstinduktionskoeffizienten L eines Rechtecks aus Draht von kreisförmigem Querschnitt zu berechnen, dessen Seitenlängen l resp. d und dessen zugehörige Drahtradien a resp. b sind, kann man die Formeln (188) und (188') folgendermaßen verwenden. Deutet man die vier aufeinander folgenden Seiten, mit einer von der Länge l anfangend, mit 1, 2, 3, 4 an und bedeuten $L_{11}, L_{22}, \ldots$ Selbstinduktionskoeffizienten der Seiten $1, 2, \ldots,$ während $L_{12}, L_{13}, \ldots$ in analoger Weise die gegenseitigen Induktionskoeffizienten sind, so erhellt aus der Definitionsformel (169) unmittelbar, daß:

$$L = (L_{11} + L_{12} + L_{13} + L_{14}) + (L_{22} + L_{23} + L_{24} + L_{21}) + (L_{33} + L_{34} + L_{31} + L_{32}) + (L_{44} + L_{41} + L_{42} + L_{43}).$$

Mit Rücksicht darauf, daß einerseits

$$L_{12} = L_{14} = L_{23} = L_{21} = L_{34} = L_{32} = L_{41} = L_{43} = 0$$

und andererseits der Wert für den gegenseitigen Induktionskoeffizienten bei den Größen L_{13}, L_{24}, L_{31} und L_{42} mit dem negativen Zeichen zu versehen ist, da in den entsprechenden Leitern die Ströme entgegengesetzt fließen, erhält man schließlich:

$$(193) \qquad 4\pi c^2 L = 4l\left(\log\frac{d}{a} + \frac{1}{4}\right) + 4d\left(\log\frac{2d}{b} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\frac{d}{l}\right).$$

Die Selbstinduktionskoeffizienten wurden dabei berechnet nach (188), die Größe L_{13} nach (188') und die Größe L_{24} nach (182'). Formel (193) gilt also nur für langgestreckte Rechtecke, bei denen $d << l$ ist[117]).

Die andere nach Nr. **29** für L mögliche Berechnungsweise aus

116) Die entsprechende Formel für magnetisierbare Drähte wird angegeben von *H. M. Macdonald,* Proc. Cambr. Phil. Soc. 7 (1891), p. 259 u. 15 (1892), p. 303.

117) Der Selbstinduktionskoeffizient eines zu einem Quadrate gebogenen Drahtes vom Kreisquerschnitt wurde berechnet von *G. Kirchhoff,* Ann. d. Phys. 121 (1864), p. 551, Ges. Abh. Leipzig 1882, p. 176. Für ein Rechteck wird dieselbe Größe berechnet von *M. Wien,* Ann. d. Phys. 53 (1894), p. 939 und von *M. E. Mascart,* C. R. 118 (1894), p. 277. Eine Zusammenstellung der hierher gehörigen Ergebnisse, sowie Formeln für den Selbstinduktionskoeffizienten bei quadratischem Drahtquerschnitt wird gegeben von *E. B. Rosa* u. *L. Cohen,* Bull. of the Bur. of Stand. 5 (1909), p. 50 ff.

der magnetischen Energie versagt im Falle eines oder mehrerer paralleler Drähte, welche in gleicher Richtung vom Strome durchflossen werden. Es liegt dieses daran, daß der Strom von vornherein als unendlich lang gegen alle auch noch so großen Entfernungen vorausgesetzt wird, wodurch dann die magnetische Feldstärke wie $\frac{1}{\varrho}$ (ϱ = Abstand vom Drahte) abnimmt und somit die magnetische Energie pro Längeneinheit wie $\log \varrho$ unendlich wird. Die Schwierigkeit verschwindet sofort, sobald der Gesamtstrom durch eine Ebene senkrecht zu den Drähten Null ist, wie z. B. im obigen Falle zweier paralleler Drähte mit entgegengesetzt gleichem Strom. Die Berechnung der magnetischen Energie, welche am einfachsten auf Grund von (177′) durch Integration über den durchflossenen Raum erfolgt, liefert für L den oben schon in (192) angegebenen Wert. Diese Art der Rechnung legt es dann nahe, ebenso wie die Energie in einen Teil im Innern und einen Teil für das Äußere der Stromleiter auseinanderfällt, auch den Induktionskoeffizienten L in einen inneren L_i und einen äußeren L_a zu zerlegen. Bei schnellem Wechselstrom[118]) hat dann hauptsächlich L_i seinen Wert gegen den für langsamen Wechselstrom geändert, während die Änderung in L_a nur sehr unbedeutend oder auch genau Null ist. Da im Innern der Drähte meistens nur ein geringer Teil der ganzen magnetischen Energie aufgespeichert ist, so ist die prozentuale Änderung von L bei Erhöhung der Wechselzahl gewöhnlich sehr klein. Im Falle des in (188) z. B. zugrunde gelegten geraden Drahtes wird für sehr schnelle Schwingungen angenähert:

$$(188'') \qquad 4\pi c^2 L = 2l\left(\log\frac{2l}{a} - 1\right),$$

da dann der Strom nur in einer dünnen Schicht an der Drahtoberfläche fließt. Für sehr schnelle Schwingungen ist also L prozentual nur um $1/4 \log\frac{2l}{a}$ gegen seinen Wert für langsamen Wechselstrom geändert.

b) *Kreisförmige Leiter.* Haben die zu betrachtenden kreisförmigen Leiter Durchmesser, welche groß sind im Vergleich mit ihren Quer-

---

118) Die Stromverteilung usw. im Innern eines geraden, wechselstromdurchflossenen Drahtes mit Kreisquerschnitt wird berechnet von *W. Thomson*, Electrician, Febr. 1889 und Lum. électr. 31 (1889), p 288; man vgl. auch *E. Brylinski*, Ecl. électr. 12 (1897), p. 97. Eine numerische Diskussion der Formeln wird ausgeführt von *E. Merrit*, Phys. Rev. 5 (1897), p. 47; der Fall gedämpfter Schwingungen wird behandelt von *E. H. Barton*, Proc. Phys. Soc. London 16 (1899), p. 409.

schnittsdimensionen resp. ihrem gegenseitigen Abstand, wie das in den allermeisten Fällen zutrifft, so ist eine ähnliche Vereinfachung möglich wie in Nr. **30**. Bei der Berechnung der Induktionskoeffizienten wird zunächst wieder das innere Integral in (168) für zwei koaxiale Kreise näherungsweise ausgeführt, mit Rücksicht darauf, daß der Abstand der beiden Ringe klein gegen ihren Durchmesser ist. Der betreffende Ausdruck, der also gleich dem $4\pi c^2$-fachen des gegenseitigen Induktionskoeffizienten m zweier Kreislinien ist, ergibt:

$$(194)\quad 4\pi c^2 m = 4\pi A \log\frac{8A}{\xi}\cdot\left\{1+\frac{x}{2A}+\frac{x^2+3y^2}{16A^2}-\frac{x^3+3xy^2}{32A^3}+\cdots\right\} - \left\{2+\frac{x}{2A}-\frac{3x^2-y^2}{16A^2}+\frac{x^3-6xy^2}{48A^3}+\cdots\right\},$$

wobei A der Radius des ersten und $A+x$ der Radius des zweiten Kreises ist, während der Abstand der Kreisebenen y und der kürzeste Abstand der Kreisebenen ξ ist, so daß $\xi^2 = x^2 + y^2$.

Die weiteren Glieder kann man erhalten durch Entwicklung der elliptischen Integrale in dem in Strenge für m gültigen Ausdruck[119]):

$$(195)\quad 4\pi c^2 m = 4\pi\sqrt{A(A+x)}\left\{\left(\frac{2}{k}-k\right)F(k)-\frac{2}{k}E(k)\right\},$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(195')\quad k = \frac{2\sqrt{A(A+x)}}{\sqrt{(2A+x)^2+y^2}}.$$

Die Näherungsformel:

$$(194')\quad 4\pi c^2 m = 4\pi A\left(\log\frac{8A}{\xi}-2\right),$$

welche der in Nr. **30** wirklich benutzten Näherung entspricht, ergibt sich auch direkt, indem man m nach (165) durch den Kraftfluß definiert, den der größere Kreis durch den kleineren hindurchschickt.

Benutzt man diese Näherung, so erhält man nach (168) und (181) für den gegenseitigen Induktionskoeffizient $L_{\mu\nu}$ zweier benachbarten parallelen Kreisströme μ und ν:

$$(196)\quad 4\pi c^2 L_{\mu\nu} = 4\pi A\left(\log\frac{8A}{R}-2\right),$$

119) *J. C. Maxwell,* Treatise on electr. and magn. 2, Oxford 1881, p. 306, Art. 696 ff., die höheren Glieder im Ausdruck (194) wurden berechnet von *J. G. Coffin,* Bull. Bur. of Stand. 2 (1906), p. 113, vgl. auch *J. G. Coffin* u. *E. B. Rosa,* Bull. Bur. of Stand. 2 (1906), p. 359. Eine Darstellung von (195) mittels ϑ-Reihen gibt *H. Nagaoka,* Phil. Mag. 6 (1903), p. 19; eine Zusammenstellung der Resultate bei *E. B. Rosa* u. *L. Cohen,* Bull. Bur. of Stand. 5 (1909), p. 1 ff. Der gegenseitige Induktionskoeffizient zweier Windungen auf einem Eisenring wird berechnet von *L. Boltzmann,* Wien Anz. 15 (1878), p. 203, Wiss. Abh., Leipzig 1909, p. 324.

wobei R wieder den mittleren geometrischen Abstand der Querschnitte voneinander bedeutet. Für den Selbstinduktionskoeffizienten eines Kreisringes vom Radius A mit kreisförmigem Querschnitt vom Radius a erhält man so z. B. nach (187'):

$$(197) \qquad 4\pi c^2 L = 4\pi A \left(\log \frac{8A}{a} - \frac{7}{4}\right)$$

und für den gegenseitigen Induktionskoeffizienten zweier Kreisdrähte 1 und 2 vom gleichen Querschnittsradius a im Abstande $\xi = d$:

$$(198) \qquad 4\pi c^2 L_{12} = 4\pi A \left(\log \frac{8A}{d} - 2\right).$$

Will man genauer rechnen, so muß man für die folgenden Glieder in (194) die Integration über die Querschnitte wirklich ausführen. Die Methode, welche z. B. den Selbstinduktionskoeffizienten eines Kreisdrahtes dadurch genauer auswertet, daß die beiden Kreislinien, auf die es in (194) ankommt, in einer Ebene angenommen werden ($y = 0$) und dann für x der mittlere geometrische Abstand des Querschnittes von sich selbst auch in die höheren Glieder eingesetzt wird, ist streng genommen inkonsequent und unrichtig. Indessen kann man zeigen, daß der so erhaltene Wert näher an die Wahrheit herankommt, wie der ohne Berücksichtigung der höheren Glieder erhaltene[120]).

Für Spulen wird die genaue Rechnung recht umständlich. Für eine unendlich lange Spule mit dem Radius A und ν Windungen pro Längeneinheit erhält man für den Selbstinduktionskoeffizienten pro Längeneinheit das einfache Resultat:

$$(199) \qquad 4\pi c^2 L = 4\pi^2 A^2 \nu^2,$$

wenn der vom Isolationsmaterial eingenommene Raum als verschwindend angenommen wird. Kann man den vom Strome durchflossenen Raum als unendlich dünn und als gleichmäßig vom Strom erfüllt betrachten, so kann man für den Selbstinduktionskoeffizienten durch Integration von (195) einen strengen Ausdruck ableiten von der Form:

$$(200) \qquad 4\pi c^2 L = \frac{8\pi}{3} A n^2 \left[\frac{F(\sin\gamma) + (\operatorname{tg}^2\gamma - 1) E(\sin\gamma)}{\sin\gamma} - \operatorname{tg}^2\gamma\right].$$

---

120) Vgl. *M. Wien*, Ann. d. Phys. 53 (1894), p. 928. Die einfache Formel (197) wurde zuerst angegeben von *G. Kirchhoff*, Ann. Phys. Chem. 121 (1864), p. 551, Ges. Abh. Leipzig 1882, p. 176. Von *G. M. Minchin*, Electrician 32 (1893), p. 169 und Phil. Mag (5) 37 (1894), p. 300, *W. M. Hicks*, Phil. Mag. (5) 38 (1894), p. 456 und *Bláthy*, London Electrician 24 (1890), p. 630 wurden ebenfalls Formeln für den Selbstinduktionskoeffizienten angegeben, die sich indessen als fehlerhaft herausgestellt haben. Hat der Draht elliptischen Querschnitt, so gilt eine von *J. J. Thomson* im Phil. Mag. 23 (1886), p. 384 angegebene Formel. Eine Zusammenstellung der Resultate findet sich bei *E. B. Rosa* u. *L. Cohen*, Bull. Bur. of Stand. 5 (1909), p. 1.

Hierbei bedeutet n die Gesamtzahl der Windungen, während γ der durch

$$(200') \qquad \operatorname{tg} \gamma = \frac{A}{l} \quad (2l = \text{Länge der Spule})$$

definierte, für die Spule charakteristische Winkel ist[121]). Eine kleine Spule vom Radius $a < A$ und der Länge l hat bei n Windungen gegen die oben betrachtete unendlich lange Spule in erster Näherung einen gegenseitigen Induktionskoeffizienten

$$(201) \qquad 4\pi c^2 L_{12} = 4\pi^2 a^2 n \nu,$$

wenn sie koaxial mit derselben liegt[122]).

Für kurze weite Spulen mit einer Windungslage (von n Windungen) kann man wohl am einfachsten den Selbstinduktionskoeffizienten finden durch geeignete Summation der Selbstinduktionskoeffizienten und der gegenseitigen Induktionskoeffizienten der einzelnen Windungen, wie diese in erster Näherung durch (197) und (198) dargestellt werden. Man erhält dann[123])

$$(202) \quad 4\pi c^2 L = 4\pi A \left[n(n-1)\left(\log \frac{8A}{d} - 2\right) + n\left(\log \frac{8A}{a} - \frac{7}{4}\right) - C \right],$$

---

121) Die obige exakte Formel (200) wurde zuerst angegeben von *L. Lorenz,* Ann. d. Phys. 7 (1879) p 16, Oeuvres Scientifiques, Kopenhagen 1899, Tome 2, p. 196. Eine Reihenformel für den betreffenden Selbstinduktionskoeffizienten wird abgeleitet von *Lord Rayleigh* u. *M. Niven*, Proc. Roy. Soc. 32 (1881) p. 104 oder auch *Lord Rayleigh,* Scientific Papers, Cambridge 1900, 2, p. 15; die für nicht zu große Werte von l/a gut konvergierende Formel wird durch weitere Glieder der Entwicklung vervollständigt von *J. G. Coffin,* Bull. Bur. of Stand. 2 (1906), p. 113.

122) Der gegenseitige Induktionskoeffizient zwischen einem Kreis und einem koaxialen Solenoïd, über das dieselben Voraussetzungen wie oben gemacht werden, wird berechnet von *L. Lorenz*, Ann. d. Phys. 25 (1885), p. 1, Oeuvres Scient. Kopenhagen 1899, 2, p. 1. Derselbe kann durch elliptische Integrale ausgedrückt werden. Dieses ist auch dann noch der Fall, wenn der Strom in der äußeren Spule in Schraubenwindungen fließt, vgl. *J. V. Jones,* Proc. Roy. Soc. 63 (1898), p. 198; Reihenentwicklungen wurden für den betreffenden Ausdruck von demselben Autor schon Phil Mag. 27 (1889), p. 61 abgeleitet. Eine andere Art der Entwicklung hat *E. B. Rosa*, Bull. Bur. of Stand. 3 (1907), p. 1 ff. Für zwei Spulen mit dünnen Stromschichten wird der gegenseitige Induktionskoeffizient berechnet von *Gray,* Absolute Measurements 2, part I, p. 274, vgl. auch *Himstedt*, Ann. d. Phys. 26 (1885), p. 551, *L. Cohen,* Bull. Bur. of Stand. 3 (1907), p. 301, sowie *G. F. C. Searle* und *J. R. Airey,* Electrician 56 (1905), p. 318 und *A. Russell*, Phil. Mag. (6) 13 (1907), p. 420. Eine Zusammenstellung der Resultate findet sich bei *E. B. Rosa* u. *L. Cohen*, Bull. Bur. of Stand. 5 (1909), p. 1 ff.

123) Vgl. *B. Strasser,* Ann. d. Phys. 17 (1905), p. 763 und 24 (1907), p. 960, die Größen C sind dort tabelliert; ein anderer Ausdruck wird abgeleitet von *E. B. Rosa*, Bull. Bur. of Stand. 2 (1906), p. 161.

wobei die Konstante C sich ergibt aus

(202′) $$C = 2 \log \{1!\,2!\,3! \ldots (n-1)!\}$$

und A der mittlere Radius der Spule, a der Drahtradius und d der Abstand zweier Mittelpunkte benachbarter Drahtquerschnitte ist. In zweiter Näherung kommt ein Glied hinzu von der Ordnung

$$n^4 \frac{d^2}{A^2} \log \frac{A}{d}.$$

Für kurze weite Spulen mit mehreren Windungslagen wurde der Selbstinduktionskoeffizient berechnet von *Stefan*[124]). Das ursprünglich von *Maxwell*[125]) herrührende Verfahren bestand in einer Berechnung von L für einen gleichmäßig mit Strom erfüllt gedachten Querschnitt[126]) unter Hinzunahme einer nachherigen Korrektion für die endliche Ausdehnung des Isolationsmaterials und der Abweichung des vorausgesetzten rechteckigen Drahtquerschnitts vom wirklich vorhandenen Kreisquerschnitt. Für den Spezialfall eines quadratischen Wicklungsquerschnittes vereinfacht sich die *Stefan*sche Formel ohne Korrektion zu:

(203) $$4\pi c^2 L = 4\pi A n^2 \left[\log \frac{8}{\sqrt{2}} \frac{A}{b} - 0{,}84834 + \frac{1}{24} \frac{b^2}{A^2} \left(\log \frac{8}{\sqrt{2}} \frac{A}{b} + 1{,}2242\right)\right],$$

wenn A der mittlere Spulenradius, b eine Seite des Wicklungsquerschnitts und n die Anzahl Windungen bedeutet. Die Korrektion ΔL wegen des kreisförmigen Drahtquerschnittes, welche zu dem in (203) angegebenen Wert zu addieren ist, beträgt:

(203′) $$4\pi c^2 \Delta L = 4\pi A n \left(\log \frac{d}{a} + 0{,}15494\right),$$

wenn der Querschnittsradius gleich a und der Abstand der Mittelpunkte zweier benachbarter Drahtquerschnitte gleich d gesetzt wird[127]).

---

124) *J. Stephan*, Ann. d. Phys. 22 (1884), p. 107; vgl. auch *B. Weinstein*, ebenda 21 (1884), p. 329.

125) *J. C. Maxwell*, Treatise on electr. and magn. 2, Oxford 1881, p. 301, Art. 693.

126) Außer von *J. Stephan* und *B. Weinstein* loc. cit. wird der Selbstinduktionskoeffizient eines Ringes von rechteckigem Querschnitt noch berechnet von *N. Garbasso*, Nuovo Cim. (5) 2 (1901), p. 97. Vgl. auch noch *J. C. Maxwell*, Treatise on electr. and magn., Oxford 1881, Appendix III, p. 321. Für eine Spule mit mehreren gleichmäßig vom Strom durchflossenen Schichten wird dieselbe Größe ausgewertet von *L. Cohen*, Bull. Bur. of Stand. 4 (1907), p. 398.

127) Der Koeffizient 0,15494 der Formel (203′) wurde von *J. C. Maxwell* zuerst zu 0,11835 angegeben (Treatise on electr. and magn., Oxford 1881, p. 302, Art. 693), *J. Stephan* gab statt dessen in Ann. d. Phys. 22 (1884), p. 116 den obigen Wert an. Eine Neuberechnung von *E. B. Rosa*, Bull. Bur. of Stand. 3 (1907), p. 1 zeigt, daß die betreffende Zahl, welche teilweise den Einfluß, der die

Formel (203) ist besonders deshalb von Interesse, weil die von *M. Wien* eingeführten Selbstinduktionsnormalien, welche durch geeignete Wahl der Dimensionen möglichst große Selbstinduktion mit möglichst geringem Widerstand verbinden, den Voraussetzungen derselben entsprechen[128]).

Die in dieser Nummer angegebenen Werte für die Induktionskoeffizienten beruhen wesentlich auf der Annahme einer gleichmäßigen Stromverteilung in den Drähten. Für schneller veränderliche Felder ist diese Annahme nicht mehr richtig, wodurch dann z. B. bei Spulen eine Verkleinerung des Selbstinduktionskoeffizienten und zu gleicher Zeit eine Vergrößerung des Widerstandes bedingt ist. Es ist indessen erstere Wirkung prozentual sehr viel geringer wie die zweite, weil die hauptsächliche Änderung des magnetischen Feldes im Innern der Drähte stattfindet, welche für sich nur einen kleinen Beitrag zur ganzen magnetischen Energie und damit zum Selbstinduktionskoeffizienten liefern, wie auch schon unter a) dieser Nr. bemerkt wurde[129]).

33. Spezielle Fälle von Stromkreisen mit zeitlich veränderlicher elektromotorischer Kraft. Der Widerstandsoperator[130]). Wird

---

einzelne Windung umgebenden Drähte mißt, eben deshalb von der Lage der gerade betrachteten Windung in der Spule abhängt. Sie schwankt indessen nur zwischen 0,15497 (statt 0,15494 bei *Stephan*) und 0,15612, je nachdem nur die nächsten acht oder unendlich viele Windungen die gerade betrachtete beeinflussen.

128) Außer den obigen theoretischen Formeln existiert für den Selbstinduktionskoeffizienten noch eine empirische Formel von *J. Perry*, Phil. Mag. 30 (1890), p. 223. Der gegenseitige Induktionskoeffizient zweier Spulen kann aus den Tabellen bei *J. C. Maxwell,* Treatise on elektr. and magn., Oxford 1881, 2, p. 317, App. I entnommen werden nach einer Bemerkung von *Lord Rayleigh,* ebenda, p. 321, App. II. Außerdem finden sich Formeln für die betreffende Größe bei *B. Weinstein,* Ann. d. Phys. 21 (1884), p. 350 und *J. Stephan,* Ann. d. Phys. 22 (1884), p. 107, vgl. hierzu auch *E B. Rosa,* Bull. Bur. of Stand. 4 (1908), p. 342 u. p. 348. Andere Entwicklungen werden angegeben von *Lyle,* Phil. Mag. 3 (1902), p. 310; eine kritische Zusammenstellung der Resultate bei *E. B. Rosa* u. *L. Cohen,* Rull. Bur. of Stand. 5 (1909), p. 1 ff.

129) Die Abhängigkeit des Widerstandes und der Selbstinduktion von der Frequenz wird berechnet von *M. Wien,* Ann. d. Phys. 14 (1904), p. 1, sowie von *A. Sommerfeld,* Ann. d. Phys. 15 (1904), p. 673 und 24 (1907), p. 609. Auf die Selbstinduktion wird die erste *Sommerfeld*sche Methode übertragen von *J. G. Coffin,* Bull. Bur. of Stand. 2 (1906), p. 275, Phys. Rev. 125 (1906), p. 193. Vgl. auch *G. Picciati,* Nuovo Cimento (5) 11 (1906), p. 351 und *L. Cohen,* Bull. Bur. of Stand. 4 (1907—8) Nr. 76. Durch Unterteilung des Drahtes in mehrere von kleinerem Querschnitt wird die Widerstandserhöhung vermieden nach *F. Dolezalek,* Ann. d. Phys. 12 (1903), p. 1142.

130) Sehr viele hierher gehörige Fälle werden ausführlich behandelt in der Monographie von *F. Bedell* und *A. Crehore,* Alternating Currents, Ithaca, N. Y. 1904. Die Stromverteilung in Leiternetze wird näher ins Auge gefaßt von *M. Brillouin,* Journ. de Phys. 10 (1881), p. 24, Ann. de l'école norm. 10 (1881), p. 9.

in einen Stromkreis mit Selbstinduktion L plötzlich eine elektromotorische Kraft E zur Zeit $t = 0$ eingeführt, bis zu welcher der Strom $J = 0$ war, so erhält man nach der aus (163″) und (165) folgenden allgemein gültigen Differentialgleichung:

$$L\dot{J} + wJ = E \tag{204}$$

für den Strom:

$$J = \frac{E}{w}\left(1 - e^{-\frac{w}{L}t}\right), \tag{205}$$

d. h. ein allmähliches Ansteigen.

Ein zweiter wichtiger Spezialfall ist die Entladung eines Kondensators (Kapazität $= K$) durch einen Stromkreis mit Selbstinduktion und Widerstand, der auf Grund von (175) mit $E = 0$ behandelt werden kann. Für die physikalische Meßtechnik ist der Fall einer zeitlich periodischen elektromotorischen Kraft wichtig. Setzen wir in komplexer Schreibweise:

$$E = E_0 e^{i\nu t}, \tag{206}$$

so daß die Schwingungszahl in 2π Sekunden ν ist, so erhalten wir aus (163) für J den Wert:

$$J = \frac{E_0}{\omega} e^{i\nu t} = \frac{E}{\omega} \tag{207}$$

mit

$$\omega = w + i\nu L + \frac{1}{i\nu K} \tag{208}$$

oder anders geschrieben:

$$J = \frac{E_0}{\sqrt{w^2 + \left(\nu L - \frac{1}{\nu K}\right)^2}} e^{i\left(\nu t - \operatorname{arctg}\frac{\nu L - \frac{1}{\nu K}}{w}\right)}. \tag{207'}$$

Der Nenner von E_0, der in (207′) an Stelle des Gleichstromwiderstandes w tritt, ist stets größer als w, außer in dem Falle vollkommener Resonanz ($\nu = \nu_0$), für den das Zusatzglied zu w^2 verschwindet, und also [131])

$$\nu^2 = \nu_0^2 = \frac{K}{L}. \tag{209}$$

In diesem besonderen Falle sind nach (207′) Strom und Spannung in Phase. Für die an Stelle des Widerstandes in Kreisen ohne Kapazität auftretende Größe $\sqrt{w^2 + \nu^2 L^2}$ ist der Name *Impedanz* üblich geworden, für die beim Vorhandensein einer Kapazität zu benützende

131) Für die Diskussion der entsprechenden Eigenschwingungen vgl. man Elektromagnetische Wellen, Art. *M. Abraham*, V 18, Nr. 3.

Größe $\sqrt{w^2 + \left(vL - \frac{1}{vK}\right)^2}$ wurde der Name *Impediment* vorgeschlagen. Die Größe $\left(vL - \frac{1}{vK}\right)$ wurde mit dem Namen *Reaktanz* belegt, vL allein heißt auch oft *Induktiver Widerstand* im Gegensatz zum *Ohmschen Widerstand* w.

Der Ausdruck (207) für J zeigt, daß man die Erscheinungen für Wechselstrom genau so wie bei Gleichstrom rechnen kann, wenn nur an Stelle des Gleichstromwiderstandes w der *Widerstandsoperator* ω, wie er durch (208) definiert ist, eingeführt wird. Zugleich legt diese Darstellung eine graphische Behandlung des Zusammenhangs zwischen E und J nahe, E erscheint dabei als ebener Vektor in einer komplexen Ebene, während J entsteht durch Division mit der komplexen Größe ω, eine Operation, die bekanntlich dadurch graphisch ausgeführt werden kann, daß der Vektor E im Verhältnis $\frac{1}{|\omega|}$ verkürzt und um den Winkel $\frac{1}{i}\log\frac{\omega}{|\omega|} = \operatorname{arctg}\frac{vL - \frac{1}{vK}}{w}$ zurückgedreht wird. Fehlt die Kapazität im Stromkreis, so hat man in (208) $K = \infty$ zu setzen und hat dann also:

$$\omega = w + ivL. \tag{208'}$$

Als Beispiel für diese Rechenmethode sei der Fall erwähnt zweier parallel geschalteter Stromführungen mit den Widerständen w_1, w_2 und den Selbstinduktionen L_1, L_2, welche so weit voneinander entfernt sind, daß ihre gegenseitige Induktion vernachlässigt werden kann. Dieser Kombination entspricht der Widerstandsoperator $\omega = w + ivL$, numerisch oder auch graphisch zu berechnen aus

$$\frac{1}{w+ivL} = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} = \frac{1}{w_1+ivL_1} + \frac{1}{w_2+ivL_2}. \tag{210}$$

Die nicht empfehlenswerte Trennung in Reelles und Imaginäres ergibt:

$$w = \frac{(w_1+w_2)(w_1w_2 - v^2L_1L_2) + v^2(L_1+L_2)(w_1L_2+w_2L_1)}{(w_1+w_2)^2 + v^2(L_1+L_2)^2}, \tag{210'}$$

$$L = \frac{v(w_1+w_2)(w_1L_2+w_2L_1) - v(L_1+L_2)(w_1w_2 - v^2L_1L_2)}{(w_1+w_2)^2 + v^2(L_1+L_2)^2}. \tag{210''}$$

34. Wheatstonesche Brücke für Wechselstrom. Die Gleichgewichtsbedingung für die mit Wechselstrom beschickte *Wheatstone*sche Brücke ohne Kapazität lautet unter Einführung der Widerstandsoperatoren

$$\omega_1 = w_1 + ivl_1, \quad \omega_2 = w_2 + ivl_2, \quad \ldots,$$
$$\Omega_1 = W_1 + ivL_1, \quad \Omega_2 = W_2 + ivL_2, \ldots$$

an Stelle der Gleichstromwiderstände $r_1, r_2, \ldots, R_1, R_2, \ldots$ der Nr. **19**

(vgl. auch die dortige Fig. 3):

$$(211) \qquad \omega_2 \Omega_2 = \omega_3 \Omega_3 .$$

Da ω und Ω komplex sind, zerfällt (211) in zwei voneinander unabhängige Bedingungen, welche im allgemeinen Falle, in dem alle Zweige Selbstinduktion enthalten, lauten:

$$(211') \qquad \begin{cases} w_2 W_2 - \nu^2 l^2 L^2 = w_3 W_3 - \nu^2 l_3 L_3, \\ w_2 L_2 + l_2 W_2 \ = w_3 L_3 + W_3 l_3 . \end{cases}$$

Sind die Zweige AS und BS induktionsfrei ($l_2 = 0,\ l_3 = 0$), so kommt statt (211'):

$$(212) \qquad \begin{cases} w_2 W_2 = w_3 W_3, \\ w_2 L_2 \ = w_3 L_3, \end{cases}$$

so daß man eine solche Anordnung der *Wheatstone*schen Brücke nach *Maxwell* unmittelbar zum Vergleich von Selbstinduktionen benutzen kann[132]). Als Stromzeiger benutzt man in der Wechselstrombrücke das gewöhnliche Telephon oder nach *M. Wien* ein optisches Telephon oder ein Vibrationsgalvanometer. Solange in dem zuletzt betrachteten Falle erstens die Leitung ASB als induktionsfrei angesehen werden kann und zweitens die zu vergleichenden Widerstände und Selbstinduktionen sich noch nicht merklich mit der Schwingungszahl ändern oder merkliche Kapazität besitzen, kann die Einstellung der Brücke mit dem gewöhnlichen Telephon vorgenommen werden. Die Obertöne der Stromquelle kommen dann eben nicht in Betracht, da nach (212) die Gleichgewichtsbedingungen die Schwingungszahl ν nicht enthalten. Ist eine der obigen Bedingungen nicht erfüllt, so benutzt man am besten ein optisches Telephon oder Vibrationsgalvanometer als Nullinstrument, welche beide hauptsächlich nur auf eine bestimmte Schwingungszahl ansprechen. Die erstgenannte Fehlerquelle, welche nach (211') die erste Gleichung von (198) in

$$w_2 W_2 - w_3 W_3 = \nu^2 (l_2 L_2 - l_3 L_3)$$

überführt und demnach sich mit steigender Frequenz immer mehr bemerkbar macht, wird von *Giebe*[133]) zur Grundlage einer Methode zur Bestimmung kleiner Selbstinduktionen mit großem Widerstand gemacht.

Ebenso wie zum Vergleich von Selbstinduktionen kann die Brücke zum Vergleich von Kapazitäten benutzt werden. Man legt

---

132) Die Empfindlichkeit der Wechselstrombrücke wird untersucht von *Lord Rayleigh*, Proc. Roy. Soc. London 49 (1891), p. 203.

133) *E. Giebe*, Ann. d. Phys. 24 (1907), p. 941.

dazu in die Zweige AS und AC die beiden zu vergleichenden Kapazitäten k_2 und K_3 und wählt die Zweige SB und CB induktionsfrei mit den Widerständen w_2 und W_3. Mit Rücksicht auf (211) und (208) wird dann die Gleichgewichtsbedingung:

$$(213) \qquad \frac{W_2}{w_3} = \frac{k_2}{K_3}.$$

Außer für Vergleichsmessungen, die sich übrigens auch noch auf gegenseitige Induktionskoeffizienten unter sich oder kombiniert mit Selbstinduktionskoeffizienten oder auf Kapazitäten kombiniert mit Selbstinduktionen usw. beziehen können, dient die Brücke zur absoluten Bestimmung von Selbstinduktionen und Kapazitäten. Für die verschiedenen Methoden sei auf das Lehrbuch von *E. Orlich*[134]) verwiesen.

III. Ponderomotorische Wirkungen.

35. Berechnung der Kräfte zwischen Strömen. Die ponderomotorische Kraft, die auf einen Leiter ausgeübt wird, ergibt sich am einfachsten durch die Berechnung der Variation der Energie, die bei konstant gehaltenen Strömen durch die virtuelle Bewegung des betreffenden Stromkreises bedingt wird. Sind z. B. zwei Stromkreise 1 und 2 vorhanden, so ist nach (178) die im Raume aufgespeicherte magnetische Energie:

$$(214) \qquad W_m = \tfrac{1}{2} L_{11} J_1^2 + L_{12} J_1 J_2 + \tfrac{1}{2} L_{22} J_2^2.$$

Ist die Lage und Form vom Stromkreis 2 bestimmt durch die Parameter $p_1, p_2, \ldots$ und bedingt die Lagenänderung z. B. nur die Änderung des Parameters p_1 in $p_1 + \delta p_1$, so ist

$$(215) \qquad \delta W_m = \frac{\partial W_m}{\partial p_1} \delta p_1 = J_1 J_2 \delta L_{12} = J_1 J_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial p_1} \delta p_1$$

und somit die (verallgemeinerte) „Kraft in der Richtung p_1“:

$$(216) \qquad \mathfrak{K}_1 = - J_1 J_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial p_1}.$$

Allgemein sind also die Kräfte ableitbar als negativer Gradient eines elektrodynamischen Potentials (*F. Neumann* 1847), das z. B. im obigen Falle zweier Stromkreise nichts anderes ist wie die wechselseitige Energie

$$J_1 J_2 L_{12}.$$

Ist die Form der Einzelstromkreise veränderlich, so müssen bei

134) *E. Orlich,* Kapazität und Induktivität, Braunschweig 1909, p. 226 ff.

der Differentiation natürlich auch die Glieder

$$\frac{L_1 J_1^2}{2}, \text{ resp. } \frac{L_2 J_2^2}{2}$$

berücksichtigt werden.

Außer der in vielen Fällen sehr bequemen obigen Berechnung der Kräfte aus den Induktionskoeffizienten kann man auch mit Rücksicht auf (Nr. 24) die Kraftwirkung zwischen den Strömen zurückführen auf die an jedem Stromelement angreifende Elementarkraft

$$(217) \qquad \mathfrak{f} = \frac{1}{c}[\mathfrak{J}\mathfrak{B}].$$

Eine dritte Berechnungsart knüpft an die *Maxwell*schen Spannungen an. Die Gesamtkraft erhält man dann durch eine Oberflächenintegration, im Gegensatz zur vorher genannten Berechnungsart, die eine Volumintegration nötig macht.

Von praktischem Interesse sind die Kräfte auf weiches Eisen (Permeabilität von der Feldstärke unabhängig), welche sich unter Benutzung der Darstellung durch die *Maxwell*schen Spannungen besonders leicht überblicken lassen. Bedenkt man, daß die vom Magnetfeld herrührenden Spannungen $\mathfrak{T}_m$, für ein Flächenelement mit der gerichteten Normalen $\mathfrak{n}$ berechnet, den Wert haben[135])

$$\mathfrak{T}_m = \mathfrak{H}\mathfrak{B}_n - \frac{\mathfrak{n}}{2}(\mathfrak{H}\mathfrak{B}),$$

so erhält man für die Differenz der Spannungen an den beiden Seiten einer Begrenzungsfläche Luft—Eisen den Wert:

$$(218) \quad \mathfrak{T}_{m1} - \mathfrak{T}_{m2} = (\mathfrak{H}_1\mathfrak{B}_{n1} - \mathfrak{H}_2\mathfrak{B}_{n2}) - \frac{\mathfrak{n}}{2}\{(\mathfrak{H}_1\mathfrak{B}_1) - (\mathfrak{H}_2\mathfrak{B}_2)\}.$$

Diese Differenz, welche die wirklich beobachtbare Spannung $\mathfrak{T}$ darstellt, ist, wie man leicht sieht, senkrecht zur Eisenoberfläche gerichtet und hat den Wert:

$$(218') \qquad |\mathfrak{T}| = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}\right)\mathfrak{B}_n^2 + \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1)\mathfrak{H}_h^2.$$

Die Größen $\mathfrak{B}_n$, resp. $\mathfrak{H}_h$ bedeuten senkrecht, resp. parallel zur Begrenzungsfläche gerichtete Feldstärken und gehen beide stetig durch diese hindurch.

Für die Wirkung auf Magnete ist der Definition nach die magnetische Feldstärke maßgebend.

Außer den magnetischen Kräften treten auch noch elektrische Kräfte zwischen Stromleitern auf, welche ihre Angriffspunkte in den auf den Leiteroberflächen angesammelten Ladungen finden. Dieselben

135) Vgl. *Maxwellsche Theorie,* Art. *H. A. Lorentz,* V 13, Nr. 23 ff.

sind indessen meistens gegen die magnetischen Wirkungen zu vernachlässigen.

36. Galvanometer. Die Instrumente zur Messung oder Konstatierung von Strömen beruhen zum allergrößten Teil auf der mechanischen Wirkung zwischen Stromkreisen und Magneten oder auch zwischen Stromkreisen unter sich.

Erstere Wirkung wird benutzt in der Tangentenboussole, einem Stromkreis, welcher in den magnetischen Meridian gestellt wird und in dessen Mittelpunkt eine kurze Magnetnadel durch die Einwirkung des Stromes meßbare Ablenkungen aus ihrer Gleichgewichtslage erfährt. Ist der Ausschlagswinkel α, so ist nach (121′) das Moment des Stromes in erster Näherung proportional $\cos\alpha$ $\left(\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta\right)$, während das vom Erdfeld herrührende zurücktreibende Moment $\sin\alpha$ proportional ist. Man erhält also:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2aH}\frac{J}{c} = C\frac{J}{c}, \tag{219}$$

wenn noch H die Horizontalintensität des erdmagnetischen Feldes, a der Radius des Stromkreises und J der zu messende Strom bedeutet. Nach (121′) oder (131′) kann man die Abweichung von der Homogenität des Feldes in der Nähe des Kreismittelpunktes noch in Rechnung ziehen; diese Korrektion wird übrigens dann besonders wichtig, wenn der Stromleiter aus einer Spule mit mehreren Windungen besteht. Wird der Stromkreis der Nadel nachgedreht, bis beide in einer Ebene liegen, so entsteht die Sinusboussole, bei welcher der Strom dem Sinus des Ablenkungswinkels proportional ist. Handelt es sich nicht um die absolute Strommessung, so kann man die Windungen der Nadel sehr viel näher rücken und damit eine viel größere Empfindlichkeit erreichen[136]). Es wird dann für kleine Ausschläge α:

$$\alpha = CJ, \tag{220}$$

wo der Reduktionsfaktor C jetzt durch den Versuch zu bestimmen ist. Eine noch größere Empfindlichkeit erreicht man durch Benutzung eines nahezu astatischen Nadelsystems oder indem man von außen her durch einen Richtmagneten die Wirkung des Erdfeldes zum größten Teile kompensiert. Damit die Nadel nicht zu viele Schwin-

136) Der vorteilhafteste Querschnitt der Wicklung wird berechnet von *J. C. Maxwell,* Treatise on electr. and magn. 2, Oxford 1881, p. 331. Die Konstruktionsgrundsätze und die Theorie der Spiegelgalvanometer werden behandelt von *Th. des Coudres*, Zeitschr. f. Elektrochemie 3 (1897), p. 417, 441, 465, 489 und 513. Über die Anordnungen von *Helmholtz, Gaugain* usw. zur Erzeugung eines möglichst homogenen Feldes vgl. man J. C. Maxwell, Treatise on electr. a. magn. Oxford 1881, 2, p. 322, Art. 707 ff.

gungen ausführt, ehe sie wieder in ihrer Gleichgewichtslage in Ruhe ist, wird dieselbe von Metallmassen (Kupfer) möglichst nahe umgeben, in welchen dann die entstehenden Wirbelströme für eine wirksame Dämpfung sorgen. Diese sehr empfindlichen Instrumente werden stark durch kleine von zufälligen Ursachen (Trambahnen) herrührende Schwankungen des erdmagnetischen Feldes beeinflußt. Einen wirksamen Schutz gegen die äußeren Einflüsse liefert eine mehrfache Panzerung mit Stahlmänteln hoher Permeabilität[137]). Von äußeren magnetischen Störungen fast ganz unabhängig sind auch die nach dem *Deprez-d'Arsonval*-Prinzip gebauten Galvanometer[138]), bei denen eine vom Strom durchflossene Spule in einem starken Magnetfeld hängt und durch ihren Ausschlag den Strom anzeigt. Dieser Typus ist im Gebrauche bequemer wie die Panzergalvanometer, welche sich indessen durch geringeren inneren Widerstand auszeichnen. Ebenfalls von Störungen unabhängig ist das *Einthoven*-Galvanometer, welches zur Strommessung den Ausschlag eines sehr dünnen vom Strom durchflossenen Drahtes benutzt, der in einem starken Magnetfeld senkrecht zu den Kraftlinien ausgespannt ist[139]). Auf der Wirkung von Strömen auf Ströme beruht das Elektrodynamometer, bei welchem eine bewegliche und eine feste Drahtrolle mit ihren Mittelpunkten zusammenfallend und mit ihren Achsen senkrecht zueinander angeordnet sind. Dieselben werden hintereinander vom Strome durchflossen, so daß der Ausschlag der beweglichen Rolle dem Quadrate des Stromes proportional wird. Letzterem Umstand verdankt das Instrument auch seine Anwendbarkeit für Wechselstrom.

37. **Das ballistische Galvanometer**[140]). Außer zur Messung von konstanten Strömen können diejenigen Galvanometer, welche eine genügend lange Schwingungsdauer besitzen, auch zur Messung kurzdauernder Ströme verwendet werden. Solange kein Strom durch das Instrument fließt, kann der Ausschlag α als Funktion der Zeit t bestimmt werden aus der Differentialgleichung[141]):

---

137) Vgl. *H. du Bois* und *H. Rubens*, Ann. d. Phys. 2 (1900), p. 84.

138) *Deprez* und *d'Arsonval*, Paris C. R. 102 (1886), p. 504. Vgl. zur Theorie u. a. *W. P. White*, Phys. Rev. 19 (1904), p. 305 und 23 (1906), p. 382.

139) *W. Einthoven*, Arch. Neerl. (2) 6 (1901), p. 625; eine eingehende theoretische Behandlung rührt her von *P. Hertz*, Zeitschr. Math. Phys. 58 (1910), p. 1.

140) Vgl. *H. Diesselhorst*, Ann. d. Phys. 9 (1902), p. 458 und 712, sowie *H. A. Wilson*, Proc. Phys. Soc. 20 (1906), p. 264, Phil. Mag. (6) 12 (1906). p. 269, Electrician 55 (1906), p. 860, und *Ledeboer*, Paris C. R. 102 (1886), p. 504.

141) Die Verhältnisse bei großen Amplituden werden diskutiert von *O. Chwolson*, Mém. de l'acad. de St.-Pétersbourg 5 (1879), p. 26.

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\delta\frac{d\alpha}{dt} + (\nu^2 + \delta^2)\alpha = 0, \tag{221}$$

in der δ und ν zwei dem Instrumente eigentümliche Konstanten bedeuten. Einen orientierenden Überblick über die Abhängigkeit von ν und δ von den verschiedenen Umständen erhält man durch folgende schematische Überlegung. Hat z. B. die Spule eines *Deprez*-Galvanometers n Windungen und ist H die Stärke des Magnetfeldes, so ist die bei einer Bewegung in derselben nach (I″) induzierte elektromotorische Kraft

$$E = \frac{2nlaH}{c}\frac{d\alpha}{dt}, \tag{222}$$

wenn a der Abstand des dem Magnetfeld ausgesetzten Stückes l einer Einzelwindung bedeutet. Ist noch w der Widerstand, durch den E einen Strom erzeugt, und ist dieser Strom die einzige Ursache der Dämpfung, so ist die in der Zeit δt in Wärme umgesetzte Energie

$$\frac{1}{w}\left(\frac{2nlaH}{c}\right)^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2\delta t, \tag{223}$$

wenn keine Rücksicht auf einen eventuellen Phasenunterschied zwischen dem Strom und der elektromotorischen Kraft E genommen wird. Andererseits ist die Variation der kinetischen Energie:

$$\delta\left[\frac{\Theta}{2}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2\right] = \Theta\frac{d^2\alpha}{dt^2}\delta\alpha \tag{223'}$$

und die Variation der potentiellen Energie der Aufhängung

$$\delta\left[\frac{M}{2}\alpha^2\right] = M\alpha\delta\alpha, \tag{223''}$$

wenn noch Θ das Trägheitsmoment und M das zurücktreibende Moment der Aufhängung ist. Der Energiesatz liefert jetzt Gl. (221), wobei mit Rücksicht auf (223), (223′) und (223″)

$$2\delta = \frac{1}{w\Theta}\left(\frac{2nlaH}{c}\right)^2 \tag{224}$$

und

$$\nu^2 + \delta^2 = \frac{M}{\Theta}. \tag{224'}$$

Wird durch ein solches Galvanometer ein kurz dauernder Strom geschickt, während dessen Verlauf die Nadel sich noch nicht wesentlich von ihrer Ruhelage entfernt hat, so wirkt dieser wie ein Stoß, der der Aufhängung eine plötzliche Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\alpha}{dt} = \omega_0$ erteilt[142]), welche proportional mit der gesamten durchgegangenen

142) Für den Einfluß der endlichen Zeitdauer eines Stromstoßes vgl. man *Dorn,* Ann. d. Phys. 17 (1882), p. 654, sowie *Diesselhorst,* ebenda 9 (1902), p. 458 u. p. 712.

Elektrizitätsmenge ist. Diesem Anfangszustand entspricht dann nach (221) die Lösung

$$\alpha = \frac{\omega_0}{\nu} e^{-\delta t} \sin \nu t. \tag{225}$$

Der erste maximale Ausschlag wird erreicht zur Zeit t_0, definiert durch

$$\operatorname{tg} \nu t_0 = \frac{\nu}{\delta} \tag{226}$$

und hat also den Wert

$$\alpha = \alpha_0 = \omega_0 \frac{e^{-\frac{\delta}{\nu} \operatorname{arctg} \frac{\nu}{\delta}}}{\sqrt{\nu^2 + \delta^2}}. \tag{227}$$

Ob nach diesem Ausschlag das Galvanometer aperiodisch in seine Ruhelage zurückkehrt oder noch um diese Schwingungen ausführt, hängt nach dem obigen Überschlag z. B. davon ab, ob sich ν aus (224) und (224′) als imaginäre oder reelle Größe ergibt. Der Grenzfall der Aperiodizität wird erreicht für $\nu = 0$, dann ist nach (225)

$$\alpha = \omega_0 t e^{-\delta t} \tag{225'}$$

und der maximale Ausschlag

$$\alpha_0 = \frac{1}{e} \frac{\omega_0}{\delta}. \tag{227'}$$

Die Bedingung $\nu = 0$ lautet nach den orientierenden Gleichungen (224) und (224′), ausgedrückt in den Bestimmungsstücken des Galvanometers:

$$w \left(\frac{2nlaH}{c}\right)^2 = 2\sqrt{M\Theta}. \tag{228}$$

Soll das ballistische Galvanometer zu absoluten Messungen gebraucht werden, so muß noch ω_0 mit der durchgegangenen Elektrizitätsmenge

$$\mathsf{E} = \int J\,dt$$

verknüpft werden. Fließt durch das Instrument ein konstanter Strom J_0 und ist das von demselben ausgeübte Drehmoment $G\frac{J}{c}$, so bewirkt er eine statische Ablenkung

$$\alpha = \frac{G}{M} \frac{J}{c} = C \frac{J}{c}, \tag{229}$$

wo also C der „statische Reduktionsfaktor“ ist. Andererseits liefert (221), wenn noch die rechte Seite durch die Stromwirkung vervollständigt wird, durch direkte Integration mit Rücksicht auf die kurze Stromdauer für die anfängliche Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega_0 = \frac{G}{\Theta} \frac{\mathsf{E}}{c} = \mathfrak{C} \frac{\mathsf{E}}{c}, \tag{230}$$

wenn jetzt $\mathfrak{C}$ der „dynamische Reduktionsfaktor“ ist. Aus (229) und

(230) folgt jetzt mit Rücksicht auf (224')

$$\frac{\mathfrak{C}}{C} = \frac{M}{\Theta} = \nu^2 + \delta^2, \tag{231}$$

so daß wir aus (227) für den maximalen Ausschlag erhalten:

$$\alpha = C \cdot \frac{\mathsf{E}}{c} \sqrt{\nu^2 + \delta^2}\, e^{-\frac{\delta}{\nu} \operatorname{arctg} \frac{\nu}{\delta}}. \tag{232}$$

Als Spezialfälle seien hervorgehoben der Fall geringer Dämpfung für den

$$\alpha_0 = \nu C \cdot \frac{\mathsf{E}}{c} \tag{232'}$$

und der aperiodische Grenzfall für den

$$\alpha_0 = \frac{\delta}{e} C \frac{\mathsf{E}}{c} \qquad (e = 2{,}718\ldots). \tag{232''}$$

Ist im allgemeinen der statische Reduktionsfaktor C, die auf 2π sec bezogene Schwingungszahl ν und die Dämpfung δ bestimmt, so können unter Zugrundelegung von (232) absolute ballistische Messungen ausgeführt werden. Relative Vergleichsmessungen sind ohne Bestimmung von ν und δ möglich, da ja nach (232) der maximale Ausschlag proportional E ist.

Sind die Ausschläge von vornherein klein, so kann man eventuell die Stromstöße im Instrument im Takte seiner Eigenschwingungsdauer folgen lassen und dadurch einen größeren Ausschlag erreichen.[115])

143) Spezielleres über diese und ähnliche unter den Namen *Multiplikations-* und *Zurückwerfungsmethode* bekannten Verfahren findet sich bei *W. Weber*, Abh. d. Sächs. Ges. d. Wiss. I (1846), p. 341, Ges. Werke, Berlin 1893, 3, p. 438 ff. Vgl. auch *F. Kohlrausch,* Lehrbuch d. prakt. Physik, Leipzig 1905, p. 484.

(Abgeschlossen Ende 1909.)

V 18. ELEKTROMAGNETISCHE WELLEN.

Von

M. ABRAHAM

IN MAILAND.

Inhaltsübersicht.

I. Einleitung.

1. Die Feldgleichungen und die Grenzbedingungen.
2. Geschichte und Begrenzung des Gebietes.

II. Entstehung und Ausbreitung elektrischer Wellen.

3. Theorie der Entladung eines Kondensators.
4. Die *Hertz*sche Lösung der Feldgleichungen.
5. Superposition *Hertz*scher Lösungen.
6. Elektrische Eigenschwingungen.
 a) Allgemeine Sätze.
 b) Orthogonale Koordinaten.
 c) Spezielle Fälle.
7. Sendeantennen der drahtlosen Telegraphie.
8. Elektrische Resonanz.
9. Zerstreuung elektrischer Wellen.

III. Fortleitung elektrischer Wellen durch Drähte.

10. Eindringen des Feldes in zylindrische Leiter; Skin-Effekt.
11. Elektrische Drahtwellen; elementare Theorie.
12. Drahtwellen; strenge Theorie.
 a) Einzeldraht.
 b) Kabel und Paralleldrähte.
13. Reflexion am Ende der Leitung.

Literatur.

M. Abraham, Theorie der Elektrizität, 2 Teile, Leipzig 1904/5 bezw. 1907/8.
M. Brillouin, Propagation de l'électricité, Paris 1904.
E. Cohn, Das elektromagnetische Feld, Leipzig 1900.
P. Drude, Physik des Äthers auf elektromagnetischer Grundlage, Stuttgart 1894.

J. A. Fleming, The principles of electric wave telegraphy, London 1906.
O. Heaviside, Electrical papers, 2 vol., London 1892.
O. Heaviside, Electromagnetic theory, 2 vol., London 1893, 1899.
H. Hertz, Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft, Leipzig 1892 = Ges. Werke 2.
H. Poincaré, Les oscillations électriques, Paris 1894.
J. J. Thomson, Notes on recent researches in electricity and magnetism, Oxford 1893.
J. Zenneck, Elektromagnetische Schwingungen und drahtlose Telegraphie, Stuttgart 1905.

I. Einleitung.

1. Die Feldgleichungen und die Grenzbedingungen. Die mathematische Grundlage der Theorie rasch veränderlicher elektromagnetischer Felder sind die Hauptgleichungen für ruhende Körper (vgl. Art. V 13, Nr. 6):

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{1}{c}(\mathfrak{J} + \dot{\mathfrak{D}}),$$

$$\text{(II)} \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{B}}.$$

Hierzu treten die Beziehungen, welche einerseits die elektrische Erregung $\mathfrak{D}$ und den Leitungsstrom $\mathfrak{J}$ mit der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$, andererseits die magnetische Erregung $\mathfrak{B}$ mit der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$ verknüpfen. Für isotrope Körper, auf welche wir uns im folgenden beschränken, lauten diese Beziehungen (vgl. Art. V 13, Nr. 8 I; dort ist auch erwähnt, daß die dritte dieser Beziehungen nicht allgemein gilt):

$$\text{(III)} \qquad \mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}, \quad \mathfrak{J} = \sigma\mathfrak{E}, \quad \mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}.$$

Ihre Einführung in (I) und (II) ergibt die *Feldgleichungen für ruhende isotrope Körper:*

$$\text{(1)} \qquad \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{\sigma}{c}\mathfrak{E} = \operatorname{rot} \mathfrak{H},$$

$$\text{(2)} \qquad -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathfrak{E}.$$

Aus (2) folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mu\mathfrak{H} = 0,$$

d. h. die Dichte des wahren Magnetismus (Art. V 13, Nr. 15) an einem gegebenen Orte ändert sich zeitlich nicht. Wir setzen sie im folgenden durchweg gleich Null:

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{div} \mu\mathfrak{H} = 0.$$

Auch setzen wir in Nichtleitern die Dichte der wahren Elektrizität (V 13, Nr. **11**) gleich Null:

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} = 0,$$

obwohl aus (1) nur folgt, daß für $\sigma = 0$ deren zeitliche Änderung verschwindet.

Es würde sich nämlich, wenn wir jenen Dichten in Isolatoren einen von Null verschiedenen Wert zuschreiben würden, ihr zeitlich konstantes Feld dem veränderlichen Felde, welches uns angeht, superponieren. Für periodische und gedämpft periodische Schwingungen, auch in Leitern, befriedigt übrigens jede Lösung von (1) und (2) gleichzeitig auch (3) und (4).

Zu den Feldgleichungen treten an Trennungsflächen zweier Körper die *Grenzbedingungen* (Art. V 13, Nr. **6**):

$$\text{(5)} \qquad \mathfrak{H}_{h\,I} = \mathfrak{H}_{h\,II},$$

$$\text{(6)} \qquad \mathfrak{E}_{h\,I} = \mathfrak{E}_{h\,II},$$

für jede in die Tangentialebene der Trennungsfläche fallende Richtung h.

In einem idealen Grenzfalle jedoch, nämlich wenn einer der aneinander grenzenden Körper ein *„vollkommener Leiter"*, von der Leitfähigkeit $\sigma = \infty$, ist, fällt die Grenzbedingung (5) weg. Hier kann nämlich die Flächendichte $\mathfrak{j}$ des tangentiellen Leitungsstromes einen von Null verschiedenen Wert annehmen; mit ihr sind die tangentiellen Komponenten der magnetischen Feldstärke in dem angrenzenden Körper verknüpft durch:

$$\text{(7)} \qquad \mathfrak{j} = c[\mathfrak{n}\mathfrak{H}].$$

($\mathfrak{n}$ ist der Einheitsvektor, der die äußere Normalenrichtung der Oberfläche des vollkommenen Leiters anzeigt.)

In das Innere eines solchen idealen Leiters dringt das elektromagnetische Feld nicht ein. Dementsprechend folgt aus (6), daß die zu seiner Oberfläche tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}$ in dem angrenzenden Körper gleich Null sind:

$$\text{(8)} \qquad [\mathfrak{n}\mathfrak{E}] = 0.$$

Bei schnellen elektrischen Schwingungen ist es bisweilen gestattet, die metallischen Leiter durch vollkommene zu ersetzen, und an ihrer Oberfläche die Grenzbedingung (8) vorzuschreiben.

2. Geschichte und Begrenzung des Gebietes. Ihre wichtigste Anwendung finden die Feldgleichungen für ruhende Körper in der Theorie der schnellen elektrischen Schwingungen. *Heinrich Hertz*, der Entdecker dieser Schwingungen, berichtet in der einleitenden Übersicht, die er seinen *„Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen*

Kraft[1]) voranschickt, selbst über die Geschichte seiner Versuche. Wie er erzählt, war es ein Zufall, der ihn im Jahre 1886 erkennen ließ, daß der elektrische Funke unter gewissen Umständen sehr schnelle elektrische Schwingungen auszulösen vermag. Der Wichtigkeit dieser Entdeckung für die damals noch strittigen Grundlagen der Elektrodynamik sich wohl bewußt, nahm er sofort die experimentelle Prüfung der *Faraday-Maxwell*schen Theorie in Angriff. Das erst nach manchem Irrwege erreichte Ziel war die Bestätigung dieser Theorie. Durch seine Hohlspiegelversuche konnte *Hertz* die Analogie der elektromagnetischen und der Lichtwellen unmittelbar veranschaulichen, und so auch diejenigen Physiker, welche damals noch auf dem Boden der Fernwirkungstheorie standen, von der Fruchtbarkeit der elektromagnetischen Lichttheorie überzeugen.

Die Entstehung der elektrischen Schwingungen, ihre Ausbreitung im Raume, ihre Fortleitung durch Drähte, das sind die Probleme, über deren mathematische Behandlung in diesem Artikel berichtet werden soll. Diese Probleme sind insbesondere auch für die *drahtlose Telegraphie* von Bedeutung, um deren Betrieb mittelst *Hertz*scher Wellen sich *G. Marconi*, *F. Braun* und *A. Slaby* verdient gemacht haben.

Es ist einigermaßen schwierig, unser Gebiet einerseits gegen die Elektrodynamik langsam veränderlicher Felder, andererseits gegen die Optik abzugrenzen. Der prinzipielle Gegensatz der langsamen und der schnellen Schwingungen ist darin begründet, daß die Theorie der quasistationären Strömung, welche dort gilt, hier meist versagt, daß mithin die Integration der Feldgleichungen unumgänglich wird. Indessen werden in der Literatur der schnellen Schwingungen, insbesondere der drahtlosen Telegraphie, Begriffe wie „Kapazität“ und „Selbstinduktion“ vielfach verwandt, ohne daß die Berechtigung zu ihrer Anwendung aus den Feldgleichungen abgeleitet wird.

Während von den schnellsten *Hertz*schen Schwingungen zu den langsamsten Wechselströmen eine kontinuierliche Reihe herstellbarer Frequenzen führt, ist es bisher nicht gelungen, die Kluft zu überbrücken, welche die Wellen rein elektrischen Ursprungs von denen der strahlenden Wärme trennt. Dadurch ist eine Abgrenzung gegen das Gebiet der Optik zwar für den Experimentator gegeben, aber nicht für den Theoretiker. Dieser braucht, um das elektrodynamische Problem zu einem optischen zu machen, nur die Wellenlängen und

---

1) *H. Hertz*, Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft, Leipzig 1892 = Ges. Werke 2.

gleichzeitig die Abmessungen der Körper zu verkleinern. So werden wir denn gelegentlich (vgl. Nr. 9) auch optische Probleme in den Kreis der Erörterungen ziehen.

II. Entstehung und Ausbreitung elektrischer Wellen.

3. Theorie der Entladung eines Kondensators. Die von *W. Thomson*[2]) herrührende Theorie der Entladung eines Kondensators durch einen Schließungsdraht beruht auf den folgenden Voraussetzungen:

a) Das elektrische Feld kann durch das elektrostatische Feld der Kondensatorbelegungen ersetzt werden, dessen Energie ist:

$$U = \frac{1}{2}\frac{e^2}{K} = \frac{1}{2}K\varphi^2 \tag{9}$$

($\pm e$ Ladung der Belegungen des Kondensators, φ Spannung, K Kapazität des Kondensators).

b) Die Kapazität des Schließungskreises ist gegen diejenige des Kondensators zu vernachlässigen, so daß die Stromstärke

$$J = -\frac{de}{dt} = -K\frac{d\varphi}{dt} \tag{10}$$

für alle Querschnitte des Schließungsdrahtes die gleiche ist.

c) Das magnetische Feld ist dasjenige eines stationären Stromes, von der magnetischen Energie:

$$T = \frac{1}{2}\frac{L}{c^2}J^2 \tag{11}$$

(L Selbstinduktionskoeffizient des Schließungskreises).

d) Der Strom J verteilt sich gleichförmig über den Querschnitt, so daß die *Joule*sche Wärmeentwickelung durch den Gleichstromwiderstand R bestimmt ist:

$$Q = RJ^2. \tag{12}$$

Auf Grund dieser Voraussetzungen ergibt die Energiegleichung:

$$Q = -\frac{d}{dt}\{U + T\} \tag{13}$$

für den zeitlichen Verlauf der Kondensatorentladung die Differentialgleichung:

$$\frac{1}{c^2}L\ddot{\varphi} + R\dot{\varphi} + \frac{\varphi}{K} = 0$$

oder

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + (\nu^2 + \delta^2)\varphi = 0, \tag{14}$$

---

2) *W. Thomson*, Phil. Mag. (4) 5 (1853), p. 393 = Math. and phys. papers 1, p. 540.

wobei abkürzungsweise gesetzt ist:

$$(14a)\qquad \nu^2 = \frac{c^2}{KL} - \frac{1}{4}\frac{R^2 c^4}{L^2}, \qquad \delta = \frac{Rc^2}{2L}.$$

Man erhält zwei partikuläre Integrale von (14):

$$(15)\qquad \begin{cases} \varphi_1 = e^{k_1 t}, & \varphi_2 = e^{k_2 t}, \\ k_1 = -\delta + \nu i, & k_2 = -\delta - \nu i, \end{cases}$$

und hat demgemäß folgende Fälle zu unterscheiden:

$$(A)\qquad R > \frac{2}{c}\sqrt{\frac{L}{K}}, \qquad \nu^2 < 0, \qquad k_1 \text{ und } k_2 \text{ reell;}$$

in diesem Falle stellt das allgemeine Integral

$$(15a)\qquad \varphi = a_1 e^{k_1 t} + a_2 e^{k_2 t}$$

eine *aperiodische Entladung* dar.

$$(B)\qquad R < \frac{2}{c}\sqrt{\frac{L}{K}}, \qquad \nu^2 > 0, \qquad k_1 \text{ und } k_2 \text{ konjugiert komplex;}$$

der reelle Teil des allgemeinen Integrals:

$$(15b)\qquad \varphi = a e^{-\delta t} \sin(\nu t + \alpha)$$

stellt hier eine *periodische Entladung* dar, von der Frequenz $\nu/2\pi$ und der Dämpfungskonstanten δ. Liegt insbesondere der Widerstand R soweit unter dem kritischen Werte, daß es zulässig ist, R^2 gegen $\frac{4L}{c^2K}$ zu vernachlässigen, so gilt nach (14a) für die Schwingungsdauer τ der oszillatorischen Entladung die „*Thomsonsche Formel*“:

$$(15c)\qquad \tau = \frac{2\pi}{\nu} = \frac{2\pi}{c}\sqrt{LK}.$$

Eine Lücke der *Thomson*schen Theorie gibt sich dadurch kund, daß diese Theorie nur die Grundschwingung des Systems liefert. Diese Lücke hat *G. Kirchhoff*[3]) auszufüllen gesucht; indem er die Kapazität des Schließungskreises berücksichtigte, berechnete er nicht nur die Frequenz der Grundschwingung genauer, sondern auch die Frequenzen der Oberschwingungen. Seine auf der Fernwirkungstheorie fußenden Entwickelungen beanspruchten für beliebige Form des Schließungsdrahtes Gültigkeit; vom Standpunkte der *Maxwell*schen Theorie aus jedoch können wir ihre Gültigkeit nur für gewisse spezielle Formen der Drahtleitung als erwiesen betrachten (vgl. Nr. **13**). — Über die Gültigkeit der Voraussetzung (d) der *Thomson*schen Theorie vgl. man Nr. **10**.

Die *Thomson-Kirchhoff*sche Theorie gibt zwar eine Vorstellung

3) *G. Kirchhoff,* Ann. d. Phys. 121 (1864), p. 551 = Ges. Abh., p. 168.

von dem Verlaufe der elektrischen Schwingung im Entladungskreise, sie erklärt jedoch nicht die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen in dem umgebenden Raum und die hiermit verknüpfte Dämpfung durch Strahlung (vgl. Nr. 5).

4. Die Hertzsche Lösung der Feldgleichungen. In dem von wägbarer Materie leeren Raume lauten die Feldgleichungen (1—4):

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathfrak{H}, \tag{16a}$$

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathfrak{E}, \tag{16b}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0, \tag{16c}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0. \tag{16d}$$

Eine Lösung dieser Gleichungen, welche die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen von einem Schwingungszentrum aus darstellt, ist von *H. Hertz*[4]) angegeben worden. Er befriedigt (16a, c, d) durch den Ansatz

$$\mathfrak{E}_x = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z}, \quad \mathfrak{E}_y = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z}, \quad \mathfrak{E}_z = -\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2}\right), \tag{17a}$$

$$\mathfrak{H}_x = \frac{1}{c}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t \partial y}, \quad \mathfrak{H}_y = -\frac{1}{c}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t \partial x}, \quad \mathfrak{H}_z = 0. \tag{17b}$$

Durch diesen Ansatz wird auch (16b) genügt, wenn Π, die sogenannte *„Hertzsche Funktion"*, ein Integral der partiellen Differentialgleichung ist:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}. \tag{17c}$$

Ein überall, ausgenommen den Koordinatenursprung, endliches Integral dieser Differentialgleichung ist

$$\Pi = \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi r}. \tag{18}$$

Es stellt Wellen dar, die sich vom Koordinatenursprung aus nach allen Seiten hin in den Raum ausbreiten. Aus der zunächst willkürlichen Funktion $f\left(t - \frac{r}{c}\right)$ leitet sich das elektromagnetische Feld, gemäß (17a, b), folgendermaßen ab:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= \frac{3xz}{4\pi r^5} f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{3xz}{4\pi c r^4} f'\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{xz}{4\pi c^2 r^3} f''\left(t - \frac{r}{c}\right), \\ \mathfrak{E}_y &= \frac{3yz}{4\pi r^5} f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{3yz}{4\pi c r^4} f'\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{yz}{4\pi c^2 r^3} f''\left(t - \frac{r}{c}\right), \\ \mathfrak{E}_z &= \frac{3z^2 - r^2}{4\pi r^5} f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{3z^2 - r^2}{4\pi c r^4} f'\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{z^2 - r^2}{4\pi c^2 r^3} f''\left(t - \frac{r}{c}\right), \end{aligned}\right. \tag{18a}$$

4) *H. Hertz,* Ann. d. Phys. 36 (1888), p. 1 = Ges. Werke 2, p. 147.

$$(18\text{b})\quad \begin{cases} \mathfrak{H}_x = -\frac{y}{4\pi c r^3} f'\left(t-\frac{r}{c}\right) - \frac{y}{4\pi c^2 r^2} f''\left(t-\frac{r}{c}\right), \\ \mathfrak{H}_y = \frac{x}{4\pi c r^3} f'\left(t-\frac{r}{c}\right) + \frac{x}{4\pi c^2 r^2} f''\left(t-\frac{r}{c}\right), \\ \mathfrak{H}_z = 0. \end{cases}$$

Bei der Annäherung an den Koordinatenursprung wird das elektrische Feld mit demjenigen eines der z-Achse parallelen Dipoles, vom Moment $f(t)$, identisch, das magnetische Feld mit demjenigen eines Stromelementes, welches der zeitlichen Änderung des Momentes jenes elektrischen Dipoles entspricht. Ist das Moment eines solchen Dipoles als Funktion der Zeit gegeben, so bestimmen (18a, b) sein elektromagnetisches Feld. Dasselbe besitzt Rotationssymmetrie um die z-Achse; die elektrische Feldstärke liegt in den Meridianebenen, während die magnetische Feldstärke senkrecht zu ihnen gerichtet ist. In großen Entfernungen r vom Erregungszentrum, wo die letzten Terme in (18a, b) maßgebend sind, stehen beide Vektoren senkrecht zum Radiusvektor, und sind dem Betrage nach einander gleich; es ist hier:

$$(18\text{c})\qquad |\mathfrak{E}| = |\mathfrak{H}| = \left|\frac{\sin\vartheta}{4\pi c^2 r} f''\left(t-\frac{r}{c}\right)\right|.$$

In dieser Kugelwelle sind demnach die Feldstärken dem Sinus der Poldistanz ϑ proportional; sie nehmen bei der Ausbreitung der Kugelwelle im umgekehrten Verhältnis des Kugelradius ab, so daß die Welle durch zwei konzentrische Kugeln die gleiche Energiemenge hindurchführt. Nach dem *Poynting*schen Satze (Art. V 13, Nr. 22) berechnet sich die in der Sekunde in den Raum hinausgesandte Energiemenge zu

$$(18\text{d})\qquad \frac{1}{6\pi c^3}\left\{f''\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\}^2.$$

Betrachtet man Π als Funktion von $\varrho = \sqrt{x^2+y^2}$, z und t, und setzt

$$(19)\quad Q(\varrho, z, t) = -\varrho\frac{\partial \Pi}{\partial \varrho} = \frac{\sin^2\vartheta}{4\pi}\left\{\frac{1}{r} f\left(t-\frac{r}{c}\right) + \frac{1}{c} f'\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\},$$

so kann man die allgemeinen Ausdrücke (18a) der elektrischen Komponenten einfacher schreiben[4]):

$$(19\text{a})\qquad \mathfrak{E}_z = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial Q}{\partial \varrho}, \qquad \mathfrak{E}_\varrho = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial Q}{\partial z}.$$

Hieraus folgt, daß für einen gegebenen Zeitpunkt t_1 die Gleichung der elektrischen Kraftlinien ist:

$$(19\text{b})\qquad Q(\varrho, z, t_1) = \text{constans}.$$

Unter Annahme eines periodisch wechselnden Momentes $f(t)$ sind von *Hertz* selbst die Kraftlinienbilder gezeichnet und diskutiert[4])[5]) worden. Da aber die Schwingungsamplituden, falls keine Energie nachgeliefert wird, infolge der Strahlung abnehmen müssen, so wird eher der Ansatz zutreffen

$$f(t) = a \cdot e^{-\delta t} \sin(\nu t);$$

diesen Ansatz haben *K. Pearson* und *A. Lee*[6]) der Zeichnung der Kraftlinien zugrunde gelegt. Nimmt man jedoch, entsprechend der Auslösung der Schwingungen des *Hertz*schen Erregers durch den elektrischen Funken, an, daß zur Zeit $t = 0$ die gedämpfte Schwingung beginnt, so hat man zu setzen

$$\text{(20)} \qquad \begin{cases} t < 0: f(t) = f(0), & f'(t) = 0, \\ t > 0: f(t) = a \cdot e^{-\delta t} \sin(\nu t + \alpha). \end{cases}$$

Bis zur Zeit $t = 0$ besteht dann im ganzen Raume ein elektrostatisches Feld. Dann geht vom Erregungszentrum eine elektromagnetische Störung aus, die zur Zeit t in eine Kugel vom Radius (ct) eingeschlossen ist. Auf dieser Kugel dürfen die — durch (18a, b) bestimmten — Feldstärken nicht unendlich werden; daher müssen $f(t)$ und $f'(t)$ so gewählt werden, daß sie für $t = 0$ stetig sind, d. h. gemäß den Bedingungen[7]):

$$\text{(20a)} \qquad a \cdot \sin \alpha = f(0), \qquad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\delta}{\nu}.$$

Es bleibt jedoch $f''(t)$ für $t = 0$ unstetig, das gestörte Feld ist demnach von dem ungestörten durch eine Unstetigkeitsfläche der Feldkomponenten getrennt, die mit Lichtgeschwindigkeit in den Raum hinauseilt[7]).

Kann man in diesem Sinne behaupten, daß die elektromagnetische Störung sich mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzt, so gilt für die Phasen der hier betrachteten Kugelwellen nicht das Gleiche. Die Geschwindigkeit, mit der eine Phase der Schwingung sich fortpflanzt, kann sehr wohl größer als c, ja sogar unendlich werden. Sind doch nach (18a, b) die Wellenphasen in der Nachbarschaft des Schwingungszentrums durch $f(t)$ bzw. $f'(t)$, in großen Entfernungen dagegen durch $f''\left(t - \frac{r}{c}\right)$ bestimmt. Durch die im Vergleiche mit ebenen Wellen anomale Art der Fortpflanzung gewinnt die Phase der elektrischen Kraft im ganzen π, diejenige der magnetischen Kraft $\frac{\pi}{2}$; bei Versuchen

5) Siehe auch *M. Brillouin*, Propagation de l'électricité, p. 294.

6) *K. Pearson* und *A. Lee*, Phil. Trans. A. 193 (1900), p. 159.

7) *A. E. H. Love*, Roy. Soc. Proc. 74 (1904), p. 73.

über die Interferenz von Luftwellen und Drahtwellen ist dieser Umstand zu beachten[7a]).

H. Hertz beabsichtigte durch die gegebene Lösung der Feldgleichungen das Feld seines „Erregers" darzustellen. Dieser bestand aus einem geraden, in der Mitte durch die Funkenstrecke unterbrochenen Draht von 150 cm Länge, der in zwei Kugeln von je 30 cm Durchmesser mündete. Wenngleich die *Hertz*sche Lösung manche Seite des Vorganges zutreffend beschreibt, so sind doch die Voraussetzungen der Theorie bei diesem Erreger keineswegs erfüllt. Nach der Theorie müßte sich in Entfernungen, die klein gegen die Wellenlänge sind, der Erreger als elektrischer Dipol darstellen. Der Abstand der jeweils entgegengesetzt geladenen Kugeln des Erregers voneinander müßte demnach klein gegen die Entfernung r eines Aufpunktes sein, die selbst wieder klein gegen die Wellenlänge ist. In Wirklichkeit aber war die gemessene Wellenlänge der Eigenschwingungen gleich 750 cm, also nur gleich der fünffachen Drahtlänge.

Die *Hertz*sche Theorie des Erregers ist auch insofern unbefriedigend, als sie die Wellenlänge der Eigenschwingung unbestimmt läßt, während diese in Wirklichkeit durch die Abmessungen des Erregers bestimmt ist. Von einer vollständigen Theorie des Erregers wird zu verlangen sein, daß sie ebensowohl Frequenzen und Dämpfungsdekremente der Eigenschwingungen bestimmt, wie ihr elektromagnetisches Feld.

5. Superposition Hertzscher Lösungen. Dennoch ist die Hertzsche Lösung für die Theorie der elektrischen Wellen von ebenso grundlegender Bedeutung, wie es die Lösung $e/4\pi r$ der Laplaceschen Gleichung für die Potentialtheorie ist. Durch Superposition Hertzscher Dipole kann man nämlich allgemeinere Lösungen der Feldgleichungen erhalten, mit deren Hilfe man das von veränderlichen Leitungsströmen erregte Feld darzustellen vermag.

Zunächst kann man die Beschränkung hinsichtlich der Richtung der Achse des Dipols fallen lassen, indem man das Formelsystem (17 a—c) vektoriell verallgemeinert[8]). Die Hertzsche Funktion Π

7a) Lösungen der Feldgleichungen, welche periodischen, von n-fachen Polen ausgehenden Störungen entsprechen, sonst aber der Hertzschen Lösung analog sind, hat *H. A. Rowland* schon vor *Hertz* aufgestellt und namentlich auf optische Phänomene angewandt. Vgl. Amer. J. of math. 6, p. 359 und Phil. Mag. 17 (1884), p. 423.

8) Vgl. *M. Abraham*, Theorie der Elektrizität 2, p. 56, 62. Man beachte, daß dieser Vektor die beiden Potentiale der Elektronentheorie (vgl. Art. *Lorentz* V 14, Nr. 4), das skalare φ und das vektorielle $\mathfrak{a}$, passend zusammenfaßt. Die zwischen ihnen bestehende Relation (V 14 Gl. (2)) $\operatorname{div}\mathfrak{a} = -\dot{\varphi}/c$ wird identisch

erscheint dann als z-Komponente des „*Hertzschen Vektors*" $\mathfrak{Z}$, aus dem die Feldstärken $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ sich folgendermaßen ableiten:

$$\text{(21a)} \qquad \mathfrak{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2},$$

$$\text{(21b)} \qquad \mathfrak{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \operatorname{rot} \mathfrak{Z}}{\partial t}.$$

Dies ist ein Lösungssystem der Feldgleichungen (16 a—d), falls der Hertzsche Vektor der partiellen Differentialgleichung genügt

$$\text{(21c)} \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} = \Delta \mathfrak{Z} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{Z} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{Z}.$$

Ihr als Verallgemeinerung von (18) anzusprechendes Integral

$$\text{(21d)} \qquad \mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi r}$$

entspricht einem im Koordinatensprung befindlichen Dipol von dem jeweils beliebig gerichteten Momente $\mathfrak{p}(t)$. Die zeitliche Änderung dieses Vektors

$$\text{(21e)} \qquad \mathfrak{p}'(t) = J(t) d\mathfrak{s}$$

ist einem Stromelemente äquivalent.

Hat man es mit zeitlich rasch veränderlichen Strömen zu tun, die in linearen Leitern fließen, so kann man, falls die Stromstärke $J(t)$ in den Elementen $d\mathfrak{s}$ der Leitungsdrähte bekannt ist, das im Raume erregte elektromagnetische Feld durch Superposition der Felder der einzelnen Stromelemente berechnen[9]). Herrscht bis zur Zeit $t = 0$, wo die elektrischen Ströme zu fließen beginnen, das elektrostatische Feld $\mathfrak{E}_0$, so setze man

$$\text{(22)} \qquad \mathfrak{Z} = \int \frac{d\mathfrak{s}}{4\pi r} \int_0^{t - \frac{r}{c}} J(t)\, dt.$$

In Entfernungen von den Leitern, die groß gegen ihre Querschnittsabmessungen sind, erhält man als Feldstärken der elektromagnetischen Störung:

$$\text{(22a)} \qquad \mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0 = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2},$$

$$\text{(22b)} \qquad \mathfrak{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \operatorname{rot} \mathfrak{Z}}{\partial t}.$$

---

befriedigt, wenn man setzt $\varphi = -\operatorname{div} \mathfrak{Z}$, $\mathfrak{a} = \dot{\mathfrak{Z}}/c$, und es erweisen sich daraufhin die Felddarstellungen (IX), (X) der Elektronentheorie (V 14, p. 157) als gleichlautend mit den obigen Gl. (21a), (21b).

9) *M. Abraham*, Theorie der Elektrizität 2, p. 286—296.

Für einen einzelnen Schwingungskreis, dessen Abmessnngen klein sind, sowohl gegen die Wellenlänge, als auch gegen die Entfernung des Aufpunktes, und dessen Stromstärke J für alle Querschnitte des Leitungsdrahtes jeweils die gleiche ist, geht der allgemeine Ausdruck (22) des Hertzschen Vektors wiederum in den spezielleren (21 d) über, wobei aber statt (21 e)

$$\mathfrak{p}'(t) = J(t)\int d\mathfrak{s} \tag{22c}$$

zu setzen ist; es geht mithin hier die Vektorsumme aller Leiterelemente ein.

Die Formeln (22 c, 21 d) kann man auf die Theorie der Entladung eines ebenen Kondensators anwenden, falls die Voraussetzung (b) der Thomsonschen Theorie (vgl. Nr. **3**) erfüllt ist. Der Vektor $\mathfrak{p}$ ist dann mit dem elektrischen Momente der Kondensatorbelegungen identisch[9]). Das elektromagnetische Feld ist dasjenige eines Hertzschen Dipols, wenigstens in Entfernungen, die groß gegen die Abmessungen des Schwingungskreises sind.

Dieses Ergebnis, im Verein mit dem für die Strahlung eines Hertzschen Dipols geltenden Ausdruck (18 d), gestatten es, die Thomsonsche Theorie der Kondensatorentladung mit Rücksicht auf die Strahlungsdämpfung zu korrigieren. Betrachtet man, was in erster Annäherung erlaubt ist, die Schwingungen der oszillatorischen Entladung als rein periodische, so wird der Mittelwert ihrer Energie

$$\overline{W} = \frac{L}{c^2}\overline{J^2} = \frac{L}{c^2 d^2}\cdot\overline{f'(t)^2}$$

(d ist der Abstand der Kondensatorbelegungen).

Aus (18 d) ergibt sich der relative Energieverlust in der Sekunde, nfolge der Strahlung:

$$2\delta = \frac{d^2}{6\pi c L}\cdot\frac{\overline{f''(t)^2}}{\overline{f'(t)^2}} = \frac{d^2\nu^2}{6\pi c L};$$

dabei hat δ die Bedeutung der Dämpfungskonstanten der Schwingungsamplituden; das logarithmische Dekrement der Strahlungsdämpfung[10]) wird mit Rücksicht auf (15 c)

$$\delta\cdot\tau = \delta\cdot\frac{2\pi}{\nu} = \frac{d^2\nu}{6cL} = \frac{d^2}{6\sqrt{KL^3}} = \frac{d^2\nu^3 K}{6c^3}. \tag{22d}$$

10) *M. Planck,* Berlin Ber. 1896, p. 151; Physik. Zeitschr. 2 (1901), p. 530, leitet für einen, als Hertzschen Dipol aufzufassenden Oszillator eine Schwingungsgleichung ab. Vgl. auch *M. Planck,* Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung, Leipzig 1906, p. 100 ff. Die Schwingungen zweier strahlender Dipole behandelt, unter Berücksichtigung ihrer Wechselwirkung, *V. W. Ekman,* Archiv f. Mat., Astr. och Fysik 3 (1907).

Im Grenzfalle eines vollkommen geschlossenen Kreises verschwindet die in (22c) eingehende Vektorsumme aller Stromelemente. Es ist demnach die Strahlung eines geschlossenen Kreises gleich null, wofern die jener Formel zugrunde liegenden Voraussetzungen zutreffen; dieselben verlangen in allen Querschnitten jeweils gleiche Stromstärke und Abmessungen des Kreises, die klein gegen die Wellenlänge sind. Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, so kann auch der geschlossene Kreis Wellen von endlicher Energie entsenden. Das Feld dieser Wellen ist durch den Ausdruck (22) für den Hertzschen Vektor bestimmt; dieser Ausdruck zieht in den einzelnen Leiterelementen verschiedene Stromstärken in Betracht, sowie auch die verschiedenen Phasen, mit denen die von ihnen entsandten Beiträge im Aufpunkte eintreffen können. Ein Beispiel für die Anwendung von (22) auf ungeschlossene Ströme bieten die Antennen der drahtlosen Telegraphie dar[11]) (vgl. Nr. 7).

Streng genommen ist allerdings die Stromverteilung längs linearer Leiter nicht als bekannt zu betrachten, sondern es ist eben die Aufgabe der Theorie, sie aus den Feldgleichungen und den Grenzbedingungen (vgl. Nr. **1**) zu ermitteln. Von *H. C. Pocklington*[12]) ist gezeigt worden, daß es für gewisse Formen vollkommen leitender Drähte (den zum Kreisring gebogenen und den schraubenförmig gewundenen) möglich ist, durch Aneinanderreihung Hertzscher Dipole auf der Drahtachse der Grenzbedingung (8) auf der Drahtoberfläche Genüge zu leisten und ihr die Stromverteilung bzw. die Schwingungsfrequenz anzupassen.

Man kann auch daran denken[13]), die Stromverteilung an der Oberfläche räumlich ausgedehnter vollkommener Leiter zu ermitteln, indem man Hertzsche Dipole längs ihrer Oberfläche zunächst willkürlich verteilt und dann nachträglich ihre Verteilung der Grenzbedingung (8) anzupassen sucht. Doch wird nur selten dieses Verfahren zum Ziele führen. Wie bei dem analogen elektrostatischen Probleme der Elektrizitätsverteilung auf einem Leiter, wird es sich in den meisten Fällen als erfolgreicher erweisen, auf die Feldgleichungen zurückzugehen, und ihre Integration, mit Rücksicht auf die gestellten Grenzbedingungen, direkt in Angriff zu nehmen.

6. Elektrische Eigenschwingungen. Im Innern eines homogenen isotropen Isolators gelten die Feldgleichungen (1, 2):

---

11) *M. Abraham*, Physik. Zeitschr. 2 (1901), p. 329; Theorie der Elektrizität 2, p. 297—307.

12) *H. C. Pocklington*, Cambr. Phil. Soc. Proc. 9 (1897), p. 324.

13) *H. Poincaré*, Paris C. R. 113 (1891), p. 515.; Oscill. él. p. 79.

(23) $$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathfrak{H}, \quad -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathfrak{E}.$$

Ist der Isolator in eine vollkommen leitende Hülle eingeschlossen, so gilt an seiner Oberfläche die Grenzbedingung (8):

(23a) $$[\mathfrak{n}\mathfrak{E}] = 0.$$

Die Eigenschwingungen eines solchen *abgeschlossenen Systems* müssen, wegen der fehlenden Wärmeentwicklung, *ungedämpft* sein. Es zeigt sich bei jeder Eigenschwingung eines solchen Systems, daß die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ im ganzen Felde in derselben Phase schwingt, und daß $\mathfrak{H}$ gegen $\mathfrak{E}$ überall die Phasendifferenz $\pi/2$ besitzt[14]. Diese elektromagnetischen Eigenschwingungen lassen sich, ebenso wie die analogen akustischen, mit einem Minimaltheorem in Verbindung bringen[14].

Größeres Interesse als die Schwingungen eines abgeschlossenen Bereiches besitzen die Eigenschwingungen eines Raumes, der nach außen hin unbegrenzt ist, nach innen aber an die Oberfläche eines vollkommenen Leiters grenzt. Die Eigenschwingungen eines solchen *offenen Systems* — eines idealisierten Hertzschen Erregers — sind trotz der fehlenden Wärmeentwicklung stets *gedämpft*, weil die in den Raum hinauseilenden Wellen elektromagnetische Energie fortführen. Die entsprechenden Lösungen von (23, 23a) sind gleichfalls mit einem Minimaltheorem verknüpft[15].

6a. Allgemeine Sätze. Wir wollen das gegebene System Σ mit einem ihm geometrisch ähnlichen Systeme Σ' vergleichen. Die Koordinaten einander zugeordneter Punkte in Σ und Σ', insbesondere der Leiteroberflächen, mögen sich folgendermaßen entsprechen:

(24) $$x = kx', \quad y = ky', \quad z = kz'.$$

An Stelle des durch die Konstanten ε, μ gekennzeichneten Isolators in Σ soll in Σ' der von wägbarer Materie leere Raum treten. Die hier geltenden Feldgleichungen schreiben wir:

(25) $$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}'}{\partial t'} = \operatorname{rot}' \mathfrak{H}', \quad -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}'}{\partial t'} = \operatorname{rot}' \mathfrak{E}'.$$

Man nehme ein Lösungssystem $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{H}'$ dieser Feldgleichungen, welches x', y', z', t' zu Unabhängigen hat, als bekannt an; dasselbe mag an der Leiteroberfläche der (23a) entsprechenden Grenzbedingung genügen:

(25a) $$[\mathfrak{n}'\mathfrak{E}'] = 0.$$

---

14) *H. Poincaré,* Arch. de Genève 25 (1891), p. 5; Él. et optique 1. éd., p. 235.

15) *F. Hasenöhrl,* Physik. Zeitschr. 7 (1906), p. 37.

Ihm ordnet sich ein Lösungssystem von (23, 23a) zu:

$$\mathfrak{E} = M \cdot \mathfrak{E}' \sqrt{\mu}, \quad \mathfrak{H} = M \cdot \mathfrak{H}' \sqrt{\varepsilon}, \tag{25b}$$

wofern man entsprechende Zeiten t, t' in Σ, Σ' aufeinander folgendermaßen bezieht:

$$t = kt' \sqrt{\varepsilon \mu}. \tag{25c}$$

Ist Σ' ein offenes System, so ist auch Σ ein solches. Besitzt das Feld $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{H}'$ in großen Entfernungen vom Leiter den Charakter einer nach außen hin eilenden Welle, so gilt das Gleiche für das durch (25b) bestimmte Feld $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$. Es hat M die Bedeutung eines von den Erregungsbedingungen abhängigen Faktors.

Entsprechende Zeiten sind insbesondere die Schwingungsperioden τ, τ' zweier einander entsprechender Eigenschwingungen in Σ und Σ'. Gemäß (25c) ist:

$$\tau = k\tau' \sqrt{\varepsilon \mu}. \tag{25d}$$

Die Schwingungsdauer jeder der Eigenschwingungen ist demnach proportional den Längsabmessungen von Σ, ferner der Wurzel aus der Dielektrizitätskonstante und aus der magnetischen Permeabilität des Isolators[16]). Da die Geschwindigkeiten ebener Wellen in Σ und Σ' in dem Verhältnis $1 : \sqrt{\varepsilon \mu}$ stehen, so ergibt (25d) für die Wellenlängen λ, λ' die Beziehung

$$\lambda = k\lambda'. \tag{25e}$$

Die Wellenlänge der Eigenschwingungen ist den Längsabmessungen des Systems proportional; sie ist, wenn sie in demselben Medium gemessen wird, in welchem die Schwingungen entstehen, von dessen Konstanten ε, μ unabhängig[16]).

Aus (25b) leitet man ferner ab, daß die logarithmischen Dekremente zweier einander entsprechender Eigenschwingungen in Σ und Σ' die gleichen sind[16]).

Der in (25d) enthaltene Satz über die Schwingungsperioden zweier geometrisch ähnlicher Systeme ermöglicht es, die Eigenschwingungen eines Systemes an einem im verkleinerten Maßstabe ausgeführten Modell zu studieren. So hat *P. Drude*[17]) experimentell die Abhängigkeit der Eigenschwingungen kleiner Spulen von deren Parametern untersucht. Mit Hilfe des obigen Satzes kann man auf Grund dieser Messungen auch die Schwingungsperioden größerer Spulen angeben.

---

16) *M. Abraham*, Ann. d. Phys. 66 (1898), p. 435.
17) *P. Drude*, Ann. d. Phys. 9 (1902), p. 293.

6b. Orthogonale Koordinaten. Um wenigstens für einige Leiterformen die elektrischen Eigenschwingungen zu berechnen, wendet man allgemeine orthogonale Koordinaten an (Art. IV 14, Nr. **20**); durch diese drückt sich das Quadrat der Länge eines Linienelementes folgendermaßen aus:

$$ds^2 = \frac{d\alpha^2}{h_1^2} + \frac{d\beta^2}{h_2^2} + \frac{d\gamma^2}{h_3^2}. \tag{26}$$

Auf Grund der Darstellung der Rotation (des curl) durch allgemeine orthogonale Koordinaten (Art. IV 14, Gl. 41) kann man die Feldgleichungen für den leeren Raum schreiben[16]):

$$\text{(26a)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_\alpha}{\partial t} &= h_2 h_3 \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\mathfrak{H}_\gamma}{h_3}\right) - \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{\mathfrak{H}_\beta}{h_2}\right) \right\}, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_\beta}{\partial t} &= h_3 h_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{\mathfrak{H}_\alpha}{h_1}\right) - \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\mathfrak{H}_\gamma}{h_3}\right) \right\}, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_\gamma}{\partial t} &= h_1 h_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\mathfrak{H}_\beta}{h_2}\right) - \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\mathfrak{H}_\alpha}{h_1}\right) \right\}; \end{aligned} \right.$$

$$\text{(26b)} \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_\alpha}{\partial t} &= h_2 h_3 \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\mathfrak{E}_\gamma}{h_3}\right) - \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{\mathfrak{E}_\beta}{h_2}\right) \right\}, \\ -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_\beta}{\partial t} &= h_3 h_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{\mathfrak{E}_\alpha}{h_1}\right) - \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\mathfrak{E}_\gamma}{h_3}\right) \right\}, \\ -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_\gamma}{\partial t} &= h_1 h_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\mathfrak{E}_\beta}{h_2}\right) - \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\mathfrak{E}_\alpha}{h_1}\right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Gelingt es, die Parameter (α, β, γ) der drei orthogonalen Flächenscharen so zu wählen, daß die Leiteroberfläche einer der drei Scharen angehört, etwa durch $\alpha = \alpha_0$ dargestellt wird, so verlangt die Grenzbedingung (23a):

$$\mathfrak{E}_\beta = 0, \quad \mathfrak{E}_\gamma = 0 \quad \text{für } \alpha = \alpha_0. \tag{26c}$$

Ist eine Lösung von (26a—c) gefunden, so ist es leicht, sie auf Grund der oben abgeleiteten Sätze auf den Fall zu übertragen, daß der vollkommene Leiter in einen beliebigen, homogenen, isotropen Isolator eingebettet ist.

Die Gleichungen (26a—c) vereinfachen sich beträchtlich, wenn der Leiter und sein Feld Rotationssymmetrie besitzen. Man kann dann unter γ den Parameter von Halbebenen verstehen, die durch die Symmetrieachse gelegt sind, etwa den Winkel, den eine solche Halbebene mit einer anderen, festen, einschließt. Dann erhält (26) die Form

$$ds^2 = \frac{d\alpha^2}{h_1^2} + \frac{d\beta^2}{h_2^2} + \varrho^2 d\gamma^2. \tag{27}$$

h_1, h_2, und $h_3 = \frac{1}{\varrho}$, der reziproke Abstand von der Symmetrieachse, hängen jetzt, ebenso wie die Feldkomponenten, nur noch von (α, β) ab. Infolge dessen zerfallen die Differentialgleichungen (26a, b) für das axial-symmetrische Feld in zwei voneinander unabhängige Gruppen, einerseits $\mathfrak{E}_\alpha$, $\mathfrak{E}_\beta$, $\mathfrak{H}_\gamma$, andererseits $\mathfrak{H}_\alpha$, $\mathfrak{H}_\beta$, $\mathfrak{E}_\gamma$. Die Gleichungen der ersten Gruppe sind:

$$\text{(27a)} \qquad \begin{cases} \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_\alpha}{\partial t} = \frac{h_2}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \beta}(\varrho \mathfrak{H}_\gamma), \\ \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_\beta}{\partial t} = -\frac{h_1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \alpha}(\varrho \mathfrak{H}_\gamma), \end{cases}$$

$$\text{(27b)} \qquad -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_\gamma}{\partial t} = h_1 h_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\mathfrak{E}_\beta}{h_2}\right) - \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\mathfrak{E}_\alpha}{h_1}\right) \right\},$$

$$\text{(27c)} \qquad \mathfrak{E}_\beta = 0 \text{ für } \alpha = \alpha_0.$$

Diese Gruppe, bei welcher die elektrischen Kraftlinien in den Ebenen $\gamma = \text{const.}$ liegen, besitzt wegen ihrer Anwendung auf den Hertzschen Erreger ein größeres Interesse, als die zweite Gruppe. Es ist zweckmäßig, der weiteren Behandlung eine Hilfsfunktion $Q(\alpha, \beta, t)$ zugrunde zu legen, aus der sich die Feldstärken folgendermaßen ableiten:

$$\text{(28)} \qquad \mathfrak{E}_\alpha = \frac{h_2}{\varrho}\frac{\partial Q}{\partial \beta}, \quad \mathfrak{E}_\beta = -\frac{h_1}{\varrho}\frac{\partial Q}{\partial \alpha},$$

$$\text{(28a)} \qquad \mathfrak{H}_\gamma = \frac{1}{c\varrho}\frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Hierdurch sind die Gl. (27a) identisch erfüllt; (27b) nimmt die Form an:

$$\text{(28b)} \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = h_1 h_2 \varrho \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{h_1}{\varrho h_2}\frac{\partial Q}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{h_2}{\varrho h_1}\frac{\partial Q}{\partial \beta}\right) \right\},$$

während die Grenzbedingung (27c) verlangt:

$$\text{(28c)} \qquad \left(\frac{\partial Q}{\partial \alpha}\right)_{\alpha = \alpha_0} = 0.$$

Die Funktion Q ist eine Verallgemeinerung der von *H. Hertz* zur Darstellung der elektrischen Kraftlinien angewandten (vgl. Nr. 4); es gehen in der Tat die Gleichungen (19a) aus (28) durch Einführung von Zylinderkoordinaten hervor. Die Gleichung der elektrischen Kraftlinien, die dort durch (19b) gegeben war, lautet in dem hier betrachteten allgemeineren Falle gemäß (28) für eine gegebene Zeit t_1:

$$\text{(28d)} \qquad Q(\alpha, \beta, t_1) = \text{constans}.$$

Aus der Grenzbedingung (28c) kann man ableiten[18]), daß von

18) *M. Abraham*, Ann. d. Phys. 67 (1899), p. 834.

der Oberfläche des vollkommenen Leiters aus die Phasen der gedämpft periodischen Eigenschwingungen mit unendlicher Geschwindigkeit ihren Weg in den Raum beginnen. Mit wachsender Entfernung von dem Leiter muß sich ihre Geschwindigkeit asymptotisch der Lichtgeschwindigkeit nähern.

Wir gehen jetzt dazu über, für spezielle Formen der Leiteroberfläche die Eigenschwingungen zu berechnen.

6c. Spezielle Fälle. Die Eigenschwingungen des Außenraumes einer *vollkommen leitenden Kugel* hat *J. J. Thomson*[19]) untersucht.

Bei Einführung räumlicher Polarkoordinaten (r, ϑ, γ) wird

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \frac{1}{r}, \quad h_3 = \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r \sin \vartheta},$$

und es nimmt die partielle Differentialgleichung (28b) die Form an:

$$(29) \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} + \frac{\sin \vartheta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{1}{\sin \vartheta}\frac{\partial Q}{\partial \vartheta}\right).$$

Die durch (28, 28a) bestimmten Feldstärken dürfen auf der Symmetrieachse $(\varrho = 0)$ des Feldes nicht unendlich werden. Dieser Bedingung entsprechende komplexe Partikularlösungen von (29) erhält man, wenn man setzt:

$$(29\text{a}) \qquad Q_n = e^{-p_n c t} \cdot S_n(p_n r) \cdot \sin^2 \vartheta \cdot P_n'(\cos \vartheta).$$

Hier ist unter $P_n(\cos \vartheta)$ die zonale Kugelfunktion n^{ter} Ordnung zu verstehen, während S_n als Funktion seines Argumentes $z = p_n r$ der mit der *Bessel*schen verwandten Differentialgleichung zu genügen hat:

$$(29\text{b}) \qquad S_n'' - S_n\left(1 + \frac{n(n+1)}{z^2}\right) = 0.$$

Die gesuchte Lösung soll für große Werte von r nach außen hin forteilenden Kugelwellen entsprechen. Um dieser Bedingung zu genügen, wählt man das folgende Integral von (29b) aus:

$$(29\text{c}) \qquad S_n = z^{n+1}\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n \left(\frac{e^{+z}}{z}\right).$$

Die Grenzbedingung (28c), angewandt auf eine Kugel vom Radius a, ergibt

$$(29\text{d}) \qquad S_n'(z) = 0 \text{ für } z = p_n a.$$

Hieraus bestimmen sich die *„Eigenwerte“* p_n der komplexen Konstanten

$$(29\text{e}) \qquad p_n = \frac{\sigma_n}{\lambda_n} \pm \frac{2\pi i}{\lambda_n},$$

19) *J. J. Thomson,* Lond. math. soc. Proc. 15 (1884), p. 197; Rec. res. p. 361.

und damit die Wellenlängen λ_n und die Strahlungsdekremente σ_n der Eigenschwingungen.

Für $n = 1$ folgt aus (29c, d):

$$S_1'(z) = e^{+z}\left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right) = 0 \text{ für } z = p_1 a. \tag{29f}$$

Hieraus resultiert für p_1 eine quadratische Gleichung, aus deren konjugiert komplexen Wurzeln man nach (29e) findet

$$\lambda_1 = \frac{4\pi a}{3}, \quad \sigma_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \tag{29g}$$

In ganz entsprechender Weise ergibt sich für p_n eine Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades. Diese Gleichung besitzt für gerade n, außer den konjugiert komplexen Wurzeln, mindestens eine reelle. Obwohl diese letztere einen aperiodisch gedämpften Vorgang darstellt, so ist sie doch mit heranzuziehen, wenn man das Abklingen eines mit der Kugelfunktion n^{ter} Ordnung verknüpften elektrostatischen Anfangszustandes verfolgt[20]).

Den Fall einer vollkommen leitenden, von einer konzentrischen dielektrischen Schicht umhüllten Kugel hat *A. Lampa*[21]) erledigt. *F. Kolaçek*[22]) hat allgemein die Eigenschwingungen einer isolierenden, oder auch leitenden, Kugel untersucht. Die Eigenschwingungen der dielektrischen Schicht eines Kugelkondensators behandeln *J. J. Thomson*[23]) und *J. Larmor*[24]). Der letztere geht auch auf die Eigenschwingungen des ebenen und des zylindrischen Kondensators ein[24]).

Die Untersuchung der Eigenschwingungen vollkommen leitender *Zylinder* führt auf Zylinderfunktionen, und zwar auf solche erster oder zweiter Art, je nachdem es sich um den Innenraum[25]) oder um den Außenraum[26]) handelt. Die Eigenschwingungen des Innenraumes haben *J. J. Thomson*[25]), *Lord Rayleigh*[27]) und *R. H. Weber*[28]) behandelt. In der letztgenannten Arbeit kommt eine von *H. Weber*[29]) herrührende Methode zur Verwendung, welche die beiden Feldgleichungen in eine einzige, für einen komplexen Vektor geltende Feldgleichung

---

20) *A. E. H. Love,* Lond. math. soc. Proc. (2) 2 (1904), p. 88.

21) *A. Lampa,* Wien Ber. 112 (1903), p. 37.

22) *F. Kolaçek,* Ann. d. Phys. 58 (1896), p. 271.

23) *J. J. Thomson,* Rec. res., p. 373 ff.

24) *J. Larmor,* Lond. math. Soc. Proc. 26 (1894), p. 119.

25) *J. J. Thomson,* Rec. res., p. 344.

26) *J. J. Thomson,* Rec. res., p. 347.

27) *Rayleigh,* Phil. Mag. 43 (1897), p. 125.

28) *R. H. Weber,* Ann. d. Phys. 8 (1902), p. 721.

29) *Riemann-Weber,* D. part. Diffgl. d. math. Physik. 2 (1901), p. 348.

zusammenzieht. Mit Hilfe derselben Methode erledigt *A. Kalähne*[30]) den Fall einer zum Kreisring gebogenen Röhre von rechteckigem Querschnitt, der gleichfalls auf Besselsche Funktionen führt.

Die Theorie der Eigenschwingungen eines *gestreckten, vollkommen leitenden Rotationsellipsoids* ist von *M. Abraham*[16]) entwickelt worden. Wählt man als Längeneinheit den halben Abstand der Brennpunkte und versteht unter α, β die Parameter konfokaler Rotationsellipsoide bzw. Hyperboloide, so hat man zu setzen

$$\varrho = \sqrt{(\alpha^2 - 1)(1 - \beta^2)}, \quad h_1 = \sqrt{\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 - \beta^2}}, \quad h_2 = \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2}},$$

so daß (28b) die Form erhält

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}(\alpha^2 - \beta^2) = (\alpha^2 - 1)\frac{\partial^2 Q}{\partial \alpha^2} + (1 - \beta^2)\frac{\partial^2 Q}{\partial \beta^2}. \tag{30}$$

Man kann auch in diesem Falle komplexe Partikularlösungen in Form von Produkten ansetzen:

$$Q_n = e^{-p_n c t} \cdot H_n(\alpha) \cdot E_n(\beta), \quad \begin{cases} \alpha_0 \leqq \alpha < \infty, \\ -1 \leqq \beta \leqq +1, \end{cases} \tag{30a}$$

deren Faktoren $H_n(\alpha)$, $E_n(\beta)$ dann Integrale der gewöhnlichen Differentialgleichungen sein müssen:

$$H_n''(\alpha) + H_n(\alpha)\left(-p_n^2 + \frac{k_n}{1 - \alpha^2}\right) = 0, \tag{30b}$$

$$E_n''(\beta) + E_n(\beta)\left(-p_n^2 + \frac{k_n}{1 - \beta^2}\right) = 0. \tag{30c}$$

k_n und p_n sind noch zu bestimmende Konstanten; p_n ist durch (29e) mit den Wellenlängen und Dämpfungsdekrementen der Eigenschwingungen verknüpft. Gemäß (28, 28a) werden die Felder der Eigenschwingungen dargestellt durch die reellen Teile der komplexen Ausdrücke:

$$\begin{cases} \mathfrak{E}_\alpha = e^{-p_n c t} \cdot \dfrac{H_n(\alpha) \cdot E_n'(\beta)}{\sqrt{(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 - \beta^2)}}, \\ \mathfrak{E}_\beta = - e^{-p_n c t} \cdot \dfrac{H_n'(\alpha) \cdot E_n(\beta)}{\sqrt{(1 - \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2)}}, \\ \mathfrak{H}_\gamma = - p_n e^{-p_n c t} \cdot \dfrac{H_n(\alpha) \cdot E_n(\beta)}{\sqrt{(1 - \beta^2)(\alpha^2 - 1)}}. \end{cases} \tag{30d}$$

Da die Feldkomponenten auf den durch $\beta = \pm 1$ gegebenen Stücken der Symmetrieachse nicht unendlich werden dürfen, so muß $E_n(\beta)$ für $\beta = \pm 1$ verschwinden, und in diesen beiden singulären

30) *A. Kalähne,* Ann. d. Phys. 18 (1905), p. 92; 19 (1906), p. 80.

Punkten der Differentialgleichung (30c) auch endliche erste Ableitungen besitzen.

Hieraus gewinnt man folgende, die Konstanten p_n, k_n verknüpfende Beziehung:

$$(30e)\qquad p_n^2 - q_n^2 = k_n \cdot \frac{\int_{-1}^{+1} d\beta \frac{\chi_n(\beta) E_n(\beta)}{1-\beta^2}}{\int_{-1}^{+1} d\beta \chi_n(\beta) E_n(\beta)},$$

wo gesetzt ist:

$$(30f)\qquad q_n = \pm \frac{\pi n i}{2}, \quad \chi_n(\beta) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi n \beta}{2}\right) & \text{für ungerade } n, \\ \sin\left(\frac{\pi n \beta}{2}\right) & \text{für gerade } n. \end{cases}$$

Die gesuchte Funktion $E_n(\beta)$ genügt der Integralgleichung[31])

$$(31)\qquad e_n E_n(\alpha) = (1-\alpha^2)\int_{-1}^{+1} d\beta\, E_n(\beta)\, e^{p_n \alpha \beta}$$

(e_n ist eine Konstante).

Falls es sich um die Eigenschwingungen des Außenraumes handelt, hat man als Integral von (30b) dasjenige auszuwählen, welches für große Werte von α nach außen hin fortschreitenden Kugelwellen entspricht. Dasselbe läßt sich in der Form darstellen

$$(31a)\qquad H_n(\alpha) = (1-\alpha^2)\int_{-\infty}^{+1} d\beta\, E_n(\beta)\, e^{p_n \alpha \beta}.$$

Die gemäß (28c) an der Oberfläche des ellipsoidischen Leiters vorzuschreibende Grenzbedingung

$$(31b)\qquad H_n'(\alpha_0) = 0$$

liefert eine zweite Beziehung zwischen den Konstanten p_n und k_n.

Diese einigermaßen verwickelten Beziehungen lassen sich in verhältnismäßig einfacher Weise durch sukzessive Approximationen lösen[16]), wenn der Leiter ein sehr gestrecktes Rotationsellipsoid ist; für einen solchen „*stabförmigen*“ oder „nadelförmigen“ Leiter ist α_0 nur wenig größer als 1. In diesem Falle erhält man aus (31b) als erste, verschwindender Dicke des Leiters entsprechende Näherung[16]): $k_n = 0$, mithin aus (30e, f)

$$(32)\qquad \pm \frac{2\pi i}{\lambda_n} + \frac{\sigma_n}{\lambda_n} = p_n = \pm \frac{\pi n i}{2},$$

31) *M. Abraham*, Math. Ann. 52 (1899), p. 81.

daher

(32a) $$\lambda_n = \frac{4}{n}, \quad \sigma_n = 0.$$

In diesem Grenzfalle des geradlinigen Leiters sind die Eigenschwingungen ungedämpft; *die Wellenlänge der Grundschwingung* ($n = 1$) *ist gleich der doppelten Länge des Leiters* (diese war gleich 2 gesetzt); *die Oberschwingungen sind harmonisch.* Man erhält für Q_n:

(32b) $$Q_n = e^{-p_n ct} \cdot H_n(\alpha) \cdot E_n(\beta) = e^{p_n(\alpha - ct)} \cdot \chi_n(\beta).$$

Der reelle Teil hiervon liefert gemäß (28d) die Gleichung der elektrischen Kraftlinien zu verschiedenen Zeiten; dieser ersten Annäherung entsprechende Kraftlinienbilder hat *F. Hack*[32]) gezeichnet. *Für ungerade n ist die Mittelebene* ($\beta = 0$) *eine Knotenebene für die tangentielle elektrische Komponente* $\mathfrak{E}_\alpha$, *für gerade n dagegen für die magnetische Feldstärke* $\mathfrak{H}_\gamma$[16]). Allgemein findet man, für beliebiges n, $n - 1$ Knotenflächen der magnetischen Feldstärke, von der Form konfokaler Rotationshyperboloide. Für einen geradlinigen, in der Mitte durch eine Funkenstrecke unterbrochenen Erreger hat *F. Kiebitz*[33]) das Vorhandensein der Eigenschwingungen ungerader Ordnung bis $n = 17$ experimentell festgestellt, und speziell für $n = 3$ den theoretischen Verlauf der Knoten- und Bauchflächen des magnetischen Feldes bestätigt gefunden.

Treibt man die Approximation einen Schritt weiter, so findet man für die Eigenwerte p_n:

(32c) $$\pm \frac{2\pi i}{\lambda_n} + \frac{\sigma_n}{\lambda_n} = p_n = \pm \frac{\pi n i}{2} + \varepsilon C_n,$$

wo gesetzt ist

(32d) $$\varepsilon = \frac{1}{4 \log\left(\frac{2}{b}\right)},$$

(b ist der Radius des Mittelquerschnitts des Leiters, bezogen auf die halbe Länge als Einheit),

(32e) $$C_n = \int_0^{2\pi n} dx \cdot \frac{1 - \cos x}{x} = \log 2\pi n + 0{,}577 \cdots + \frac{1}{(2\pi n)^2} - \frac{3!}{(2\pi n)^4} + \frac{5!}{(2\pi n)^6} - \cdots,$$

mithin

(32f) $$\lambda_n = \frac{4}{n}, \quad \sigma_n = \frac{4\varepsilon}{n} C_n.$$

---

32) *F. Hack,* Ann. d. Phys. (4) 14 (1904), p. 539.

33) *F. Kiebitz,* Ann. d. Phys. (4) 5 (1901), p. 872.

Die Wellenlänge λ_n bleibt somit ungeändert; doch tritt ein mit zunehmender Dicke des Leiterquerschnitts wachsendes Strahlungsdekrement σ_n auf. Die Korrektion, welche die Funktion Q_n durch Berücksichtigung der Glieder von der Ordnung ε erfährt, ist nur gering, wie auch aus der Zeichnung der entsprechenden Kraftlinienbilder der gedämpften Schwingung[34]) hervorgeht. Auch die Strom- und Ladungsverteilung längs des Leiters erfährt durch Berücksichtigung der Glieder von der Ordnung ε bzw. ε^2 eine in praktischen Fällen zu vernachlässigende Änderung[16]).

Handelt es sich um ein nahezu kugelförmiges Rotationsellipsoid, so wird man, von der Lösung für die Kugel als erster Annäherung ausgehend, Reihenentwicklungen nach Potenzen der Exzentrizität zur Darstellung der Eigenschwingungen verwenden[35]). Für sehr gestreckte Ellipsoide jedoch erweist sich die Konvergenz dieser Reihen, wenigstens was die Eigenschwingungen der Ordnung $n \geqq 3$ anbelangt, als unzulänglich[36]).

7. Sendeantennen der drahtlosen Telegraphie. Die *ursprüngliche Senderanordnung Marconis* besteht aus einem geraden Drahte, der sogenannten *„Antenne“*, der von dem einen Pole einer Funkenstrecke aus senkrecht in die Höhe geführt ist, während der andere Pol geerdet ist. Dieser Sender ist dem geradlinigen Leiter ähnlich, dessen Eigenschwingungen oben (Nr. 6) behandelt worden sind. Er schwingt indessen nicht, wie jener, frei im Raume; vielmehr kommt der Einfluß der Erde in Betracht. Diesem Einfluß kann man nun in sehr einfacher Weise Rechnung tragen[11]), wofern die Erde sich diesen schnellen Schwingungen gegenüber wie ein vollkommener Leiter verhält. Es sei h die Länge der vertikalen Antenne, gerechnet von der Erde bis zur Spitze; spiegelt man sie an der Erdoberfläche, so bilden die Antenne und ihr Spiegelbild zusammen einen geraden Draht von der Länge $2h$, dessen ungeradzahlige Eigenschwingungen an der Erdoberfläche (soweit dieselbe als eben zu betrachten ist) der Grenzbedingung (8) Genüge leisten. Das Feld jener ungeradzahligen Eigenschwingungen stimmt somit oberhalb der Erdoberfläche mit demjenigen des Marconi-Senders überein. Dieser Auffassung zufolge ist die Wellenlänge der Grundschwingung des Sendedrahtes der vierfachen Höhe desselben gleich; die Stromverteilung ist angenähert diejenige

34) *F. Hack,* Ann. d. Phys. 18 (1905), p. 634.

35) *F. Ehrenhaft,* Wien Ber. 113 (1904), p. 273; *M. Brillouin,* Propagation de l'électricité, Paris 1904, p. 326 ff.

36) *M. Brillouin,* l. c. „Corrections et éclaircissements“, p. VII ff.

stehender Drahtwellen, mit einem Stromknoten an der Spitze, einem Strombauche am Erdungspunkte. Nimmt man die Stromverteilung als gegeben an, so kann man die Amplituden der von der Antenne entsandten Wellen auch nach der in Nr. 5 dargelegten Methode berechnen[11]). Man findet, daß nach allen Seiten hin in den Luftraum hinaus Wellen entsandt werden, daß aber deren Amplituden für die zur Antenne senkrechten Richtungen die stärksten sind. Die Wellenamplituden sind umgekehrt proportional der Entfernung von der Antenne; in einer gegebenen Entfernung hängen sie nur von der maximalen Stromstärke in der Antenne ab, nicht aber von deren Länge.

Für das Strahlungsdekrement der Grundschwingung geben die Formeln (32d, e, f) den Wert[11])

$$\sigma_1 = 4\varepsilon C_1 = \frac{2{,}44}{\log\left(\frac{2h}{b}\right)} \tag{33}$$

(b Radius des äquatorialen Querschnitts).

Obwohl dieser Ausdruck zunächst nur auf ein sehr gestrecktes Rotationsellipsoid Bezug hat, dessen Querschnitt nach der Spitze hin abnimmt, so wendet man sie auch auf geradlinige Antennen von konstantem Querschnitte, die man strenge bisher nicht zu behandeln vermag, mit Erfolg an. In praxi ist übrigens h so groß gegen b, daß es auf den genauen Zahlwert des als Argument des Logarithmus eingehenden Quotienten kaum ankommt.

Daß die soeben skizzierte Theorie des Marconi-Senders in ihren Grundzügen die bei der drahtlosen Telegraphie stattfindenden Vorgänge zutreffend beschreibt, haben die ausgedehnten Untersuchungen von *C. Tissot*[37]) dargetan; die Energie der Wellen nimmt wirklich mit dem reziproken Quadrate der Entfernung ab; die Wellenlänge ist nur wenig größer, als die vierfache Länge des Sendedrahtes; die Dämpfungsdekremente finden sich in guter Übereinstimmung mit der Formel (33), wenigstens dann, wenn auf offener See telegraphiert wird, und wenn für gute Erdung gesorgt ist. Das Meerwasser ist demnach hier mit genügender Annäherung als vollkommen leitend zu betrachten, so daß der Seespiegel ein vollkommener Spiegel für die elektromagnetischen Wellen von diesen Frequenzen ist. Das stimmt auch mit dem Ergebnisse theoretischer Betrachtungen von *K. Uller*[38])

37) *C. Tissot,* Étude de la résonance des systèmes d'antennes, Thèse Paris 1905; Journal de phys. (4) 5 (1906), p. 326.

38) *K. Uller,* Beiträge zur Theorie der elektromagnetischen Strahlung, Diss. Rostock 1903; *J. Zenneck,* Ann. d. Phys. (4) 23 (1907) p. 836 bringt eine genauere Durchrechnung der praktischen Verhältnisse für verschiedene Bodenarten und

und *J. Zenneck*[28]) überein, welche die Fortpflanzung ebener Wellen längs der Meeresoberfläche betreffen. Befindet sich dagegen der Sender auf dem Festlande, so ist nach *C. Tissot* seine Dämpfung beträchtlich größer; das Erdreich kann demnach nicht als vollkommen leitend gelten, es läßt vielmehr die Wellen eindringen und absorbiert einen Teil ihrer Energie; gleichzeitig stehen die elektrischen Kraftlinien nicht mehr senkrecht auf der Erdoberfläche und können nach den Rechnungen von *Zenneck*[38]) bis 35° gegen die Vertikale geneigt sein.

Über den Einfluß, welchen die Krümmung der Erdoberfläche auf die Fortpflanzung der vom Sender ausgehenden Wellen hat, liegen befriedigende theoretische Untersuchungen bisher nicht vor.

Bei der einfachen Senderanordnung Marconis ist die Dämpfung der Senderschwingungen ziemlich groß; es ist ihr logarithmisches Dekrement[11])[37]):

$$0{,}2 < \sigma_1 < 0{,}3,$$

so daß die Bedingungen für die scharfe Abstimmung des Empfängers auf den Sender nicht günstig sind. Auch ist der Steigerung der für die Intensität der entsandten Wellen maßgebenden Amplituden von Strom und Spannung in der Antenne dadurch eine Grenze gesetzt, daß das Funkenpotential nicht beliebig groß gemacht werden kann. Daher ist auch die Reichweite der Wellen bei der ursprünglichen Marconi-Schaltung eine beschränkte.

Einen größeren Spielraum, sowohl hinsichtlich der Abstimmbarkeit, wie der Reichweite, bieten die *gekoppelten Sender* dar, zu deren Verwendung *F. Braun, A. Slaby* und auch *G. Marconi* selbst übergegangen sind. Die Schwingungen werden in einem geschlossenen, nicht strahlenden, Kondensatorkreis erregt; auf die Antenne werden sie übertragen, indem diese entweder direkt an jenen Primärkreis angelegt (galvanische Koppelung), oder durch Induktion mit ihm verkoppelt wird (magnetische Koppelung). Für die Amplituden der entsandten Wellen ist wiederum die maximale Stromamplitude in der Antenne maßgebend.

Einige Gesichtspunkte für die Beurteilung solcher Senderanordnungen sind, auf Grund der allgemeinen Theorie der gekoppelten elektromagnetischen Systeme[39]), von *M. Wien*[40]) dargelegt worden.

Feuchtigkeitsgrade. Über die Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen längs der ebenen Grenzfläche eines Isolators und eines Leiters vgl. man übrigens *E. Cohn*, Das elektromagnetische Feld, Leipzig 1900, p. 449.

39) *A. Oberbeck*, Ann. d. Phys. 55 (1895), p. 623 und *R. Domalip* u. *F. Kolaçek*,

Diese zunächst für langsame Schwingungen ausgearbeitete Theorie setzt den Strom in jedem der beiden Teilsysteme als quasistationär voraus, eine Voraussetzung, die bei der Antenne auch nicht angenähert zutrifft. Dennoch werden gewisse, im Anschluß an jene Theorie gewonnene Eigenschaften der Schwingungen gekoppelter Systeme auch von einer strengeren Theorie anzuerkennen sein.

Zwei ursprünglich getrennte Systeme von gleicher Eigenperiode ergeben, miteinander gekoppelt, ein System mit zwei Eigenschwingungen verschiedener Frequenz. Je nachdem die Koppelung „lose" oder „eng" ist, ist die „Schwingungsdifferenz" der Frequenzen der beiden Eigenschwingungen klein oder groß. Die aus dem Zusammenwirken der beiden Eigenschwingungen resultierenden Schwebungen sind es, welche den Übergang der Energie aus dem Primärkreis in die Antenne mit sich bringen. Hiernach erscheinen zwei Grenzfälle als möglich[40]):

a) *Große Schwingungsdifferenz* (kleine Schwebungsdauer). Dieser Fall wird durch starke Koppelung erzielt; hier kann man, durch Vermehrung der Antennenkapazität (Käfigantennen) die Stromamplituden in der Antenne steigern, und so die Reichweite der entsandten Wellen vergrößern. Dadurch vergrößert man selbstverständlich auch die Strahlungsdämpfung und verschlechtert die Abstimmbarkeit.

b) *Kleine Schwingungsdifferenz* (große Schwebungsdauer). Dieser Fall wird durch lose Koppelung der Antenne erzielt; dementsprechend sind die Amplituden der in der Antenne erregten Schwingungen nur gering und die Reichweite daher nicht groß. Im Verlaufe der Schwebung steigert sich die Amplitude der Antennenschwingungen allmählich und bleibt eine Zeitlang stationär, indem der Primärkreis die ausgestrahlte Energie nachliefert. Die Bedingungen sind günstig für die Abstimmung auf einen schwach gedämpften Empfänger.

Eine exakte Behandlung des keineswegs als quasistationär zu betrachtenden Stromes in der Antenne wird in den Arbeiten von

---

Ann. d. Phys. 57 (1896), p. 731. haben die magnetische Koppelung behandelt, *J. v. Geitler,* Ann. d. Phys. 55 (1895), p. 513; 57 (1896), p. 412; 66 (1898), p. 999 die elektrostatische Koppelung. Den allgemeinen Fall, wo magnetische, elektrische und galvanische Koppelung gleichzeitig vorliegen, behandelt *M. Wien,* Ann. d. Phys. 61 (1897), p. 651. Es werden für die Eigenschwingungen des gekoppelten Systemes 2 simultane gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten aufgestellt, so daß sich die Eigenwerte als Wurzeln einer Gleichung 4ten Grades ergeben. *P. Drude,* Ann d. Phys. 13 (1904), p. 512 führt die Theorie der magnetischen Koppelung genauer durch.

40) *M. Wien,* Ann. d. Phys. 8 (1902), p. 686.

G. Seibt[41]), *M. Abraham*[42]) und *L. Mandelstamm*[43]) angestrebt. Der Strom im Primärkreis wird auch hier als quasistationär angenommen. Die Verteilung von Strom und Spannung, die sich in der Antenne ausbildet, wird dagegen als übereinstimmend mit der bei stehenden elektrischen Drahtwellen herrschenden betrachtet. Es kann, z. B. bei galvanischer Koppelung, der Anschlußpunkt der Antenne kein Spannungsknoten, und daher die Wellenlänge λ der Grundschwingung des gekoppelten Systems nicht gleich der vierfachen Antennenlänge sein. Vielmehr ergibt sich eine transzendente Gleichung von der Form

$$(34) \qquad \operatorname{tg} x = f(x) \quad \text{für} \quad x = \frac{2\pi h}{\lambda};$$

dabei ist $f(x)$ eine rationale Funktion von x, in welche die elektromagnetischen Konstanten des gekoppelten Systemes eingehen; die Gleichung (34) kann zur rechnerischen oder graphischen Ermittelung der sämtlichen Eigenfrequenzen des gekoppelten Senders dienen (über die numerische Berechnung der Wurzeln vgl. Art. IV 26, Nr. 2 von *H. Lamb*). Der Fall der magnetischen Koppelung führt auf dieselben Gleichungen, wie derjenige der galvanischen Koppelung[44])[43]).

8. Elektrische Resonanz. Zur Untersuchung des Feldes elektrischer Luft- oder Drahtwellen bediente sich *H. Hertz* eines *Resonators*[45]); derselbe bestand aus einem zum Kreise oder zum Rechteck gebogenen Drahte, der in zwei einander gegenüberstehende Kugeln mündete. Wird der Resonator von dem auffallenden Wellenzuge in so starke Schwingungen versetzt, daß die Spannung zwischen den Kugeln eine gewisse Grenze überschreitet, so springt ein Funke über; diese Fünkchen im Resonator verwandte *H. Hertz*[46]) zur Analyse des elektromagnetischen Feldes.

Als *E. Sarasin* und *L. de la Rive*[47]) das Feld stehender Drahtwellen mit solchen Resonatoren untersuchten, bemerkten sie, daß die gemessene Wellenlänge wesentlich von den Abmessungen des Resonators abhängt. Sie bezeichneten diese Erscheinung als „*multiple Resonanz*", und deuteten sie dahin, daß der Erreger keine bestimmte Frequenz besitze, sondern daß er alle innerhalb eines gewissen Intervalles

41) *G. Seibt,* Elektrische Drahtwellen mit Berücksichtigung der Marconischen Wellentelegraphie, Diss. Rostock 1902.

42) *M. Abraham,* Physik. Zeitschrift 5 (1904), p. 174.

43) *L. Mandelstamm,* Physik. Zeitschrift 5 (1904), p. 245.

44) *J. Zenneck,* Physik. Zeitschrift 4 (1903), S. 656.

45) *H. Hertz,* Ausbr. d. el. Kraft, Ges. Werke 2, p. 87 ff.

46) *H. Hertz,* Ausbr. d. el. Kraft, Ges. Werke 2, p. 115 ff., 133 ff.

47) *E. Sarasin* u. *L. de la Rive,* Arch. de Genève (3) 23 (1890), p. 113.

liegende Schwingungen gleichzeitig ausführe. *H. Hertz*[48]) dagegen, und ebenso *H. Poincaré*[49]) und *V. Bjerknes*[50]), faßten jene Erscheinung als eine Folge der beträchtlichen Strahlungsdämpfung der Erregerschwingungen auf. Nach der von *V. Bjerknes* ausgearbeiteten Theorie[50]) ist der Resonator als System von einem Grade der Freiheit anzusehen, welches der Differentialgleichung der gedämpften Schwingung gehorcht. Sind ν_2, δ_2 Frequenz und Dämpfungskonstante der Eigenschwingungen des Resonators, ν_1, δ_1 diejenigen der Erregerschwingungen, so gelten für die erzwungenen Schwingungen des Resonators die Differentialgleichung:

$$(35) \qquad \ddot{\varphi} + 2\delta_2\dot{\varphi} + (\nu_2{}^2 + \delta_2{}^2)\varphi = A \cdot e^{-\delta_1 t} \cdot \sin(\nu_1 t + \alpha)$$

und die Anfangsbedingungen:

$$(35\text{a}) \qquad t = 0: \ \varphi = 0, \ \dot{\varphi} = 0.$$

A ist ein von der Amplitude der einfallenden Welle abhängiger „Intensitätsfaktor“. Bekanntlich setzt sich die Lösung von (35) und (35a) aus zwei Bestandteilen zusammen, nämlich aus einem partikulären Integrale dieser inhomogenen Differentialgleichung (d. h. einer gedämpften Schwingung mit den Konstanten ν_1, δ_1), und aus einem Integrale der homogenen Differentialgleichung der Eigenschwingungen (einer gedämpften Schwingung der Frequenz ν_2 und der Dämpfungskonstanten δ_2). Je nachdem die Dämpfungskonstante des Erregers (δ_1) oder diejenige des Resonators (δ_2) geringer ist, wird der erste oder der zweite Bestandteil länger andauern, und der erzwungenen Resonatorschwingung ihr Gepräge geben. Der von *Hertz* verwandte Resonator besitzt nun eine weit geringere Dämpfung, als der Erreger. In der erzwungenen Schwingung des Resonators tritt daher dessen eigene Frequenz hervor; so erklärt sich die Erscheinung der multiplen Resonanz.

Im allgemeinen ist, nach der Theorie von *V. Bjerknes*, die erzwungene Schwingung des Resonators von den vier Konstanten beider Leiter abhängig. Ist einer der beiden Leiter verstellbar, und trägt man etwa seine Periode als Abszisse, die entsprechende Erregung des Resonators als Ordinate auf, so erhält man die sogenannte „*Resonanzkurve*“, die ein Maximum in der Nähe des Isochronismus besitzt. *V. Bjerknes* hat gelehrt[50]), aus dieser Kurve die Werte jener vier Konstanten zu ermitteln, wobei er hauptsächlich den elektrometrisch

48) *H. Hertz,* Ausbr. d. el. Kraft, Ges. Werke 2, p. 18.
49) *H. Poincaré,* Électricité et optique 2 (1890), p. 249.
50) *V. Bjerknes,* Ann. d. Phys. 44 (1891), p. 74, 92, 513; 55 (1895), p. 121.

oder bolometrisch bestimmten Integraleffekt als Maß der Resonatorerregung in Betracht gezogen hat. Die Resonanzkurve der Maximalamplitude hat *P. Drude*[51]) diskutiert; er faßt dabei Erreger und Resonator als ein gekoppeltes System von zwei Freiheitsgraden auf; der Grenzfall, wo die Rückwirkung des Resonators auf den Erreger verschwindet, ist es, auf den die Theorie von Bjerknes sich bezieht.

In Wirklichkeit ist der Resonator wohl kaum als System von nur einem Freiheitsgrade zu betrachten. Schon *H. Hertz* fand es notwendig, das Integral der in seinem Funkenresonator induzierten elektromotorischen Kraft in seine von den einzelnen Elementen des Leiters beigesteuerten Bestandteile zu zerlegen[45]). Seine Andeutungen führten *H. Poincaré*[52]) und *P. Drude*[53]) genauer durch, indem sie der Theorie des *Hertz*schen Resonators die partielle Differentialgleichung der erzwungenen Saitenschwingungen zugrunde legten.

Obgleich die Theorie von Bjerknes die Oberschwingungen des Erregers und des Resonators außer acht läßt, stellt sie doch die Erscheinungen der elektrischen Resonanz in ihren Grundzügen befriedigend dar. Sie erweist sich insbesondere auch in der drahtlosen Telegraphie als anwendbar[37]), wenigstens auf die ursprüngliche Marconische Anordnung, welche der einfachen Sendeantenne (Nr. 7) eine gleiche Empfangsantenne gegenüberstellt. Bei den neueren Anordnungen, bei denen der Empfänger, ebenso wie der Sender, ein gekoppeltes System mit zwei Grundschwingungen darstellt, gestaltet sich der Resonanzvorgang weit verwickelter. Man kann hier noch weniger als bei der einfachen Empfangsantenne hoffen, die Integration der Feldgleichungen strenge durchzuführen.

Was die mathematische Formulierung des Problems der elektrischen Resonanz anbelangt, so stimmt sie ganz mit derjenigen des Zerstreuungsproblems überein, zu dem wir jetzt übergehen (Nr. 9). Nur kommt es beim Resonanzproblem mehr auf den Vorgang im Sekundärleiter, beim Zerstreuungsproblem mehr auf die von diesem ausgehenden sekundären Wellen an.

9. Zerstreuung elektrischer Wellen. In einem isotropen — und im allgemeinen homogenen — Isolator mit den Konstanten (ε_1, μ_1) schreite ein Wellenzug $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{H}_1$ (etwa ebener Wellen) fort. Irgendwo sei die Homogenität durch die Anwesenheit eines Körpers mit den Konstanten (ε_2, μ_2, σ_2) gestört. Es wird dann, um die Feldgleichungen im Innern dieses Körpers und den an seiner Oberfläche geltenden

51) *P. Drude,* Ann. d. Phys. 13 (1904), p. 512.

52) *H. Poincaré,* Oscillations électriques, Paris 1893, p. 220 ff.

53) *P. Drude,* Gött. Nachr. 1894, p. 189; Ann. d. Phys. 53 (1894), p. 721.

Grenzbedingungen (vgl. Nr. 1) zu genügen, notwendig sein, zu dem ersten Felde ($\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{H}_1$) ein zweites ($\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{H}_2$) hinzuzufügen, derart, daß $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2$ Lösungen der Feldgleichungen in beiden Körpern, und der Grenzbedingungen an ihrer Trennungsfläche sind. In dem ersten Körper erfüllt dann ($\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{H}_2$) für sich die Feldgleichungen; es entspricht Wellen, die von dem zweiten Körper ausgehen, und die man, im Gegensatze zu den einfallenden „*primären*" Wellen, als „*sekundäre*" Wellen bezeichnen kann; diese Wellen bringen eine *Zerstreuung* der Strahlungsenergie mit sich. Wenn die Welle ($\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$), welche sich durch Superposition der primären und der sekundären Welle ergibt, sich nicht den Vorstellungen der geometrischen Optik gemäß verhält, spricht man wohl auch von einer „*Beugung*" der Wellen durch den störenden Körper. Die Beugung spielt im Gebiete der langen elektrischen Wellen eine noch größere Rolle als bei den kurzen Lichtwellen; nicht nur die geometrische Optik, sondern auch die klassische Beugungstheorie (vgl. Art. V 25) stellen hier eine unzureichende Annäherung dar. Aber auch beim Lichte versagen die Methoden der klassischen Beugungstheorie, wenn die Abmessungen der beugenden Teilcher von der Ordnung der Wellenlänge, oder gar kleiner werden.

Probleme der meteorologischen Optik — die Farbe und die Polarisation des Himmelslichtes — waren es, welche *Rayleigh*[54]) veranlaßten, die Zerstreuung des Lichtes durch kleine Teilchen zu behandeln. In seinen ersten Arbeiten steht er noch auf dem Standpunkte der mechanischen Theorie des Lichtes, und erst später überträgt er seine Ergebnisse in die Sprache der elektromagnetischen Theorie[55]); dabei handelt es sich um isolierende Teilchen, die klein gegen die Wellenlänge sind, und ihrer Dielektrizitätskonstanten nach nur wenig von der Umgebung abweichen. Die Intensität des zerstreuten Lichtes findet *Rayleigh* der vierten Potenz der Wellenlänge umgekehrt proportional, und erklärt so das Überwiegen der blauen Farbe im Himmelslichte; auch die Polarisation des zerstreuten Lichtes ergibt sich in Übereinstimmung mit den Erfahrungen der meteorologischen Optik. Dabei haben wohl die Luftmoleküle selbst an der Zerstreuung des Sonnenlichtes Anteil, so daß man versuchen kann, aus den vorliegenden Beobachtungen die Zahl der Luftmoleküle in der Volumeinheit zu berechnen[56]).

---

54) *J. W. Strutt-Lord Rayleigh,* Phil. Mag. (4) 41 (1871), p. 107, 274, 447.

55) *Rayleigh,* Phil. Mag. (5) 12 (1881), p. 81.

56) *Rayleigh,* Phil. Mag. (5) 47 (1899), p. 375; *Lord Kelvin,* Baltimore Lectures (1904), p. 301 ff.

Nimmt man an, daß die isolierenden Teilchen, welche das Licht zerstreuen, die Form dreiachsiger Ellipsoide haben, so braucht man über ihre Dielektrizitätskonstante keine einschränkende Voraussetzung zu machen. Wenn nur die Abmessungen der Ellipsoide klein gegen die Wellenlänge sind, so kann man ihre Erregung durch die primäre Welle mit genügender Annäherung nach den Methoden der Potentialtheorie bestimmen, und alsdann die entsandten sekundären Wellen berechnen[57]). Auch vollkommen leitende Ellipsoide lassen sich so behandeln[57]).

Die Zerstreuung elektrischer Wellen durch eine vollkommen leitende Kugel kann man exakt behandeln, indem man die Lösung nach Kugelflächenfunktionen entwickelt[58])[59]). Dabei ergeben sich Resonanzerscheinungen, indem die Erregung der Kugel, und daher auch der Druck des Lichtes, für einen gewissen Wert des (auf die Wellenlänge als Einheit bezogenen) Kugelradius ein Maximum besitzt[59]). In entsprechender Weise läßt sich der Fall dielektrischer Kugeln erledigen[60]); für gewisse, den Eigenschwingungen benachbarte Wellenlängen wird die Intensität des zerstreuten Lichtes abnorm groß, was ebenfalls als Resonanzerscheinung zu deuten ist[61])[62]).

Das Problem wird ein ebenes, wenn es Kreiszylinder, mit zur Wellenebene paralleler Achse, sind, welche das auffallende Licht zerstreuen; man zerlegt dann die einfallende Welle in zwei parallel bzw. senkrecht zur Zylinderachse polarisierte Komponenten, und wendet in jedem der beiden Fälle eine Reihenentwicklung nach Besselschen Funktionen an[55])[63])[64])[65]). Die Näherungsmethode von *Rayleigh* ist auch auf elliptische Zylinder[57]) anwendbar, deren Querschnittsabmessungen klein gegen die Wellenlänge sind. Die strenge Behandlung des Zerstreuungsproblemes führt in diesem Falle auf Funktionen des elliptischen Zylinders.

H. Hertz hat bei seinen Versuchen ein *Gitter*[66]) verwandt, bestehend aus parallelen, äquidistanten Metalldrähten, deren Abstand

---

57) *Rayleigh,* Phil. Mag. (5) 44 (1893), p. 28.

58) *J. J. Thomson,* Rec. res. 1893, p. 437.

59) *K. Schwarzschild,* München Ber. 1901, p. 293.

60) *A. E. H. Love,* Lond. math. soc. Proc. 30 (1899), p. 308.

61) *H. Lamb,* Cambr. Phil. Trans. 18 (1900), p. 348.

62) *F. Hasenöhrl,* Wien Ber. 111 (1902), p. 1229. Eine Anwendung auf die Ultramikroskopie macht *F. Ehrenhaft*, Wien Ber. 114 (1905), p. 1115.

63) *J. J. Thomson,* Rec. res. 1893, p. 428.

64) *W. Seitz,* Ann. d. Phys. 16 (1905), p. 747; 19 (1906), p. 554.

65) *W. v. Ignatowski,* Ann. d. Phys. 18 (1906), p. 495.

66) *H. Hertz* Ausbr. d. el. Kraft, Ges. W. 2, p. 190.

klein gegen die Wellenlänge ist; ein solches Gitter läßt von der senkrecht auffallenden ebenen Welle nur diejenige Komponente durch, in welcher die elektrische Kraft senkrecht zur Längsrichtung der Drähte schwingt; die andere Komponente wird reflektiert. Die Theorie eines solchen Gitters hat *J. J. Thomson*[67]) gegeben. *H. Lamb*[68]) hat den Fall behandelt, daß das Gitter, statt aus Drähten, aus Metallstreifen besteht. Vgl. Art. *H. Lamb* IV 26, Nr. 7b.

III. Fortleitung elektrischer Wellen durch Drähte.

10. Eindringen des Feldes in zylindrische Leiter. Skin-Effekt. Wir berichten zunächst über Untersuchungen, die sich mit dem Eindringen des elektromagnetischen Wechselfeldes in zylindrische Leiter beschäftigen. Die einschlägigen Arbeiten von *Maxwell*[69]), *Rayleigh*[70]), *Heaviside*[71]) und *Stefan*[72]) geben auch einen gewissen Einblick in die Rolle, welche solchen Leitern bei der Fortleitung elektrischer Wellen zukommt.

Im Innern eines metallischen Leiters darf man den Verschiebungsstrom $\dot{\mathfrak{D}}$ gegen den Leitungsstrom $\mathfrak{J}$ vernachlässigen und demgemäß die Feldgleichungen (1, 2) schreiben:

$$(36) \qquad \begin{cases} \frac{\sigma}{c}\,\mathfrak{E} = \operatorname{rot}\mathfrak{H}, \\ -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathfrak{E}. \end{cases}$$

Hat, wie wir annehmen, der Leiter die Form eines unendlichen Zylinders von kreisförmigem Querschnitt, so empfiehlt sich die Einführung von Zylinderkoordinaten (z, ϱ, ψ); der Ausdruck (26) für das Quadrat des Linienelementes lautet dann

$$(37) \qquad ds^2 = dz^2 + d\varrho^2 + \varrho^2 d\psi^2.$$

Substituiert man dementsprechend

$$\alpha = z,\ \beta = \varrho,\ \gamma = \psi;\quad h_1 = 1,\ h_2 = 1,\ h_3 = \frac{1}{\varrho}$$

in die rechten Seiten von (26a), so erhält man die auf Zylinderkoor-

---

67) *J. J. Thomson,* Rec. res. 1893, p. 425.

68) *H. Lamb,* Lond. math. soc. Proc. 29 (1898), p. 523. Die Theorie von Lamb wird durch neuere experimentelle Untersuchungen von *Cl. Schaefer* und *J. Langwitz,* Ann. d. Phys. 21 (1906), p. 587, sowie von *G. H. Thomson,* Ann. d. Phys. 22 (1907), p. 365, im ganzen bestätigt.

69) *J. Cl. Maxwell,* Treatise 2, art. 689.

70) *Rayleigh,* Phil. Mag. (5) 21 (1886), p. 381.

71) *O. Heaviside,* El. papers 2, p. 39 ff. u. 168 ff. (1886—87).

72) *J. Stefan,* Wien Ber. 95. 1887, p. 917; Ann. d. Phys. 41 (1890), p. 400.

dinaten bezogenen Komponenten von rot $\mathfrak{H}$:

$$(37a)\quad \begin{cases} \mathrm{rot}_z\,\mathfrak{H} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}(\varrho\,\mathfrak{H}_\psi) - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\mathfrak{H}_\varrho}{\partial\psi}, \\ \mathrm{rot}_\varrho\,\mathfrak{H} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial\psi} - \frac{\partial\mathfrak{H}_\psi}{\partial z}, \\ \mathrm{rot}_\psi\,\mathfrak{H} = \frac{\partial\mathfrak{H}_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial\varrho}. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke, und die entsprechenden der Komponenten von rot $\mathfrak{E}$, sind in die Feldgleichungen (36) einzuführen. Beschränkt man sich auf axialsymmetrische und gleichzeitig von z unabhängige Felder, so gelten die partiellen Differentialgleichungen

$$(38)\quad \begin{cases} \frac{\sigma}{c}\,\mathfrak{E}_z = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}(\varrho\,\mathfrak{H}_\psi), & -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial t} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}(\varrho\,\mathfrak{E}_\psi), \\ \frac{\sigma}{c}\,\mathfrak{E}_\psi = -\frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial\varrho}, & -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}_\psi}{\partial t} = -\frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial\varrho}. \end{cases}$$

Diese vier Gleichungen zerfallen in zwei voneinander unabhängige Paare, welche einerseits $\mathfrak{E}_z$, $\mathfrak{H}_\psi$, andererseits $\mathfrak{H}_z$, $\mathfrak{E}_\psi$ miteinander verknüpfen. Das erste Paar bezieht sich auf ein Wechselfeld, dessen elektrische Feldstärke der Drahtachse parallel ist, während die magnetischen Kraftlinien die Achse umkreisen. Das zweite Paar dagegen bezieht sich auf ein longitudinales magnetisches Wechselfeld, welches die Drahtachse umkreisende elektrische Ströme hervorruft. In mathematischer Hinsicht besteht kein wesentlicher Unterschied zwischen diesen beiden Fällen; wir verfolgen den ersten weiter und erhalten nach Elimination von $\mathfrak{H}_\psi$

$$(38a)\quad \frac{\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial t} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\,\frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial\varrho}\right).$$

Eine partikuläre Lösung dieser partiellen Differentialgleichung ist

$$(39)\quad \mathfrak{E}_z = C\cdot e^{i\nu t}\cdot J_0(x),$$

wo gesetzt ist

$$(39a)\quad x = k\varrho,\quad k^2 = -\frac{i\nu\sigma\mu}{c^2},$$

und wo $J_0(x)$ der Besselschen Differentialgleichung genügt:

$$(39b)\quad J_0''(x) + \frac{1}{x}J_0'(x) + J_0(x) = 0.$$

Da die Lösung auf der Zylinderachse nicht unendlich werden darf, so hat man unter $J_0(k\varrho)$ die Besselsche Funktion erster Art

$$(39c)\quad J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{ix\cos\alpha}\,d\alpha$$

zu verstehen. Sie bestimmt die Verteilung des durch (39) gegebenen Wechselfeldes der Frequenz ν über den Querschnitt des zylindrischen Leiters. Um dieses Feld im Innern des Leiters zu erregen, muß längs seiner Mantelfläche die longitudinale Feldstärke wirken:

$$\overline{\mathfrak{E}}_z = C \cdot e^{i\nu t} \cdot J_0(kb), \tag{40}$$

wo b den Querschnittsradius bezeichnet.

Der gesamte Strom, welcher den Leiterquerschnitt durchfließt, ist gemäß (38a)

$$J = 2\pi \int_0^b \sigma \mathfrak{E}_z \varrho \, d\varrho = \frac{2\pi c^2}{i\nu\mu} \left\{ \varrho \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \varrho} \right\}_{\varrho = b}$$

oder nach (39)

$$J = C \cdot e^{i\nu t} \cdot \frac{2\pi c^2}{i\nu\mu} (x J_0'(x))_{x = kb}. \tag{40a}$$

Stellt man den Zusammenhang der komplexen Ausdrücke für J und $\overline{\mathfrak{E}}_z$ folgendermaßen dar

$$\overline{\mathfrak{E}}_z = RJ + \frac{1}{c^2} L_i \frac{dJ}{dt} = J \left\{ R + \frac{i\nu}{c^2} L_i \right\}, \tag{41}$$

so folgt aus (40) und (40a):

$$R + \frac{i\nu}{c^2} L_i = \frac{i\nu\mu}{2\pi c^2} \left\{ \frac{J_0(x)}{x J_0'(x)} \right\}_{x = kb}. \tag{41a}$$

Aus diesem komplexen Ausdrucke kann man die beiden reellen Größen R und L_i berechnen.

Die physikalische Bedeutung dieser beiden Größen ergibt sich aus dem Poyntingschen Satze. Versteht man unter $\mathfrak{E}_z$, $\mathfrak{H}_\psi$, J an Stelle der obigen komplexen Ausdrücke jetzt deren reelle Teile, welche den wirklichen physikalischen Vorgang darstellen, so ist der Energiestrom, der in die Längeneinheit des zylindrischen Leiters tritt:

$$-2\pi(\varrho \mathfrak{S}_\varrho)_{\varrho = b} = 2\pi c (\mathfrak{E}_z \cdot \varrho \mathfrak{H}_\psi)_{\varrho = b} = \overline{\mathfrak{E}}_z \cdot J.$$

Nach (41) aber wird dies

$$\overline{\mathfrak{E}}_z \cdot J = RJ^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2c^2} \cdot L_i \cdot J^2 \right). \tag{42}$$

Integriert man über die Zeit einer ganzen Schwingung, so muß die in das Innere des Leiters tretende Energie den Verlust durch Joulesche Wärmeentwicklung decken; diese letztere wird durch das erste Glied der rechten Seite von (42) angegeben, während das zweite Glied, das bei der Integration über eine ganze Schwingung hinausfällt, den zeitlichen Zuwachs der magnetischen Energie des Drahtinnern anzeigt (vgl. Nr. 12). Dieser Bedeutung gemäß bezeichnet man R als *„effektiven Widerstand“*, L_i als *„effektive innere Selbstinduktion“* (der Längeneinheit) des Leiters.

Je nachdem einer der beiden Fälle vorliegt

$$\left|\frac{k^2 b^2}{4}\right| = \frac{\nu\sigma\mu b^2}{4c^2} = \vartheta b^2 \begin{Bmatrix} \text{klein} \\ \text{groß} \end{Bmatrix} \text{gegen } 1, \tag{43}$$

sind für $J_0(x)$, die Besselsche Funktion erster Art, die nach aufsteigenden oder fallenden Potenzen des Argumentes fortschreitenden Reihenentwicklungen anzuwenden. Im ersten Falle — d. h. bei hinreichend kleinen Werten der Frequenz ν, der Leitfähigkeit σ, der magnetischen Permeabilität μ und des Drahtradius b — nehmen, wenn man von der Mantelfläche des Zylinders aus in das Innere fortschreitet, Amplitude und Phase von $\mathfrak{E}_z$ nur ein wenig ab. In diesem Falle ergibt (41a):

$$R = R_0 \left\{1 + \frac{(\vartheta b^2)^2}{12} - \frac{(\vartheta b^2)^4}{180} \cdots \right\}, \tag{43a}$$

$$L_i = \frac{\mu}{8\pi} \left\{1 - \frac{(\vartheta b^2)^2}{24} + \frac{13 \cdot (\vartheta b^2)^4}{4320} \cdots \right\}, \tag{43b}$$

so daß der effektive Widerstand nur wenig den Gleichstromwiderstand

$$R_0 = \frac{1}{\sigma\pi b^2} = \frac{\nu\mu}{4\pi c^2} \cdot \frac{1}{\vartheta b^2} \tag{43c}$$

übersteigt, während die effektive Selbstinduktion des Drahtinnern ein wenig kleiner ist als bei gleichförmiger Stromverteilung $\left\{\frac{\mu}{8\pi}\right\}$.

Im zweiten Falle jedoch, d. h. bei hinreichend großen Werten von Frequenz ν, Leitfähigkeit σ, Permeabilität μ und Querschnittsradius b, wo die asymptotische Darstellung der Besselschen Funktionen durch semikonvergente Reihen anzuwenden ist, ergeben sich aus (41a) die sogenannten *Rayleigh*[70]*-Stefanschen*[72]) *Formeln*:

$$R = \frac{1}{2\pi b} \cdot \sqrt{\frac{\nu\mu}{2\sigma c^2}} + \frac{R_0}{4}, \tag{43d}$$

$$L_i = \frac{1}{2\pi b} \cdot \sqrt{\frac{\mu c^2}{2\sigma\nu}}. \tag{43e}$$

In diesem Grenzfalle dringt das Feld und der Strom nur sehr wenig in das Innere des Leiters ein; nur unmittelbar an der Oberfläche befindet sich eine dünne Stromhaut; bei Hertzschen Schwingungen ist die Dicke dieser Haut nur von der Ordnung eines Hundertelmillimeters. Die Bildung einer Stromhaut an der Oberfläche wird von den Engländern als „*skin-effect*" bezeichnet.

Handelt es sich nicht, wie soeben angenommen worden ist, um periodische, sondern um gedämpfte Schwingungen, so gelten für R und L_i etwas abweichende Formeln[73]).

73) *E. H. Barton*, Phil. Mag. 47 (1899), p. 433.

Ein weit größeres Anwachsen des effektiven Widerstandes mit der Frequenz, als es die obigen Formeln für gerade Drähte von kreisförmigem Querschnitt anzeigen, fanden *Battelli* und *Magri*[74]) sowie *F. Dolezalek*[74]) bei Spulen und erklärten dasselbe zutreffend durch einen einseitigen Skin-Effekt am inneren Umfang der Spule. Eine elementare, für geringe Frequenzen gültige Theorie des Skin-Effectes in Spulen hat *M. Wien*[75]) gegeben. Die von *A. Sommerfeld*[76]) auf Grund der Feldgleichungen durchgeführte Behandlung des Problemes bezieht sich auf Spulen und Rollen, die aus dicht neben- bzw. übereinander gewickelten Lagen eines Drahtes von rechteckigem Querschnitte bestehen. Später[77]) behandelt derselbe auch den Widerstand in Solenoiden von kreisförmigem Querschnitt des Drahtes und endlicher Ganghöhe im Anschluß an eine Vorarbeit von *G. Picciati*[77]) und kommt dabei zu qualitativ denselben Resultaten wie in der vorgenannten einfacheren Theorie.

In der Thomsonschen Theorie der Entladung eines Kondensators (Nr. 3) wird die Stromverteilung über den Querschnitt als gleichförmig angenommen (Vorauss. d.). Daß diese Voraussetzung nicht genau zutrifft, und R sowie L_i nicht als Konstanten, sondern als Funktionen der Frequenz anzusehen sind, kompliziert das Problem der Kondensatorentladung; insbesondere was die Grenze zwischen aperiodischer und oszillatorischer Entladung, und was den zeitlichen Verlauf des beginnenden Entladungsvorganges anbelangt, bedarf die Thomsonsche Theorie einer Korrektur[78]).

Das Problem des Eindringens eines longitudinalen magnetischen Wechselfeldes in einen Kreiszylinder ist von *O. Heaviside, A. Oberbeck* und *H. Lamb* behandelt worden[79]). Die Untersuchung fußt auf dem

---

74) *A. Battelli* und *L. Magri* Phil. Mag. (6) 5 (1903), p. 1; *F. Dolezalek,* Ann. d. Phys. 12 (1903), p. 1142.

75) *M. Wien,* Ann. d. Phys. 14 (1904), p. 1.

76) *A. Sommerfeld,* Ann. d. Phys. 15 (1904), p. 673. Qualitativ bestätigt durch die Messungen von *Th. Black,* Diss. Straßburg 1905 und Ann. d. Phys. 19 (1906), p. 157.

77) *A. Sommerfeld,* Ann. d. Phys. 24 (1907), p. 609; *G. Picciati,* Nuovo Cimento (5) 11 (1906), p. 351.

78) Vgl. hierzu: *J. Stefan,* Ann. d. Phys. 41 (1890), p. 421; *J. J. Thomson,* Rec. res., 1893, p. 335; *E. H. Barton* u. *W. B. Morton,* Phil. Mag. 48 (1899), p. 143, 148.

79) *O. Heaviside,* El. papers 1 (1884—85), p. 353 ff; *A. Oberbeck,* Ann. d. Phys. 21 (1884), p. 672; *H. Lamb,* Lond. Math. Soc. Proc. 15 (1884), p. 138; ebenda 15, p. 270 behandelt er den Fall eines transversalen magnetischen Wechselfeldes.

Paare der Gleichungen (38), welche $\mathfrak{H}_z$ und $\mathfrak{E}_\psi$ miteinander verknüpfen, und geht der oben angegebenen ganz parallel. Die sogenannten „*Wirbelströme*“, welche durch zeitlich wechselnde magnetische Felder in Leitern erregt werden, sind wegen des durch sie bedingten Energieverlustes auch für die Elektrotechnik von Interesse. Der Fall der planparallelen Platte ist von *J. J. Thomson*[80]), der Fall eines Zylinders von rechteckiger Basis — insbesondere sehr schmales Rechteck, Blechstreifen, mit longitudinalem Magnetfeld ist von *P. Debye*[80]) erledigt worden. Eine Reihe anderer technisch wichtiger Fälle der Wirbelstromverteilung hat *R. Rüdenberg*[81]) bearbeitet.

Die Analogie[82]) des elektrischen und des magnetischen Problems erstreckt sich auch auf den Fall, wo die longitudinale elektrische bzw. magnetische Feldstärke nicht längs des Kreiszylinders konstant ist, sondern eine gedämpft periodische Veränderung zeigt. Das von *J. J. Thomson*[83]) untersuchte magnetische Problem, dessen Lösung die Fortpflanzung von Wellen magnetischer Erregung längs eines magnetisierbaren Drahtes darstellt, entspricht durchaus dem elektrischen Probleme der Fortpflanzung elektrischer Wellen längs eines einzelnen Drahtes, über das wir in Nr. 12 berichten.

11. Elektrische Drahtwellen; elementare Theorie. Die Anfänge der Theorie der elektrischen Wellen, die sich in Kabeln und längs Drähten fortpflanzen, liegen in der Vor-Maxwellschen Epoche. *W. Thomson*[84]) war es, der für Kabelwellen eine mit der Wärmeleitungsgleichung formal identische partielle Differentialgleichung aufstellte; er berücksichtigte nur die Kapazität und den Widerstand des Kabels. Von *G. Kirchhoff*[85]) wurde die Selbstinduktion der Leitung in die Theorie eingeführt und die Telegraphengleichung abgeleitet. Die Bedeutung der Selbstinduktion, insbesondere für die Fragen der Tele-

---

80) *J. J. Thomson,* Electrician 28 (1892), p. 597; *P. Debye*, Zeitschr. Math. Phys. 54 (1906), p. 418.

81) *R. Rüdenberg*, Energie der Wirbelströme in elektrischen Bremsen und Dynamomaschinen (Sammlung elektrotechnischer Vorträge X), Stuttgart 1906.

82) Vgl. hierzu *J. Zenneck,* Ann. d. Phys. 9 (1902), p. 497; 10, p. 845; 11 (1903), p. 867, 1121, 1135.

83) *J. J. Thomson,* Rec. res., p. 302 ff.

84) *W. Thomson,* Lond. Roy. Soc. Proc. 1855 = Math. and phys. papers 2, p. 61.

85) *G. Kirchhoff,* Ann. d. Phys. 100 (1857), p. 193; 102 (1857), p. 529. = Ges. Abh., p. 131, 154; Berlin Ber. 1877, p. 598 = Ges. Abh., p. 182. Über die Betrachtung der Drahtwellen vom Standpunkte der Fernwirkung vgl. auch: *A. Elsaß,* Ann. d. Phys. 49 (1893), p. 487.

phonie, richtig erkannt zu haben, ist das Verdienst von *O. Heaviside*[86]).

Die ältere Theorie definierte die Kapazität und die Selbstinduktion einer Leitung durch die elektrostatischen und die elektrodynamischen Fernwirkungen der Leiterelemente. Die Feldwirkungstheorie hingegen betrachtet diese Begriffe nicht als von vornherein gegebene; sie stellt vielmehr die Aufgabe, auf Grund der Feldgleichungen zu untersuchen, ob bzw. in welchen Fällen sich jene Begriffe präzise definieren lassen, wofern sie es nicht vorzieht, ohne Heranziehung dieser Hilfsbegriffe die Fortpflanzung der Wellen direkt durch Integration der Feldgleichungen zu ermitteln.

Was das Drahtinnere anbelangt, so sind die Feldgleichungen der Fernwirkungstheorie und diejenigen der Maxwellschen Theorie formal miteinander identisch, wenigstens dann, wenn man den hypothetischen Verschiebungsstrom im Leiter vernachlässigt. Doch sieht die Fernwirkungstheorie die Ladungen der Leiterelemente als das Wesentliche an, und betrachtet dementsprechend den Draht, welcher die Elektrizität leitet, als den eigentlichen Sitz des Vorgangs. Die Feldwirkungstheorie dagegen richtet ihr Augenmerk auf die Vorgänge in dem Dielektrikum, in dem sich die elektromagnetischen Kräfte fortpflanzen; dem Draht schreibt sie nur eine sekundäre Bedeutung zu, da ja in ihn das Feld hochfrequenter Schwingungen kaum eindringt[87]). Dennoch geben die Drähte, indem sie die Endpunkte der elektrischen Kraftlinien zwingen, an ihrer Oberfläche entlang zu gleiten, der elektromagnetischen Welle die Richtung; in diesem Sinne sind die Drähte auch vom Standpunkte der Feldwirkung aus als Leiter der Wellen zu bezeichnen.

Im Innern eines homogenen, isotropen Dielektrikums gelten, nach Nr. 1, die Feldgleichungen (1—4):

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathfrak{H}, \tag{44a}$$

$$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathfrak{E}, \tag{44b}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0, \tag{44c}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0. \tag{44d}$$

Die soeben hervorgehobene Tatsache, daß hochfrequente Schwingungen in metallische Leiter nur sehr wenig eindringen, legt es nahe,

86) *O. Heaviside,* El. papers 2, p. 119 ff., 307 ff.

87) Vgl. *H. Hertz,* Ges. Werke 2, p. 171 ff.

das Problem der Drahtwellen zu idealisieren, indem man die Leiter als vollkommene betrachtet. In solche Leiter dringt das Feld überhaupt nicht ein, und es gilt an ihrer Oberfläche die Grenzbedingung (8), welche verlangt, daß die elektrische Feldstärke senkrecht zur Leiteroberfläche gerichtet ist. Sind, wie wir weiterhin voraussetzen, die Leiteroberflächen Zylinder mit zur z-Achse parallelen Erzeugenden, so kann man jener Grenzbedingung entsprechende Lösungen des Problems folgendermaßen finden[88]): Man setze

$$(45) \qquad \mathfrak{E}_z = 0, \qquad \mathfrak{H}_z = 0,$$

$$(45\text{a}) \qquad \mathfrak{E}_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \mathfrak{E}_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

$$(45\text{b}) \qquad \mu \mathfrak{H}_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \mu \mathfrak{H}_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Dabei sind Φ und Ψ Funktionen von (x, y, z, t), welche in jeder Querschnittsebene der Leitung der Laplaceschen Gleichung genügen:

$$(45\text{c}) \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0.$$

Dieser Ansatz erfüllt das System (44a—d) der Feldgleichungen, wofern zwischen Φ und Ψ die Beziehungen bestehen:

$$(45\text{d}) \qquad \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad -\frac{1}{c}\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Hieraus resultiert die partielle Differentialgleichung der schwingenden Saite:

$$(45\text{e}) \qquad \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2},$$

die in bekannter Weise gelöst wird durch

$$(45\text{f}) \qquad \Phi = \Phi_0(x, y) \cdot f(z - wt), \quad w = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Diese partikuläre Lösung entspricht einer Welle, die sich parallel der positiven z-Achse ungedämpft und unverzerrt fortpflanzt. Sie erfüllt (45d), wenn man setzt:

$$(45\text{g}) \qquad \Psi = \sqrt{\varepsilon\mu} \cdot \Phi.$$

Nach (45) ist die betrachtete Welle eine transversale, d. h. die elektromagnetischen Vektoren liegen in der Querschnittsebene. Die Welle pflanzt sich mit derselben Geschwindigkeit längs der Leitung fort, wie ebene homogene Wellen in dem betreffenden Dielektrikum.

88) *Rayleigh,* Phil. Mag. 44 (1897), p. 199. Vgl. auch *Abraham-Föppl,* Theorie der Elektrizität 1, Aufl. 2 (1904), p. 331 ff; Aufl. 3 (1907), p. 340 ff.

Was das Feld in einer beliebigen Querschnittsebene anbelangt, so leitet sich, nach (45a), das elektrische Feld aus dem ebenen Potentiale Φ, das magnetische aus der Stromfunktion (vgl. Art. IV 14, Nr. 7) Ψ ab. Aus (45g) folgt, daß die elektrischen Äquipotentialkurven $\Phi =$ const. mit den magnetischen Erregungslinien $\Psi =$ const. zusammenfallen. Für jede Querschnittsebene aber ist Φ bestimmt durch die Laplacesche Gleichung, und die Forderung, entsprechend der Grenzbedingung (8) auf jedem der Leiterquerschnitte einen konstanten Wert anzunehmen. Diese Bedingungen sind durchaus identisch mit denen, welchen das elektrostatische Potential der leitenden unendlichen Zylinder zu genügen hat; nur ist bei dem elektrostatischen Probleme die Ladung der Längeneinheit des betreffenden i^{ten} Zylinders:

$$(45\text{h}) \qquad e_i = -\varepsilon \int ds_i \frac{\partial \Phi}{\partial n_i}$$

(s_i Umfangslinie des Querschnitts, n_i äußere Normale)
für alle Querschnitte des Zylinders die gleiche, während sie hier von Querschnitt zu Querschnitt variieren kann. Für die Stromstärke durch denselben Leiterquerschnitt

$$(45\text{i}) \qquad J_i = -\frac{c}{\mu} \int ds_i \frac{\partial \Psi}{\partial n_i}$$

folgt aus (45g, h, i):

$$(45\text{k}) \qquad J_i = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \cdot e_i = w \cdot e_i.$$

In den Gültigkeitsbereich der soeben dargelegten Methode fallen folgende Anordnungen: Ein *Kabel* mit vollkommen leitenden, zylindrischen Belegungen; zwei jeweils in gegenüberliegenden Querschnitten entgegengesetzt geladene *Paralleldrähte*, wie sie nach dem Vorgange von *J. Lecher*[89]) vielfach zur Fortleitung Hertzscher Schwingungen verwandt werden. Auch eine beliebige Zahl paralleler Drähte kann unter Vernachlässigung ihres Leitungswiderstandes nach dieser Methode behandelt werden, falls

$$(45\text{l}) \qquad \sum_{i=1}^{n} e_i = 0$$

ist; dabei ist die Summe über alle in einer Ebene liegenden Querschnittselemente der n Leiter zu erstrecken. Würde diese Summe nicht gleich null sein, so würden in unendlichem Abstande von der Leitung Φ, Ψ, und ebenso die elektrische und magnetische Energie der Welle, logarithmisch unendlich werden. Dieser Umstand läßt es, wie schon

89) *J. Lecher*, Ann. d. Phys. 41 (1890). p. 850.

H. Hertz bemerkte[90]), nicht zu, z. B. Wellen längs eines einzelnen Drahtes nach dieser Methode zu behandeln. In diesem Falle muß man die endliche Leitfähigkeit des Drahtes berücksichtigen, wenn man eine physikalisch zulässige Lösung zu erhalten wünscht (vgl. Nr. 12).

Für *zwei Paralleldrähte* ist bei der Lecherschen Anordnung,

$$e_2 = -e_1, \tag{46}$$

und gemäß (45k)

$$J_2 = -J_1. \tag{46a}$$

Wie bei dem analogen elektrostatischen Probleme kann man durch

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \frac{e_1}{K} \tag{46b}$$

die auf die Längeneinheit bezogene „*Kapazität der Leitung*" definieren; im Falle zweier Drähte von gleichem kreisförmigen Querschnitt ist ihr Wert:

$$K = \frac{\pi \varepsilon}{\log\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right)} \tag{46c}$$

($2a$ Abstand der Drahtachsen, b Radius des Querschnitts).

Auf der linken Seite von (46b) steht die Differenz der Werte von Φ für zwei Punkte der beiden Leiter, welche in derselben Querschnittsebene liegen. Die durch diese Differenz bestimmte „*Spannung*" ist gleich dem Linienintegral der elektrischen Feldstärke, erstreckt von einem Punkte des ersten bis zu einem Punkte des zweiten Leiters, und zwar längs einer ganz in der Querschnittsebene verlaufenden Kurve. (Für eine aus der Querschnittsebene heraustretende Kurve wäre, in dem Felde der Drahtwellen, jenes Linienintegral vom Wege abhängig.)

In entsprechender Weise ist durch die linke Seite der Gleichung

$$\Psi_1 - \Psi_2 = \frac{L_a}{c} \cdot J_1 \tag{46d}$$

der auf die Längeneinheit der Leitung bezogene „*Induktionsfluß*" definiert, und durch die Gleichung selbst die auf die Längeneinheit bezogene (äußere) „*Selbstinduktion der Leitung*".

Aus (45g, k) folgt

$$K L_a = \varepsilon \mu_a \tag{46e}$$

(μ_a Permeabilität des Dielektrikums),

so daß z. B. für zwei Paralleldrähte von gleichem, kreisförmigem Quer-

90) *H. Hertz,* Ausbr. d. el. Kraft, Ges. Werke 2, p. 11.

schnitt sich aus (46c) ergibt

$$L_a = \frac{\mu_a}{\pi} \log\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right). \tag{46f}$$

Eine dem Gedankengange der Fernwirkungstheorie näher stehende Behandlungsweise[91]) des Problemes geht von dem Induktionsgesetz aus. Wendet man dieses auf ein Band an, welches von zwei benachbarten Querschnittsebenen und von den beiden Leiteroberflächen begrenzt ist, so folgt

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial(\Psi_1 - \Psi_2)}{\partial t} = \frac{\partial(\Phi_1 - \Phi_2)}{\partial z}. \tag{47}$$

Nimmt man hierzu die aus der Konstanz der Elektrizität folgende Beziehung

$$\frac{\partial e_1}{\partial t} = -\frac{\partial J_1}{\partial z}, \tag{47a}$$

und definiert K und L_a den Gleichungen (46b, d) gemäß, so erhält man

$$\frac{K L_a}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 e_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 e_1}{\partial z^2}. \tag{47b}$$

Hieraus ergibt sich als Geschwindigkeit der Drahtwelle

$$w = \frac{c}{\sqrt{K L_a}}, \tag{47c}$$

was mit (45f) übereinstimmt, falls (46e) gilt.

Doch ist wohl zu beachten, daß auf Grund der Feldgleichungen Kapazität und Selbstinduktion der Leitung nur für zylindrische Leiter definiert worden sind, und auch für solche nur dann, wenn das magnetische Feld rein transversal ist. Würde nicht überall die Beziehung gelten

$$\mathfrak{H}_z = 0, \tag{48}$$

die infolge der Feldgleichungen (44b, c) die Relationen mit sich bringt:

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} = 0, \tag{48a}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial y} = 0, \tag{48b}$$

so wäre es nicht mehr möglich, aus Φ das elektrische, aus Ψ das magnetische Feld so abzuleiten, wie es die Gleichungen (45a, b) fordern. Dann würden die Begriffe der Spannung und des Induktionsflusses, und damit auch die der Kapazität und der Selbstinduktion in der Luft schweben. Die durch (45) noch hinzugenommene Speziali-

91) *P. Drude,* Physik d. Äthers, p. 374 ff; Ann. d. Phys. 60 (1897), p. 1.

sierung dagegen, welche besagt, daß auch $\mathfrak{E}_z$ verschwindet, ist für die Existenz dieser Begriffe nicht wesentlich; würden wir sie fallen lassen, so würden für Φ und Ψ eben nicht mehr die Differentialgleichungen (45c) logarithmischer Potentiale, sondern andere partielle Differentialgleichungen gelten (Nr. **12**), so daß K und L_a nicht mehr mit Hilfe der Potentialtheorie berechnet werden könnten.

Die obige, auf den Gleichungen (47), (47a) fußende Ableitung der für die Fortpflanzung der Wellen längs der beiden Leiter maßgebenden Gleichungen läßt sich so verallgemeinern, daß dem Einfluß des Leitermateriales, wenigstens unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen, Rechnung getragen wird[92]). Der endliche Leitungswiderstand bedingt es, daß an der Oberfläche der beiden Leiter die longitudinale elektrische Komponente nicht verschwindet, wenn auch ihre Werte $(\overline{\mathfrak{E}}_z)_1$, $(\overline{\mathfrak{E}}_z)_2$ gegen die transversalen Komponenten von $\mathfrak{E}$ sehr klein sind. Macht man die

Annahme A: $(\overline{\mathfrak{E}}_z)_1$ und $(\overline{\mathfrak{E}}_z)_2$ *haben längs der Umfangslinie des betreffenden Leiterquerschnitts jeweils einen konstanten Wert*, so ergibt das Induktionsgesetz als Verallgemeinerung von (47)

$$(49)\qquad -\frac{1}{c}\frac{\partial(\Psi_1-\Psi_2)}{\partial t}=\frac{\partial(\Phi_1-\Phi_2)}{\partial z}+(\overline{\mathfrak{E}}_z)_1-(\overline{\mathfrak{E}}_z)_2.$$

Wenn man hier für die Spannung und den Induktionsfluß die Beziehungen (46b, d) und die oben erhaltenen Werte von K und L_a einführt, so involviert das die

Annahme B: Das transversale elektromagnetische Feld im Dielektrikum erfährt durch das Hinzutreten der longitudinalen elektrischen Komponente eine zu vernachlässigende Änderung.

Für die Stromstärken J_1 und J_2, welche von den Wechselfeldern $(\overline{\mathfrak{E}}_z)_1$, $(\overline{\mathfrak{E}}_z)_2$ in den Leiterquerschnitten erregt werden, setzt man, ebenso wie in Nr. **10**, Gl. (41):

$$(49\text{a})\qquad \begin{cases}(\overline{\mathfrak{E}}_z)_1=R_1J_1+\frac{1}{c^2}L_{i1}\cdot\frac{\partial J_1}{\partial t}=J_1\left\{R_1+\frac{iv}{c^2}\cdot L_{i1}\right\},\\ (\overline{\mathfrak{E}}_z)_2=R_2J_2+\frac{1}{c^2}\cdot L_{i2}\frac{\partial J_2}{\partial t}=J_2\left\{R_2+\frac{iv}{c^2}\cdot L_{i2}\right\}.\end{cases}$$

So sind die effektiven Werte der Widerstände und der inneren Selbstinduktionen, für Schwingungen einer gegebenen Frequenz, durch Querschnittsform und Material der zylindrischen Leiter bestimmt.

Aus (49, 49a) im Verein mit (46a, b, d) erhält man

$$(49\text{b})\qquad -\frac{1}{c^2}L\frac{\partial J_1}{\partial t}=\frac{1}{K}\frac{\partial e_1}{\partial z}+RJ_1,$$

92) Vgl. *E. Cohn*, Das elektromagnetische Feld, p. 475 ff.

wo abkürzungsweise gesetzt ist

(49c) $$R = R_1 + R_2, \quad L = L_a + L_{i1} + L_{i2}.$$

Aus (49b) und der auch hier streng gültigen Gleichung (47a) folgt

(50) $$\frac{\partial^2 e_1}{\partial z^2} - \frac{LK}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 e_1}{\partial t^2} - RK \cdot \frac{\partial e_1}{\partial t} = 0.$$

Das ist die sogenannte „*Telegraphengleichung*“, welche die Fortpflanzung der Elektrizität längs der Leitung bestimmt. Es ist indessen zu beachten, daß R und L nur für eine gegebene Frequenz ν als Konstanten zu betrachten sind. Die Fortpflanzung solcher Schwingungen wird dargestellt durch $e_1 = C \cdot e^{i\nu t - iqz}$, wobei die komplexe Konstante q, und damit Geschwindigkeit und räumliche Dämpfung der Welle, sich bestimmt aus

(50a) $$q^2 = \frac{\nu^2}{c^2} \cdot LK - i\nu RK.$$

Was die Annahme (A) anbelangt, so trifft sie bei axial-symmetrischer Anordnung, z. B. für das Kabel, zu. Für Paralleldrähte jedoch gilt sie nur dann, wenn deren Abstand groß gegen ihren Querschnittsradius ist. Andererseits darf der Abstand der beiden Leiter nicht zu groß werden, sonst würde die Annahme (B) nicht mehr erfüllt sein, indem die longitudinalen Verschiebungsströme das Feld in der Querschnittsebene beeinflussen würden. In den meisten praktischen Fällen ist der Fehler, der durch Einführung der Annahmen (A) und (B) entsteht, nur gering, so daß die soeben skizzierte Theorie mit genügender Annäherung gilt[92]). Der Grad der Annäherung läßt sich natürlich nur für solche Fälle genau beurteilen, in denen man über eine exakte Lösung des Problems verfügt (vgl. Nr. 12).

12. Drahtwellen; strenge Theorie. a) *Einzeldraht.* Die elektromagnetischen Wellen, die an einem *einzelnen, geraden, unendlichen Drahte* von kreisförmigem Querschnitt entlang fortschreiten, sind von *J. J. Thomson*[93]) und besonders eingehend von *A. Sommerfeld*[94]) untersucht worden. Führt man in die Feldgleichungen (1, 2) den Formeln (37a) gemäß Zylinderkoordinaten (z, ϱ, ψ) ein, so ergeben sich, unter Annahme axialer Symmetrie, zwischen den Komponenten $\mathfrak{E}_z$, $\mathfrak{E}_\varrho$, $\mathfrak{H}_\psi$ die Verknüpfungsgleichungen

---

93) *J. J. Thomson,* Lond. Math. Soc. Proc. 17 (1886), p. 310.

94) *A. Sommerfeld,* Ann. d. Phys. 67 (1899), p. 233. Die in den folgenden Gleichungen (54) bis (55d) enthaltenen Folgerungen finden sich noch nicht in der zitierten Arbeit.

$$(51)\quad \begin{cases} \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} + \frac{\sigma}{c}\mathfrak{E}_z = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}(\varrho \mathfrak{H}_\psi), \\ \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_\varrho}{\partial t} + \frac{\sigma}{c}\mathfrak{E}_\varrho = -\frac{\partial \mathfrak{H}_\psi}{\partial z}, \\ -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_\psi}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \varrho}. \end{cases}$$

Dieselben werden erfüllt durch den Ansatz[94])

$$(51\text{a})\quad \begin{cases} \mathfrak{E}_z = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho \frac{\partial \Pi}{\partial \varrho}\right), \quad \mathfrak{E}_\varrho = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varrho \partial z}, \\ \mathfrak{H}_\psi = -\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t \partial \varrho} - \frac{\sigma}{c}\frac{\partial \Pi}{\partial \varrho}, \end{cases}$$

falls $\Pi(z, \varrho, t)$ der partiellen Differentialgleichung genügt

$$(51\text{b})\quad \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} + \frac{\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \Pi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho \frac{\partial \Pi}{\partial \varrho}\right).$$

Π ist eine *verallgemeinerte Hertzsche Funktion*, wie der Vergleich mit Nr. 4, insbesondere (19, 19a), lehrt. Die Gleichung der elektrischen Kraftlinien wird jeweils gegeben durch

$$(51\text{c})\quad Q(\varrho, z, t) = -\varrho\frac{\partial \Pi}{\partial \varrho} = \text{constans}.$$

Die im Innern des Drahtes geltenden Gleichungen erhält man unter Vernachlässigung des hypothetischen Verschiebungsstromes, indem man setzt

$$\mu = \mu_i, \quad \varepsilon = 0, \quad \text{für} \quad \varrho < b.$$

Im Außenraum dagegen, der von dem Dielektrikum erfüllt ist, gilt

$$\mu = \mu_a, \quad \sigma = 0 \quad \text{für} \quad \varrho > b.$$

An der Oberfläche des Drahtes gelten die Grenzbedingungen (5, 6); sie verlangen die Stetigkeit der tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$:

$$(51\text{d})\quad \mathfrak{E}_{zi} = \mathfrak{E}_{za}, \quad \mathfrak{H}_{\psi i} = \mathfrak{H}_{\psi a}, \quad \text{für} \quad \varrho = b.$$

Die Fortpflanzung einfach periodischer Schwingungen parallel der z-Achse wird dargestellt durch den Ansatz

$$(52)\quad \Pi = e^{i\nu t - iqz}\cdot u(\varrho);$$

q ist eine zu bestimmende, komplexe Konstante, von welcher Geschwindigkeit und räumliche Dämpfung der Wellen abhängen. Aus (51b) resultiert für u die Besselsche Differentialgleichung:

$$(52\text{a})\quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{du}{dx} + u = 0,$$

wobei die Unabhängige x die Bedeutungen hat:

(52b) $x = x_i = \varrho\sqrt{k_i^2 - q^2}, \quad k_i^2 = -\frac{i\nu\sigma\mu_i}{c^2}, \quad$ für $\varrho < b$,

(52c) $x = x_a = \varrho\sqrt{k_a^2 - q^2}, \quad k_a^2 = \frac{\nu^2\varepsilon\mu_a}{c^2}, \quad$ für $\varrho > b$.

Im Drahtinnern hat man für $u(\varrho)$ die auf der Drahtachse ($\varrho = 0$) endliche Besselsche Funktion erster Art zu setzen:

$$(52\text{d}) \qquad u = u_i = C \cdot J_0(x_i), \quad J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{ix\cos\alpha}\,d\alpha.$$

Im Außenraum dagegen sind Besselsche Funktionen zweiter Art anzuwenden:

$$(52\text{e}) \qquad u = u_a = D \cdot K_0(x_a),$$

$$(52\text{f}) \qquad K_0(x) = \frac{1}{i}\int_0^{i\infty} e^{ix\cos\alpha}\,d\alpha = \int_1^\infty \frac{e^{ix\xi}\,d\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}.$$

Dieser Ansatz genügt der Differentialgleichung (52a) und erfüllt die zu stellende Bedingung, daß in großer Entfernung von der Drahtachse der gesamte zur Drahtachse senkrechte Energiefluß verschwindet, wofern das in (52c) noch willkürliche Vorzeichen der Wurzel so gewählt wird, daß in der komplexen Größe

$$\sqrt{k_a^2 - q^2} = \alpha + \beta i, \quad \beta > 0$$

ist. Für große x wird

$$(52\text{g}) \qquad K_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \cdot e^{i\left(x + \frac{\pi}{4}\right)},$$

während für kleine Werte von x (unter Vernachl. von x^2 gegen 1) gilt

$$(52\text{h}) \qquad K_0(x) = \log\left(\frac{2\gamma i}{x}\right), \quad \gamma = 0{,}5615\cdots = \frac{1}{1{,}781}.$$

Aus (51a, b), in Verbindung mit (52, 52d, e), folgt für das *elektromagnetische Feld im Drahtinnern*:

$$(53) \qquad \left.\begin{cases} \mathfrak{E}_z = \quad C \cdot (k_i^2 - q^2) \cdot J_0(x_i) \cdot e^{i\nu t - iqz}, \\ \mathfrak{E}_\varrho = - C \cdot iq \cdot (k_i^2 - q^2)^{\frac{1}{2}} \cdot J_0'(x_i) \cdot e^{i\nu t - iqz}, \\ \mathfrak{H}_\psi = - C \cdot \frac{\sigma}{c}(k_i^2 - q^2)^{\frac{1}{2}} \cdot J_0'(x_i) \cdot e^{i\nu t - iqz}, \end{cases}\right\} \varrho < b.$$

Im *Außenraume* dagegen wird *das Feld* dargestellt durch

$$(53\text{a}) \qquad \left.\begin{cases} \mathfrak{E}_z = \quad D \cdot (k_a^2 - q^2) \cdot K_0(x_a) \cdot e^{i\nu t - iqz}, \\ \mathfrak{E}_\varrho = - D \cdot iq \cdot (k_a^2 - q^2)^{\frac{1}{2}} \cdot K_0'(x_a) \cdot e^{i\nu t - iqz}, \\ \mathfrak{H}_\psi = - D \cdot \frac{i\nu\varepsilon}{c} \cdot (k_a^2 - q^2)^{\frac{1}{2}} \cdot K_0'(x_a) \cdot e^{i\nu t - iqz}, \end{cases}\right\} \varrho > b.$$

Aus den Grenzbedingungen (51d) ergibt sich demgemäß, nach Elimination der Konstanten C und D:

$$(53\text{b})\qquad \frac{(k_i^2-q^2)}{\sigma}\cdot\left(\frac{J_0(x)}{x\,J_0'(x)}\right)_{x=b\sqrt{k_i^2-q^2}}=\frac{(k_a^2-q^2)}{i\nu\varepsilon}\cdot\left(\frac{K_0(x)}{x\,K_0'(x)}\right)_{x=b\sqrt{k_a^2-q^2}},$$

eine transzendente Gleichung, welche zur Berechnung der für die Fortpflanzung der Welle maßgebenden Konstanten q dient.

Es ist nicht ohne Interesse, die gegebene Lösung der Feldgleichungen den Ansätzen der beiden vorigen Abschnitte gegenüberzustellen. In Nr. **10** wurde nur das Drahtinnere betrachtet, und zwar unter Annahme eines von z unabhängigen Feldes. In dem hier behandelten allgemeineren Falle, wo die Komponenten mit z nach einer Exponentialfunktion variieren, ergibt (41):

$$(54)\qquad R+\frac{i\nu}{c^2}L_i=-\frac{(k_i^2-q^2)}{2\pi\sigma}\left(\frac{J_0(x)}{x\,J_0'(x)}\right)_{x=b\sqrt{k_i^2-q^2}}.$$

Wird hier q^2 gegen k_i^2 gestrichen — die numerische Berechnung erweist das in allen praktischen Fällen als zulässig — so geht (54), mit Rücksicht auf (52b), in (41a) über, so daß die letztgenannte Gleichung mit genügender Annäherung zur Berechnung von R und L_i dienen kann.

In Nr. **11**, wo wir die Drähte als vollkommen leitend betrachteten, mußten wir den Einzeldraht von der Behandlung ausschließen, weil die logarithmischen Potentiale, aus welchen dort das Feld abgeleitet wurde, im Unendlichen ein unzulässiges Verhalten der Komponenten ergeben würden. Die hier dargelegte Theorie beseitigt jene Schwierigkeit, indem sie die endliche Leitfähigkeit des Drahtes in Betracht zieht. Nur in der Nachbarschaft des Drahtes, wo für $K_0(x)$ die Näherungsformel (52h) gilt, reichen die logarithmischen Potentiale zur Darstellung des Feldes aus. In großer Entfernung von der Drahtachse dagegen ist die Formel (52g) zu verwenden, die ein ganz anderes Verhalten der Komponenten ergibt.

Wie im Anschluß an Gl. (48) bemerkt wurde, ist das Verschwinden der longitudinalen magnetischen Feldstärke die Bedingung für die Existenz eines elektrischen Potentiales Φ und einer magnetischen Stromfunktion Ψ in der Querschnittsebene. Diese Bedingung ist auch in dem hier diskutierten Falle erfüllt. In der Tat kann man, gemäß (51a), im Außenraume setzen:

$$(55)\qquad \mathfrak{E}_\varrho=-\frac{\partial\Phi}{\partial\varrho},\quad \mu_a\mathfrak{H}_\psi=-\frac{\partial\Psi}{\partial\varrho},$$

wofern man Φ und Ψ folgendermaßen aus der Funktion Π ableitet:

$$(55\text{a})\qquad \Phi=-\frac{\partial\Pi}{\partial z},\quad \Psi=\frac{\varepsilon\mu_a}{c}\frac{\partial\Pi}{\partial t}.$$

An der Drahtoberfläche wird, mit Rücksicht auf (52), (52e):

$$\text{(55b)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \Phi_1 &= D \cdot iq\, K_0(x)\, e^{i\nu t - iqz}, \\ \Psi_1 &= D \cdot \frac{i\nu\varepsilon\mu_a}{c} K_0(x)\, e^{i\nu t - iqz}, \end{aligned} \right\} x = b\sqrt{k_a^2 - q^2}.$$

Während die in Nr. **11** behandelten Fälle dadurch gekennzeichnet sind, daß die vom Drahte ausgehenden elektrischen Kraftlinien ganz in der Querschnittsebene verlaufen, und auf einem zweiten, parallelen Leiter endigen, spielt im Falle des Einzeldrahtes die longitudinale Komponente der Feldstärke eine wesentliche Rolle; die Verschiebungsströme, welche deren zeitliche Schwankungen begleiten, besorgen gewissermaßen die Rückleitung und ersetzen so den anderen Leitungsdraht. Die *„Spannung"* und den *„magnetischen Induktionsfluß"* kann man auch hier eindeutig definieren, indem man unter Spannung das Linienintegral der elektrischen Feldstärke versteht, erstreckt längs einer ganz in der Querschnittsebene verlaufenden Kurve, die auf der Drahtoberfläche beginnt und bis in unendliche Entfernung reicht, und andererseits den magnetischen Induktionsfluß durch eine Kurve derselben Art bestimmt. Aus (55) folgt, da Φ und Ψ im Unendlichen verschwinden, daß die in (55b) angegebenen Werte Φ_1, Ψ_1 Spannung und magnetischen Induktionsfluß des Einzeldrahtes darstellen. Definiert man weiter die *„Kapazität"* und die *„äußere Selbstinduktion"* durch

$$\text{(55c)} \qquad \Phi_1 = \frac{e_1}{K}, \quad \Psi_1 = \frac{1}{c} L_a J_1,$$

und berechnet die Ladung e_1 der Längeneinheit und den Gesamtstrom J_1 aus den in (53a) angegebenen Werten von $\mathfrak{E}_\varrho$ und $\mathfrak{H}_\psi$, so folgt

$$\text{(55d)} \qquad K = \frac{2\pi\varepsilon}{\zeta}, \quad L_a = \frac{\mu_a \zeta}{2\pi},$$

in Übereinstimmung mit der Relation (46), wobei unter ζ die komplexe Größe zu verstehen ist:

$$\text{(55e)} \qquad \zeta = -\left(\frac{K_0(x)}{x K_0'(x)}\right)_{x = b\sqrt{k_a^2 - q^2}}.$$

Führt man die so erhaltenen Werte von K und L_a, und die in (54) angegebenen von R und L_i in (50a) ein, so erhält man zur Bestimmung von q eine Gleichung, die mit (53b) identisch ist.

Um q aus dieser Gleichung zu ermitteln, macht man die nachträglich durch die numerische Berechnung zu rechtfertigende Annahme, daß

$$\text{(56)} \qquad \eta = -\frac{b^2(k_a^2 - q^2)}{4\gamma^2}$$

dem Betrage nach klein gegen 1 ist. Alsdann kann man zur Berechnung von ζ aus (55e) die Näherungsformel (52h) verwenden und erhält so:

$$\zeta = \log\left(\frac{2 i \gamma}{b \sqrt{k_a^2 - q^2}}\right) = -\frac{1}{2} \log \eta \tag{56a}$$

Vereinfacht man in entsprechender Weise die rechte Seite von (53b) und setzt links, was gleichfalls die nachträgliche numerische Auswertung rechtfertigt, q^2 klein gegen k_i^2, so folgt, mit Rücksicht auf (52), (52b), (52c):

$$\eta\,(-\log \eta) = \frac{b^2 k_a^2}{2 \gamma^2} \cdot \frac{\mu_i}{\mu_a} \left(\frac{J_0(x)}{x J_0'(x)}\right)_{x = k_i b} = m. \tag{57}$$

Die abkürzungsweise mit m bezeichnete rechte Seite dieser Gleichung ist als bekannt anzusehen. Die Auflösung geschieht durch eine Reihe sukzessiver Approximationen, die nach dem kettenbruch-ähnlichen Schema fortschreiten[94]):

$$\eta = \cfrac{m}{-\log \cfrac{m}{-\log \cfrac{m}{-\log \cfrac{m}{\ldots}}}} \tag{57a}$$

Die gute Konvergenz dieses Verfahrens ist durch die Kleinheit der Beträge des gegebenen m bzw. des erhaltenen η bedingt. Durch η bestimmen sich gemäß (55d) und (56a) K und L_a und andererseits aus (56) die komplexe Konstante q, welche Geschwindigkeit und räumliche Dämpfung der längs des Einzeldrahtes fortschreitenden Welle angibt. Es sind, ähnlich wie in Nr. **10**, zwei Grenzfälle zu unterscheiden, je nachdem das Argument von $J_0(x)$ in (57) groß oder klein ist. In dem ersten Falle, der starkem Skin-Effekt entspricht, ist die räumliche Dämpfung gering, die Geschwindigkeit ist nur wenig kleiner als die Lichtgeschwindigkeit. Im zweiten Falle dagegen, wo das Feld merklich in den Draht eindringt, ist die Dämpfung beträchtlicher, auch ist die Verzögerung der Welle durch den Draht größer[94]). In praxi liegt bei *Hertz*schen Schwingungen fast stets der erste Fall vor.

b) *Kabel und Paralleldrähte.* Wellen in *Kabeln* sind auf Grund der Feldgleichungen von *J. J. Thomson*[95]) untersucht worden. Der Isolator ist hier von zwei konzentrischen Kreiszylindern begrenzt, die ihn von dem inneren und äußeren Leiter trennen. In dem inneren Leiter kommen wiederum *Bessel*sche Funktionen erster Art zur Verwendung, in dem äußeren solche zweiter Art, während die Lösung

95) *J. J. Thomson*, London Roy. Soc. Proc. 46 (1889), p. 1; Rec. res., p. 262 ff.

in dem Isolator aus beiden Partikulärintegralen der *Bessel*schen Differentialgleichung sich zusammensetzt. Die vier an den Trennungsflächen geltenden Grenzbedingungen ergeben nach Elimination der drei Quotienten der eingehenden multiplikativen Konstanten eine transzendente Gleichung, aus der sich die für die Fortpflanzung der Welle maßgebende Konstante q bestimmt. In allen praktischen Fällen gibt die elementare Theorie (Nr. **11**) eine ausreichende Annäherung. Den Fall, wo der äußere Leiter des Kabels durch Luft ersetzt ist (also Draht mit dielektrischem Mantel in Luft) behandelt *F. Harms*[95a]); die Fortpflanzungsgeschwindigkeit hängt in eigentümlich sprungartiger Weise von der Dicke des Mantels ab.

Auf Wellen, die längs zweier *Paralleldrähte* von kreisförmigem Querschnitt fortschreiten, bezieht sich eine sehr ausführliche Untersuchung von *G. Mie*[96]). Er führt Bipolarkoordinaten in die Feldgleichungen ein und löst sie durch Reihen, die nach Produkten aus trigonometrischen Funktionen und *Bessel*schen Funktionen zweiter Art fortschreiten. Glücklicherweise lassen sich die zunächst recht verwickelten Formeln vereinfachen, wenn einer der beiden folgenden Fälle vorliegt:

A) $2a$ groß gegen b. ($2a$ Abstand der Drahtachsen, b Querschnittsradius.)

B) $|q^2 - k_a^2| \cdot 4a^2$ klein gegen 1.

Im Falle B), d. h. bei hinreichend kleinem Abstande der Drähte, kann man die longitudinale elektrische Komponente und damit den zur Leitung parallelen Verschiebungsstrom vernachlässigen. Es ist jedoch die durch die Anwesenheit des anderen Drahtes bedingte Störung der Symmetrie zu berücksichtigen; es zeigt sich, daß sie das Auftreten einer longitudinalen magnetischen Komponente und damit die Drahtachse umkreisender Leitungsströme und merkwürdiger Skin-Effekte im Gefolge hat[96]).

Im Falle A) dagegen kann das Feld in jedem der beiden Drähte als axial-symmetrisches gelten; es kommt hier zwar nicht die longitudinale magnetische, wohl aber die longitudinale elektrische Komponente in Betracht. Dieser Fall, den man auch direkt in Angriff nehmen kann[97]), ist demjenigen des Einzeldrahtes nahe verwandt. Spannung und Induktionsfluß der Leitung sind eindeutig zu definieren und finden sich, wenn die gegenüberliegenden Elemente der

95a) *F. Harms*, Ann. d. Phys. 23 (1907), p. 44.

96) *G. Mie*, Ann. d. Phys. 2 (1900), p. 201.

97) *W. B. Morton*, Phil. Mag. 50 (1900), p. 605. Derselbe Autor diskutiert den Verlauf der Kraftlinien: Phil. Mag. 4 (1902), p. 302.

beiden Paralleldrähte jeweils entgegengesetzt geladen sind, gleich:

$$(58)\quad \begin{cases} \Phi_1 - \Phi_2 = D \cdot 2\,iq\, e^{i\nu t - iqz} \cdot \{K_0(x_1) - K_0(x_2)\}, \\ \Psi_1 - \Psi_2 = D \cdot \frac{2\,i\nu\varepsilon\mu}{c}\, e^{i\nu t - iqz} \cdot \{K_0(x_1) - K_0(x_2)\}, \end{cases}$$

$$(58\text{a})\quad x_1 = b\sqrt{k_a^2 - q^2}, \quad x_2 = 2a\sqrt{k_a^2 - q^2}.$$

Man kann, wie bei dem Einzeldrahte, x_1^2 klein gegen 1 annehmen, im allgemeinen aber nicht x_2^2. Dementsprechend erhält man hier für K und L_a Ausdrücke von der Form (55d), wo aber für ζ statt des Wertes (56a) zu setzen ist:

$$(58\text{b})\quad \zeta = 2\left\{\log\left(\frac{2\,i\gamma}{b\sqrt{k_a^2 - q^2}}\right) - K_0\left(2a\sqrt{k_a^2 - q^2}\right)\right\}.$$

Im allgemeinen ist ζ komplex; daher sind es auch Kapazität und äußere Selbstinduktion der Leitung.

Gelten jedoch beide Bedingungen A) und B) gleichzeitig, so liegt der von der elementaren Theorie behandelte Fall vor (vgl. Nr. **11**, Annahme A) und B)). Dann ist auch auf $K_0(x_2)$ die Näherungsformel (52b) anzuwenden, so daß man erhält:

$$(58\text{c})\quad \zeta = 2\log\left(\frac{2a}{b}\right).$$

In diesem Falle ergeben sich aus (55d) für K und L_a reelle Werte, die auch als Grenzwerte aus (46c), (46f) abgeleitet werden können. Indem die Theorie von *Mie* die Bedingungen A) und B) voneinander trennt, gestattet sie es, den Grad der Näherung, welchen die elementare Theorie erreicht, nach jeder der beiden Richtungen hin genauer zu beurteilen.

Eine beliebige Anzahl (n) paralleler Drähte, welche in die Ecken eines regelmäßigen Polygons eingespannt sind, hat *W. B. Morton*[98]) untersucht für den Fall, daß die Abstände je zweier Drähte groß gegen die Querschnittsradien sind und dennoch der Bedingung B) genügen. Das ist der Fall der elementaren Theorie, wenn die Beziehung (451) erfüllt ist, d. h. wenn $\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$ ist. Dann ergeben sich für die Kapazitäts- und Selbstinduktionskoeffizienten reelle, von den geometrischen Abmessungen des Querschnittes der Leitung abhängige Werte, und durch diese ist q^2 explizit bestimmt. Ist jedoch jene Beziehung (451) nicht erfüllt, so kommt, ähnlich wie beim Einzeldraht, die Rückleitung durch die Verschiebungsströme in Betracht, und es ergibt sich für q eine transzendente Gleichung.

98) *W. B. Morton,* Phil. Mag. (6) 1 (1901), p. 563.

In allen Fällen[94])[96]), wo die dielektrische Rückleitung in Frage kommt, bestimmen sich K und L_a durch Gleichungen von der Form (55 d), wobei die komplexe Größe ζ zu schreiben ist:

$$\zeta = |\zeta| e^{\alpha i}, \quad \alpha > 0. \tag{59}$$

Das bedeutet, daß für einen bestimmten Leiterquerschnitt die Spannung der Ladung, der Induktionsfluß dem Strome der Phase nach etwas voreilt; der Phasenwinkel α ist meist klein; nur dann, wenn α null und daher ζ reell wird, liegt der Fall der elementaren Theorie (Nr. **11**) vor. Es entsteht nun die Frage, ob und wie die komplexen Größen K und L_a mit der elektrischen und der magnetischen Energie der Welle zusammenhängen. Definiert man die *„effektive Kapazität"* K' und die *„effektive äußere Selbstinduktion"* L_a' durch

$$\overline{U} = \frac{\overline{|e_1^2|}}{2K'}, \quad \overline{T} = \frac{1}{2c^2} L_a' \overline{|J_1^2|}, \tag{59a}$$

[die horizontalen Striche deuten die Mittelwertsbildung über die Zeit einer Schwingung an. Elektrische Energie U und magnetische Energie T sind auf die Längeneinheit der Leitung zu beziehen], so gilt es, diese reellen Größen mit den komplexen Ausdrücken von K und L_a in Verbindung zu bringen. Zur Lösung dieser Aufgabe zieht *M. Abraham*[99]) einen Satz heran, welcher dem *Poynting*schen Satze in gewisser Weise verwandt ist. Der *Poynting*sche Satz ergibt bei Mittelwertsbildung über eine ganze Schwingung und bei Integration über eine geschlossene Fläche (Flächenelement $d\sigma$, äußere Normale n):

$$\int \overline{\mathfrak{S}}_n d\sigma = \overline{Q}, \quad \mathfrak{S} = c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]. \tag{59b}$$

Der erwähnte Satz jedoch, der sich ebenfalls aus den Feldgleichungen und Grenzbedingungen (Nr. **1**) ergibt, besagt:

$$\tfrac{1}{2}\int \overline{\mathfrak{T}}_n d\sigma = \overline{T} - \overline{U}, \quad \mathfrak{T} = [\mathfrak{A}\mathfrak{H}]. \tag{59c}$$

Dabei stellt der Vektor $\mathfrak{A}$ eine Art Vektorpotential dar, aus dem sich die Feldstärken des Wechselfeldes folgendermaßen ableiten:

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}, \quad \mu\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}. \tag{59d}$$

Der Satz (59 c) gilt für eine beliebige geschlossene Fläche, welche beliebige homogene isotrope Körper, Leiter, Halbleiter oder Isolatoren, einschließt; dieselben können mit irgend welchen Trennungsflächen aneinander grenzen.

Auf das Drahtinnere angewandt, ergibt der *Poynting*sche Satz (59 b) den Zusammenhang des effektiven Widerstandes R mit der *Joule*schen

---

99) *M. Abraham,* Ann. d. Phys. 6 (1901), p. 217.

Wärme (vgl. Nr. **10**). In ähnlicher Weise folgt aus (59c), daß die effektive Selbstinduktion L_i des Drahtinnern in der Tat die magnetische Energie des Drahtinnern bestimmt.

Beide Sätze gemeinsam, auf den Isolator angewandt, bestimmen die durch (59a) definierten Größen K und L_a folgendermaßen[99]):

$$(60)\qquad \begin{cases} L_a' = |L_a| \cdot (1 - \beta), \\ \frac{1}{K'} = \frac{1}{|K|} \cdot (1 - \beta). \end{cases}$$

Dabei ist β ein kleiner Winkel, der mit dem Phasenwinkel α von ζ (vgl. (59)) verknüpft ist durch

$$(60\text{a})\qquad \beta = \alpha \frac{v L_i}{c^2 R}.$$

Bei starkem Skin-Effekt, wo in (41a) für $J_0(x)$ sein asymptotischer Wert zu setzen ist, wird $R = v L_i / c^2$, daher $\beta = \alpha$. Dann und nur dann, wenn α gleich null, d. h. wenn K und L_a reell sind, sind sie mit den für die Energie maßgebenden Größen K' und L_a' identisch.

Selbstverständlich ist der Gültigkeitsbereich der Relationen (60) durch die Bedingung eingeschränkt, daß in der Querschnittsebene ein elektrisches Potential und eine magnetische Stromfunktion existieren müssen, da anderenfalls K und L_a nicht definiert wären.

Die vorstehenden Entwicklungen beruhen selbstverständlich auf der Voraussetzung, daß außer den zur Stromleitung verwandten Drähten sich keine Leiter im Felde befinden; in der Nähe befindliche Leiter würden das Feld wesentlich verändern. Ein hierauf bezügliches Problem hat *T. Levi-Civita*[100]) behandelt: längs eines Drahtes, dem parallel ein ebener, dünner, leitender Schirm aufgestellt ist, pflanzt sich eine elektromagnetische Welle fort; es gelingt auf Grund der erhaltenen Formeln, für diesen Fall den Einfluß des Schirmes auf das elektrische und magnetische Feld zu diskutieren.

13. Reflexion am Ende der Leitung. Wir setzen fest, daß die — etwa aus zwei Paralleldrähten bestehende — Leitung sich von der Ebene ($z = 0$) aus nach der Seite der negativen z hin erstrecken soll. Unter Vernachlässigung des Widerstandes und der inneren Selbstinduktion der Leitungsdrähte ist die Geschwindigkeit der Drahtwellen:

$$(61)\qquad w = \frac{c}{\sqrt{KL}}.$$

Zwischen Spannung V' und Strom J' besteht für die einfallende Welle der elementaren Theorie zufolge (Gl. (45k), (46b)) der Zu-

100) *T. Levi-Civita,* Acc. Linc Rend. XI¹ (1902), p. 163, 191, 228.

sammenhang:

(61a) $$J' = we' = wKV';$$

für die am Ende ($z = 0$) reflektierte und nun nach der Seite der negativen z hin fortschreitende Welle hingegen sind Strom J'' und Spannung V'' verknüpft durch

(61b) $$J'' = -we'' = -wKV''.$$

Die Aufgabe, aus den am Ende der Leitung vorgeschriebenen Bedingungen, welche sich auf den resultierenden Strom:

(61c) $$J_0 = J' + J'' = wK(V' - V'')$$

und die resultierende Spannung:

(61d) $$V_0 = V' + V''$$

beziehen, die Amplitude und Phase der reflektierten Welle zu ermitteln, ist in umfassendster Weise von *O. Heaviside*[86]) behandelt worden, und zwar vom Standpunkte der elementaren Theorie aus. Wir unterscheiden drei Fälle:

A) *Kondensator von der Kapazität* K_0 *am Ende.* Man hat für $z = 0$ die Bedingung:

(62) $$J_0 = K_0 \frac{dV_0}{dt} = i\nu K_0 V_0.$$

Hieraus, in Verbindung mit den Gleichungen (61a) bis (61d), folgt:

(62a) $$\frac{V' - V''}{V' + V''} = i \cdot \operatorname{tg} \gamma, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\nu K_0}{wK} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{K_0}{K},$$

und daher:

(62b) $$\frac{V''}{V'} = e^{-2\gamma i}.$$

Es wird demnach die Welle am Ende der Leitung ohne Amplitudenverlust, aber mit einer Phasenverzögerung 2γ reflektiert. Die gleiche Phasenverzögerung erhält man, wenn man sich die Endkapazität beseitigt denkt und sich statt dessen vorstellt, daß die Welle eine weitere Strecke der Leitung von der Länge $\gamma\lambda/2\pi$ in Hinweg und Rückweg durchlaufen hätte, ohne an dem offenen Ende einen Phasenverlust zu erleiden. Bei $z = \gamma\lambda/2\pi$ ist dann ein Stromknoten zu denken; liegt bei $z = -l$ ein Spannungsknoten, so hat man:

$$l + \gamma \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{4} + k\frac{\lambda}{2} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Hieraus ergibt sich, mit Rücksicht auf (62a), für

(62c) $$x = \frac{2\pi l}{\lambda}$$

die transzendente Gleichung:

(62d) $$x \operatorname{tg} x = \frac{Kl}{K_0}.$$

Rechts steht hier der Quotient aus der Kapazität Kl der Leitung (von der Länge l) und der Endkapazität K_0. Man kann aus (62c), (62d) bei gegebener Wellenlänge λ die Lage der Spannungsknoten ermitteln[101]). Man kann jene Gleichungen aber auch verwenden, wenn man die Eigenschwingungen eines Systems berechnen will, bestehend aus einem Kondensator und zwei parallelen Drähten von der Länge l, die einerseits in den Kondensator münden, andererseits durch eine kurze Brücke leitend miteinander verbunden sind. Die Gleichung (62d) stimmt dann mit derjenigen überein, auf welche die *Kirchhoff*sche Theorie der Kondensatorentladung[3]) führt (vgl. Nr. 3).

B) *Widerstand R_0 am Ende.* Sind die Drähte am Ende durch eine induktionsfreie Brücke vom Widerstand R_0 verbunden, so gilt bei $z = 0$ die Bedingung:

$$V_0 = R_0 J_0. \tag{63}$$

Hieraus, in Verbindung mit den Gleichungen (61a) bis (61d), folgt:

$$\frac{V''}{V'} = \frac{wKR_0 - 1}{wKR_1 + 1}. \tag{63a}$$

Es findet demnach eine Amplitudenverringerung der Welle bei der Reflexion statt. Die Spannung wird am Ende mit gleicher oder mit entgegengesetzter Phase reflektiert, je nachdem $R \gtrless 1/wK$ ist. Im Grenzfalle $R_0 = 1/wK$ wird die einfallende Welle durch den Endwiderstand vollständig absorbiert, so daß sich überhaupt keine rücklaufende Welle ausbildet.

C) *Selbstinduktion L_0 am Ende.* Sind die beiden Drähte der Leitung am Ende durch eine widerstandsfreie Selbstinduktion L_0 überbrückt, so gilt bei $z = 0$ die Bedingung:

$$V_0 = \frac{1}{c^2} L_0 \frac{dJ_0}{dt} = \frac{i\nu}{c^2} L_0 J_0. \tag{64}$$

Hieraus, in Verbindung mit (61a) bis (61d), folgt:

$$\frac{V' - V''}{V' + V''} = -i \operatorname{tg}\gamma, \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{c^2}{\nu w K L_0}. \tag{64a}$$

Berücksichtigt man (61) und die Beziehung

$$\lambda = w \frac{2\pi}{\nu},$$

so wird

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{L}{L_0}. \tag{64b}$$

---

101) *E. Cohn* und *F. Heerwagen,* Ann. d. Phys. 43 (1891), p. 343. Es wird in dieser Arbeit auch berücksichtigt, daß der statische Wert der Kapazität K_0 eines ebenen Kondensators bei schnellen Schwingungen zu korrigieren ist.

Somit folgt aus (64a):

$$(64c) \qquad \frac{V''}{V'} = e^{2\gamma i}.$$

Es wird demnach die Spannungswelle am Ende der Leitung mit einer Phasenvoreilung 2γ reflektiert. Eine Brücke mit Selbstinduktion ist äquivalent einer Verkürzung der Leitung[102]), und zwar um die Strecke $\gamma \lambda / 2\pi$.

Die Eigenschwingungen eines Systems, bestehend aus zwei Paralleldrähten von der Länge l, die einerseits durch die Selbstinduktion L_0, andererseits durch eine kurze Brücke von verschwindender Selbstinduktion verbunden sind, bestimmen sich ähnlich, wie im Falle A). Für die in (62c) definierte Größe x, und somit für die Wellenlängen der Eigenschwingungen, erhält man die transzendente Gleichung:

$$(64d) \qquad x \operatorname{tg} x = \frac{lL}{L_0},$$

deren rechte Seite der Quotient aus der Selbstinduktion der Leitung und derjenigen des Endes ist.

Eine strenge, auf den Feldgleichungen beruhende Theorie von den Vorgängen am Ende einer Leitung zu geben, ist sehr schwierig; nicht einmal für den Fall eines einzelnen Drahtes von kreisförmigem konstanten Querschnitt ist dieses Problem gelöst. Für einen Leiter, dessen Querschnitt nach dem freien Ende hin wie derjenige eines gestreckten Rotationsparaboloides abnimmt, hat *M. Abraham*[103]) versucht, die stehenden Wellen zu behandeln, welche sich in der Nähe des freien Endes ausbilden. Die Vorgänge stehen in einer gewissen Analogie zu den Luftschwingungen am offenen Ende einer Röhre, mit dem Unterschiede jedoch, daß die Strahlung nicht, wie dort, vom Ende aus, sondern von allen Elementen der Leitung aus seitlich in den Raum gesandt wird.

---

102) *P. Drude*, Ann. d. Phys. 60 (1897), p. 1.

103) *M. Abraham*, Ann. d. Phys. 2 (1900), p. 32.

(**Abgeschlossen im Juli 1906; spätere Literatur konnte nur teilweise berücksichtigt werden.**)

V 19. RELATIVITÄTSTHEORIE.*)

Von

W. PAULI jr.

In München.

Inhaltsübersicht.

I. Grundlage der speziellen Relativitätstheorie.

1. Historisches (*Lorentz, Poincaré, Einstein*).
2. Das Relativitätspostulat.
3. Das Postulat von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Die Theorie von Ritz und verwandte Theorien.
4. Relativität der Gleichzeitigkeit. Ableitung der Lorentz-Transformation aus den beiden Postulaten.
5. Lorentz-Kontraktion und Zeitdilatation.
6. *Einsteins* Additionstheorem der Geschwindigkeiten und seine Anwendung auf Aberration und Mitführungskoeffizient. Dopplereffekt.

II. Mathematische Hilfsmittel.

7. Die vierdimensionale Raum-Zeitwelt (*Minkowski*).
8. Übergang zu allgemeineren Transformationsgruppen.
9. Tensorrechnung bei affinen Koordinatentransformationen.
10. Die geometrische Bedeutung der kontra- und kovarianten Komponenten eines Vektors.
11. Flächen- und Raumtensoren. Vierdimensionales Volumen.
12. Duale Ergänzung zu Flächen- und Raumtensoren.
13. Übergang zur allgemeinen Geometrie *Riemanns*.
14. Begriff der Parallelverschiebung eines Vektors.
15. Geodätische Linien.
16. Raumkrümmung.
17. *Riemanns* Normalkoordinaten und ihre Anwendungen.
18. Die Spezialfälle der euklidischen Geometrie und der konstanten Krümmung.
19. Die Integralsätze von *Gauß* und *Stokes* im vierdimensionalen Riemannschen Raum.
20. Herleitung von invarianten Differentialoperationen mit Benutzung der geodätischen Komponenten.
21. Affintensoren und freie Vektoren.
22. Realitätsverhältnisse.
23. Infinitesimale Koordinatentransformation und Variationssätze.

---

*) Ich möchte auch an dieser Stelle Herrn Geheimrat *Klein* für das große Interesse, das er diesem Referat entgegengebracht hat, seine tatkräftige Hilfe bei der Durchsicht der Korrektur und seine vielen wertvollen Ratschläge meinen wärmsten Dank aussprechen. Auch Herrn *Bessel-Hagen* bin ich für sorgfältige Durchsicht eines Teiles der Korrekturbogen zu Dank verpflichtet.

III. Weiterer Ausbau der speziellen Relativitätstheorie.

a) Kinematik.

24. Vierdimensionale Darstellung der Lorentz-Transformation.
25. Das Additionstheorem der Geschwindigkeiten.
26. Transformation der Beschleunigung. Hyperbelbewegung.

b) Elektrodynamik.

27. Invarianz der Ladung. Viererstrom.
28. Die Kovarianz der Grundgleichungen der Elektronentheorie.
29. Ponderomotorische Kraft und Dynamik des Elektrons.
30. Impuls und Energie des elektromagnetischen Feldes. Differential- und Integralform der Erhaltungssätze.
31. Das invariante Wirkungsprinzip der Elektrodynamik.
32. Anwendungen auf spezielle Fälle.
 α) Die Integration der Potentialgleichungen.
 β) Das Feld der gleichförmig bewegten Punktladung.
 γ) Das Feld der Hyperbelbewegung.
 δ) Invarianz der Lichtphase. Reflexion am bewegten Spiegel. Strahlungsdruck.
 ε) Das Strahlungsfeld eines bewegten Dipols.
 ζ) Die Reaktionskraft der Strahlung.
33. *Minkowskis* phänomenologische Elektrodynamik bewegter Körper.
34. Elektronentheoretische Ableitungen.
35. Impuls-Energietensor und ponderomotorische Kraft der phänomenologischen Elektrodynamik. Joulesche Wärme.
36. Anwendungen der Theorie.
 α) Die Versuche von *Rowland, Röntgen, Eichenwald* und *Wilson*.
 β) Widerstand und Induktion in bewegten Leitern.
 γ) Die Ausbreitung des Lichtes in bewegten Medien. Mitführungskoeffizient. Versuch von *Airy*.
 δ) Signalgeschwindigkeit und Phasengeschwindigkeit in dispergierenden Medien.

c) Mechanik und allgemeine Dynamik.

37. Die Bewegungsgleichungen. Impuls und kinetische Energie.
38. Von der Elektrodynamik unabhängige Begründung der relativistischen Mechanik.
39. Das Hamiltonsche Prinzip der relativistischen Mechanik.
40. Generalisierte Koordinaten. Kanonische Form der Bewegungsgleichungen.
41. Die Trägheit der Energie.
42. Allgemeine Dynamik.
43. Transformation von Energie und Bewegungsgröße eines Systems bei Vorhandensein von äußeren Kräften.
44. Anwendung auf spezielle Fälle. Versuch von *Trouton* und *Noble*.
45. Hydrodynamik und Elastizitätstheorie.

d) Thermodynamik und Statistik.

46. Das Verhalten der thermodynamischen Zustandsgrößen bei einer Lorentz-Transformation.
47. Prinzip der kleinsten Wirkung.

48. Die Anwendung der relativistischen Mechanik auf die Statistik.
49. Spezialfälle.
α) Die Strahlung im bewegten Hohlraum.
β) Das ideale Gas.

IV. Allgemeine Relativitätstheorie.

50. Historisches bis zu *Einsteins* Arbeit von 1916.
51. Allgemeine Formulierung des Äquivalenzprinzips. Zusammenhang zwischen Gravitation und Metrik.
52. Das Postulat der allgemeinen Kovarianz der Naturgesetze.
53. Einfache Folgerungen aus dem Äquivalenzprinzip.
a) Die Bewegungsgleichungen des Massenpunktes bei langsamen Geschwindigkeiten und schwachen Gravitationsfeldern.
b) Die Rotverschiebung der Spektrallinien.
c) *Fermats* Prinzip der kürzesten Lichtzeit in statischen Gravitationsfeldern.
54. Der Einfluß des Schwerefeldes auf materielle Vorgänge.
55. Die Wirkungsprinzipien für materielle Vorgänge bei Vorhandensein von Gravitationsfeldern.
56. Die Feldgleichungen der Gravitation.
57. Herleitung der Gravitationsgleichungen aus einem Variationsprinzip.
58. Vergleich mit der Erfahrung.
a) *Newtons* Theorie als erste Näherung.
b) Strenge Lösung für das Gravitationsfeld eines Massenpunktes.
c) Perihelbewegung des Merkur und Krümmung der Lichtstrahlen.
59. Andere spezielle, strenge Lösungen im statischen Fall.
60. *Einsteins* allgemeine Näherungslösung und ihre Anwendungen.
61. Die Energie des Gravitationsfeldes.
62. Modifikation der Feldgleichungen. Relativität der Trägheit und räumlich-geschlossene Welt.
a) Das *Mach*sche Prinzip.
b) Betrachtungen über das statistische Gleichgewicht des Fixsternsystems. Das λ-Glied.
c) Die Energie der geschlossenen Welt.

V. Theorien über die Natur der elektrischen Elementarteilchen.

63. Elektron und spezielle Relativitätstheorie.
64. Die Theorie von *Mie.*
65. Die Theorie von *Weyl.*
a) Reine Infinitesimalgeometrie. Eichinvarianz.
b) Elektromagnetisches Feld und Weltmetrik.
c) Der Tensorkalkül in *Weyls* Geometrie.
d) Feldgesetze und Wirkungsprinzip. Physikalische Folgerungen.
66. Die Theorie von *Einstein.*
67. Allgemeines über den gegenwärtigen Stand des Problems der Materie.

Literatur.

1. Grundlegende Schriften.

E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt, Leipzig 1883.

B. Riemann, Über die Hypothesen, die der Geometrie zugrunde liegen. Neu herausgegeben und erläutert von *H. Weyl*, Berlin 1920 [abgedruckt aus Gött. Nachr. 13 (1868), p. 133].

Lorentz-Einstein-Minkowski, Das Relativitätsprinzip. Eine Sammlung von Abhandlungen, Leipzig 1913, 3. erweiterte Aufl. 1920.

H. Minkowski, Zwei Abhandlungen über die Grundgleichungen der Elektrodynamik, Leipzig 1910 [erste Abhandl. abgedruckt aus Gött. Nachr. 1908, p. 53; zweite Abhandl. abgedruckt aus Math. Ann. 68 (1910), p. 526].

A. Einstein und *M. Großmann*, Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation, Leipzig 1913 [abgedruckt aus der Ztschr. Math. Phys. 63 (1914), p. 215].

A. Einstein, Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie, Leipzig 1916 [abgedruckt aus Ann. d. Phys. 49 (1916), p. 769].

2. Lehrbücher.

M. v. Laue, Das Relativitätsprinzip, Leipzig 1911; 3. Aufl. 1919, 1. Band, Das Relativitätsprinzip der Lorentz-Transformation; 4. Aufl. 1921.

H. Weyl, Raum — Zeit — Materie, Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie, Berlin 1918; 3. Aufl 1920, 4. Aufl. 1921 (zitiert nach der 1. und 3. Aufl.).

A. S. Eddington, Space, Time and Gravitation. Cambridge 1920.

A. Kopff, Grundzüge der Einsteinschen Relativitätstheorie, Leipzig 1921.

E. Freundlich, Die Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie, Berlin 1916.

A. Einstein, Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie (gemeinverständlich), Braunschweig 1917.

M. Born, Die Relativitätstheorie Einsteins und ihre physikalischen Grundlagen (gemeinverständlich dargestellt), Berlin 1920.

3. Schriften, besondere Fragen betreffend.

H. Poincaré, Sechs Vorträge gehalten zu Göttingen vom 22.—28. April 1909; 6. Vortrag: La mécanique nouvelle, Leipzig 1910.

P. Ehrenfest, Zur Krise der Lichtäther-Hypothese. Rede, gehalten beim Antritt des Lehramts an der Reichs-Universität zu Leiden, Berlin 1913.

H. A. Lorentz, Das Relativitätsprinzip, drei Vorlesungen gehalten in Teylers Stiftung zu Haarlem, Leipzig 1914.

A. Einstein, Äther und Relativitätstheorie. Rede, gehalten am 5. Mai 1920 an der Reichs-Universität zu Leiden, Berlin 1920.

F. Klein, Gesammelte mathematische Abhandlungen, 1. Band, herausgegeben von *R. Fricke* und *A. Ostrowski*, Berlin 1921 (insbesondere das Kap. Zum Erlanger Programm [1872]).

A. Brill, Das Relativitätsprinzip, Leipzig 1912; 4. Aufl. 1920.

E. Cohn, Physikalisches über Raum und Zeit, Leipzig 1913.

H. Witte, Raum und Zeit im Lichte der neueren Physik, Braunschweig 1914; 3. Aufl. 1920.

4. Schriften philosophischen Inhalts.

M. Schlick, Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik, zur Einführung in das Verständnis der allgemeinen Relativitätstheorie, Berlin 1917; 3. Aufl. 1920.
H. Holst, Vort fysiske Verdensbillede og Einsteins Relativitetstheori, Kopenhagen 1920.
H. Reichenbach, Relativitätstheorie und Erkenntnis a priori, Berlin 1920.
E. Cassirer, Zur Einsteinschen Relativitätstheorie, Berlin 1921.
J. Petzold, Die Stellung der Relativitätstheorie in der geistigen Entwicklung der Menschheit, Dresden 1921.

Eine Ergänzung zu vorliegendem Artikel bilden nach der astronomischen Seite der Artikel *F. Kottler,* Gravitation und Relativitätstheorie (Beitrag zum Artikel VI 2, 22 von *S. Oppenheim*) und nach der mathematischen Seite die Artikel von *R. Weitzenböck,* Neuere Arbeiten über algebraische Invariantentheorie, Differentialinvarianten und *L. Berwald,* Differentialinvarianten der Geometrie (mit besonderer Berücksichtigung der mehrdimensionalen Mannigfaltigkeiten), Bd. III 4 dieser Encyklopädie.

I. Grundlagen der speziellen Relativitätstheorie.

1. Historisches (Lorentz, Poincaré, Einstein). Die Umwandlung der physikalischen Begriffe, welche die Relativitätstheorie bewirkt hat, war seit langer Zeit vorbereitet. Bereits im Jahre 1887 bemerkte *Voigt*[1]) in einer Arbeit, die noch auf dem Standpunkt der elastischen Lichttheorie steht, daß es mathematisch bequem ist, in einem bewegten Bezugssystem eine Ortszeit t' einzuführen, deren Anfangspunkt eine lineare Funktion der räumlichen Koordinaten ist, während jedoch die Zeiteinheit als unveränderlich angenommen wird. Man kann nämlich auf diese Weise erreichen, daß die Wellengleichung

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$$

auch im bewegten System gültig bleibt. Diese Bemerkung blieb jedoch vollständig unbeachtet, und erst in den grundlegenden Arbeiten, die *H. A. Lorentz*[2]) 1892 und 1895 veröffentlichte, tritt eine derartige Transformation wieder auf. Zu der formalen Erkenntnis, daß die Einführung einer Ortszeit t' im bewegten System mathematisch bequem ist, kamen hier wesentlich physikalische Ergebnisse hinzu. Es wurde der Nachweis erbracht, daß bei Berücksichtigung der Bewegungen der in den Äther eingelagerten Elektronen alle Effekte 1. Ordnung in

1) *W. Voigt,* Über das Dopplersche Prinzip, Gött. Nachr. 1887, p. 41. Man erhält die *Voigt*schen Formeln, wenn man in den weiter unten angeschriebenen Gleichungen (1) $\varkappa = \sqrt{1-\beta^2}$ setzt.

2) *H. A. Lorentz,* La théorie éléctromagnetique de Maxwell et son application aux corps mouvants, Arch. Néerl. 25 (1892), p. 363; Versuch einer Theorie der elektrischen und magnetischen Erscheinungen in bewegten Körpern, Leiden 1895.

dem Quotienten $\frac{v}{c}$ aus Translationsgeschwindigkeit der Materie und Lichtgeschwindigkeit, welche die Beobachtungen kennen gelehrt hatten, quantitativ theoretisch erklärt werden können. Insbesondere ergab die Theorie eine Erklärung dafür, daß eine *gemeinsame* Geschwindigkeit von Materie und Beobachter gegen den Äther, was die Größen 1. Ordnung anlangt, auf die Erscheinungen keinen Einfluß hat.[3])

Das negative Ergebnis des *Michelson*schen Interferenzversuches[4]), bei dem es sich um einen Effekt *zweiter* Ordnung in $\frac{v}{c}$ handelt, machte jedoch der Theorie große Schwierigkeiten. Um diese zu beseitigen, verfielen *Lorentz*[5]) und unabhängig von ihm *Fitzgerald* auf die Hypothese, daß alle Körper bei einer Translationsbewegung mit der Geschwindigkeit v ihre Dimensionen verändern. Und zwar müßte die Veränderung der Längsdimensionen durch den Faktor $\varkappa\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ bestimmt sein, wenn $\varkappa$ die Veränderung der Querdimensionen angibt; $\varkappa$ selbst bleibt unbestimmt. Zur Begründung dieser Hypothese führt *Lorentz* an, daß es sehr wohl möglich sei, daß die Molekularkräfte bei der Translationsbewegung geändert würden. Nehme man überdies an, daß die Moleküle in Gleichgewichtslagen ruhen und rein elektrostatisch aufeinander wirken, so folge aus der Theorie von selbst, daß im bewegten System Gleichgewicht vorhanden sei, wenn alle Abstände in der Translationsrichtung sich bei ungeänderten Querdimensionen um $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ verkürzen. Nun galt es, diese „Lorentz-Kontraktion" orga-

---

3) Das von *Fizeau* gefundene, sowohl dem Relativitätsprinzip als auch der Theorie von *Lorentz* widersprechende Resultat bezüglich der Beeinflussung der Azimutänderung der Polarisationsebene des Lichtes beim schiefen Durchgang durch eine Glasplatte durch die Erdbewegung wurde hernach von *D. B. Brace* [Phil. Mag. 10 (1908), p. 591] und *B. Straßer* [Ann. d. Phys. 24 (1907), p. 137] als irrtümlich nachgewiesen. — Ferner ist zu erwähnen, daß die Theorie von *Lorentz* die Möglichkeit offen ließ, mit Hilfe der Gravitation auch Effekte erster Ordnung des „Ätherwindes" zu konstatieren. So müßte, wie *Maxwell* bemerkt hat, die Translation des Sonnensystems gegen den Äther eine Ungleichheit von erster Ordnung in den Verfinsterungszeiten der Jupitermonde zur Folge haben; *C. V. Burton* [Phil. Mag. 19 (1910), p. 417; vgl. auch *H. A. Lorentz,* Das Relativitätsprinzip, 3 Haarlemer Vorträge, Leipzig 1914, p. 21] fand jedoch die zu gewärtigenden Fehlerquellen ebenso groß wie den zu erwartenden Effekt, so daß die Beobachtungen der Jupitermonde zur Entscheidung für oder gegen die alte Äthertheorie nicht herangezogen werden können.

4) Eine Beschreibung desselben gibt *H. A. Lorentz* im Artikel V 14 dieser Encyklopädie.

5) *H. A. Lorentz,* De relative beweging van de aarde en dem aether, Amst. Versl. 1 (1892), p. 74.

nisch in die Theorie einzuarbeiten und auch die anderen negativen Versuche[6]), einen Einfluß der Erdbewegung auf die Erscheinungen festzustellen, zu deuten. Da ist zunächst *Larmor* zu nennen, der bereits 1900 die heute allgemein als Lorentz-Transformation bekannten Formeln aufgestellt, also auch die Veränderung des Zeitmaßstabes bei der Bewegung ins Auge gefaßt hat.[7]) *Lorentz'* zusammenfassender Artikel[8]), der Ende 1903 abgeschlossen wurde, brachte einige kurze Andeutungen, die sich hernach als sehr fruchtbar erwiesen. Er vermutet, daß bei Übertragung der Veränderlichkeit der Masse von der elektromagnetischen auf alle ponderablen Massen die Theorie darüber werde Rechenschaft geben können, daß auch bei Vorhandensein der Molekularbewegung die Translation keine anderen Folgen hat als die erwähnte Kontraktion. Hiermit wäre auch der Versuch von *Trouton* und *Noble* erklärt. Nebenbei wird die bedeutungsvolle Frage aufgeworfen, ob vielleicht auch die Dimensionen der Elektronen durch die Translation geändert werden[9]). Doch stellt sich *Lorentz* in der Einleitung zu seinem Artikel noch prinzipiell auf den Standpunkt, daß die Erscheinungen nicht nur von der relativen Bewegung der betrachteten Körper, sondern auch von der Bewegung zum Äther abhängen[9a]).

Wir kommen nun zur Besprechung der drei Arbeiten von *Lorentz*[10]), *Poincaré*[11]) und *Einstein*[12]), welche diejenigen Überlegungen und Entwicklungen enthalten, die den Grundstock der Relativitätstheorie bilden. Zeitlich voran geht die Arbeit von *Lorentz.* Es wird vor allem der Nachweis erbracht, daß die *Maxwell*schen Gleichungen gegenüber der Koordinatentransformation

$$(1)\quad x' = \varkappa\frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad y' = \varkappa y,\quad z' = \varkappa z,\quad t' = \varkappa\frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\left(\beta = \frac{v}{c}\right)^{13)}$$

6) *F. T. Trouton* u. *H. R. Noble,* London Phil. Trans. A 202 (1903), p. 165; Lord *Rayleigh,* Phil. Mag. 4 (1902), p. 678.

7) *J. J. Larmor,* aether and matter, Cambridge 1900, p. 167—177.

8) Artikel V 14 dieser Encyklopädie, Schlußabsatz Nr. 64 und 65.

9) l. c. Anm. 8), p. 278.

9a) l. c. p. 154.

10) *H. A. Lorentz,* Amst. Proc. 6 (1904), p. 809 [Versl. 12 (1904), p. 986]: Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light.

11) *H. Poincaré,* Paris C. R. 140 (1905), p. 1504, Rend. Pal. 21 (1906), p. 129 sur la dynamique de l'éléctron.

12) *A. Einstein,* Ann. d. Phys. 17 (1905), p. 891: Zur Elektrodynamik bewegter Körper.

13) Um aus den Formeln bei *Larmor* und *Lorentz* (1) zu erhalten, muß man in jenen noch x durch $x - vt$ ersetzen, weil dort zuerst der gewöhnliche Übergang zum bewegten System gemacht wird.

invariant sind, sofern man gleichzeitig die Feldstärken im gestrichenen System passend wählt. Dies wird jedoch nur für die Gleichungen im ladungsfreien Raum exakt nachgewiesen. Die Terme, welche Ladungsdichte und Geschwindigkeit enthalten, sind bei *Lorentz* im gestrichenen System nicht dieselben wie im ruhenden System, da er diese Größen nicht ganz richtig transformiert. Er sieht deshalb auch die beiden Systeme nicht als völlig, sondern nur sehr angenähert als gleichwertig an. Unter der Voraussetzung, daß auch die Elektronen bei der Translation die oben erwähnte Deformation erfahren, sowie daß alle Massen und Kräfte genau so von der Geschwindigkeit abhängen wie rein elektromagnetische Massen und Kräfte, kann *Lorentz* das Auftreten der Kontraktion bei allen Körpern (auch bei Vorhandensein von Molekularbewegung) sowie das negative Ergebnis aller bekannten Versuche, einen Einfluß der Erdbewegung auf die optischen Erscheinungen festzustellen, erklären. Als entfernte Folgerung ergibt sich übrigens, daß $\varkappa = 1$ gesetzt werden muß, d. h. daß die Querdimensionen bei der Translation ungeändert bleiben, wenn anders diese Erklärung überhaupt möglich ist. Wir möchten noch ausdrücklich betonen, daß auch in dieser Arbeit *Lorentz* das Relativitätsprinzip keineswegs evident war. Ferner ist für ihn im Gegensatz zu *Einstein* charakteristisch, daß er die Kontraktion kausal zu verstehen sucht.

Die formalen Lücken, die die Arbeit von *Lorentz* übrig ließ, wurden von *Poincaré* ausgefüllt. Das Relativitätsprinzip wird von ihm als allgemein und streng gültig ausgesprochen. Da er die *Maxwell*schen Gleichungen für das Vakuum wie die übrigen bisher genannten Autoren als gültig annimmt, so kommt das auf die Forderung hinaus, daß alle Naturgesetze gegenüber der „Lorentz-Transformation“[14]) kovariant sein müssen. Die Unveränderlichkeit der Querdimensionen bei der Translation wird ganz naturgemäß aus dem Postulat hergeleitet, daß die Transformationen, die den Übergang von einem ruhenden zu einem gleichförmig bewegten System vermitteln, eine Gruppe bilden müssen, welche die gewöhnlichen Verlagerungen des Koordinatensystems als Untergruppe enthält. Ferner werden die *Lorentz*schen Transformationsformeln für Ladungsdichte und Geschwindigkeit korrigiert und damit die völlige Kovarianz der Feldgleichungen der Elektronentheorie hergestellt. Auf die Behandlung des Gravitationsproblems und die Verwendung der imaginären Koordinate ict in dieser Arbeit werden wir noch zu sprechen kommen (vgl. Nr. **50** und **7**).

---

14) Die Bezeichnungen „Lorentztransformation“ und „Lorentzgruppe“ finden sich in dieser Arbeit *Poincarés* zum erstenmal.

Durch *Einstein* wurde endlich die Grundlegung der neuen Disziplin zu einem gewissen Abschluß gebracht. Seine Arbeit von 1905 wurde fast gleichzeitig mit *Poincarés* Abhandlung eingesendet und ist ohne Kenntnis der *Lorentz*schen Abhandlung von 1904 verfaßt worden. Sie enthält nicht nur alle wesentlichen Resultate der beiden genannten Arbeiten, sondern vor allem auch eine völlig neue, viel tiefere Auffassung des ganzen Problems. Im folgenden wird dies im einzelnen dargelegt.

2. Das Relativitätspostulat. Die vielen negativen Versuche[15]), einen Einfluß der Erdbewegung auf die Erscheinungen durch Messungen auf der Erde selbst festzustellen, lassen mit aller Wahrscheinlichkeit, man kann wohl sagen mit Sicherheit, den Schluß zu, daß prinzipiell die Erscheinungen in einem System unabhängig von der Translationsbewegung sind, die es als Ganzes hat. Präziser gesagt: Es gibt eine dreifach unendliche Schar[16]) von geradlinig und gleichförmig gegeneinander bewegten Bezugssystemen, in denen sich die Phänomene in vollkommen gleicher Weise abwickeln. Wir werden sie im folgenden mit *Einstein* Galileische Bezugssysteme nennen, weil in ihnen das Galileische Trägheitsgesetz gilt. Es ist unbefriedigend, daß nicht *alle* Systeme als gleichwertig angesehen werden oder wenigstens eine kausale Begründung für die Auszeichnung einer gewissen Schar von Systemen gegeben wird. Diesem Mangel hilft die *allgemeine* Relativitätstheorie ab (vgl. Abschnitt IV). Vorläufig müssen wir uns auf die Galileischen Bezugssysteme, also auf die Relativität bei gleichförmigen Translationsbewegungen beschränken.

Durch das Postulat der Relativität wird der Äther als *Substanz* aus den physikalischen Theorien entfernt, da es keinen Sinn mehr hat, von Ruhe oder Bewegung relativ zum Äther zu sprechen, wenn diese

---

15) Neben der unter [6]) genannten Literatur ist anzuführen: Die Wiederholung des Michelsonschen Versuches von *E. W. Morley* und *D. C. Miller*, Phil. Mag. 8 (1904), p. 753 und 9 (1905), p. 680. [Man vgl auch die Diskussion bei *J. Lüroth*, München Ber. 7 (1909); *E. Kohl*, Ann. d. Phys. 28 (1909), p. 259 u. 662; *M. v. Laue*, Ann. d. Phys. 33 (1910), p. 156.] Weitere Versuche, eine durch die Erdbewegung verursachte Doppelbrechung zu finden *D. B. Brace*, Phil. Mag. 7 (1904), p. 317; 10 (1905), p. 71; Boltzmann-Festschrift 1907, p. 576 und einen Versuch von *F. T. Trouton* und *A. O. Rankine*, Proc. Roy. Soc. 8 (1908), p. 420, eine Änderung des elektrischen Widerstandes eines Drahtes je nach seiner Orientierung zur Richtung der Erdbewegung festzustellen. Man vgl. dazu auch den zusammenfassenden Bericht von *J. Laub*, Jahrb. f. Rad. u. El. 7 (1910), p. 405 über die experimentellen Grundlagen des Relativitätsprinzips.

16) Von den trivialen Verschiebungen des Koordinatenursprungs und den Verlagerungen der Achsen ist hier abgesehen.

durch Beobachtungen prinzipiell nicht konstatiert werden können. Es wird uns dies heute um so weniger befremden, als man nunmehr bereits mit Erfolg begonnen hat, die elastischen Eigenschaften der Materie auf elektrische Kräfte zurückzuführen und es ganz widersinnig wäre, wollte man hernach wieder versuchen, die elektromagnetischen Erscheinungen durch die elastischen Eigenschaften eines hypothetischen Mediums zu erklären[17]). Die mechanische Äthervorstellung war eigentlich bereits überflüssig und hemmend geworden, als die elastische Lichttheorie durch die elektromagnetische ersetzt wurde. In dieser war die Äthersubstanz immer ein Fremdkörper geblieben. Neuerdings hat *Einstein*[18]) vorgeschlagen, den Begriff Äther weiter zu fassen und darunter keine Substanz zu verstehen, sondern einfach den *Inbegriff derjenigen physikalischen Zustandsgrößen, die dem von gewöhnlicher Materie freien Raume zugeordnet werden müssen.* In diesem weiteren Sinne gibt es natürlich einen Äther, man hat nur zu beachten, daß er keine mechanischen Eigenschaften hat, d. h. daß zu den physikalischen Zustandsgrößen des materiefreien Raumes keine Lagenkoordinaten und Geschwindigkeiten gehören.

Es könnte scheinen, daß das Relativitätspostulat, nachdem man die Äthervorstellung aufgegeben hat, unmittelbar evident ist. Eine genauere Überlegung zeigt jedoch, daß dies nicht zutrifft[19]). Wir können selbstverständlich nicht dem ganzen Weltall eine Translation erteilen und dann prüfen, ob die Erscheinungen sich dadurch ändern. Einen heuristischen und physikalischen Wert hat also unser Satz nur dann, wenn man ihn für jedes abgeschlossene System als gültig ansieht. Wann aber ist ein System abgeschlossen? Genügt es, daß alle Massen hinreichend entfernt sind?[20]) Die Antwort lautet erfahrungsgemäß: Bei gleichförmigen Translationsbewegungen genügt es, bei anderen Bewegungen genügt es nicht. Für diese Vorzugsstellung der ersteren muß noch eine Erklärung gegeben werden (s. Abschn. IV, Nr. 62). Zusammenfassend können wir sagen: Das Relativitätspostulat besagt implizite, daß eine gleichförmige Translation des Schwerpunktes des Weltalls relativ zu einem abgeschlossenen System auf die Erscheinungen in diesem ohne Einfluß ist.

---

17) Diesen naheliegenden Gedanken hat gelegentlich *M. Born* vorgebracht [Naturw. 7 (1919), p. 136].

18) *A. Einstein,* Äther und Relativitätstheorie, Berlin 1920, Rede gehalten in Leiden.

19) Vgl. dazu *A. Einstein,* Ann. d. Phys. 38 (1912), p. 1059.

20) Auf die Notwendigkeit, auch in der speziellen Relativitätstheorie die fernen Massen mit in Betracht zu ziehen, hat in anderem Zusammenhang *H. Holst* hingewiesen (vgl. unten Anm. 43).

3. Das Postulat von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Die Theorie von Ritz und verwandte Theorien. Die Forderung der Relativität genügt noch nicht, um die Kovarianz aller Naturgesetze gegenüber der Lorentz-Transformation zu folgern. So ist z. B. die klassische Mechanik mit dem Relativitätsprinzip durchaus im Einklang, obwohl die Lorentz-Transformation auf ihre Gleichungen nicht anwendbar ist. *Lorentz* und *Poincaré* hatten nun, wie wir gesehen haben, die *Maxwell*schen Gleichungen ihren Betrachtungen zugrunde gelegt. Es ist aber durchaus zu verlangen, einen so fundamentalen Satz wie die Kovarianz aller Naturgesetze gegenüber der Lorentz-Gruppe aus möglichst *einfachen* Grundannahmen herzuleiten. Dies geleistet zu haben, ist das Verdienst *Einsteins*. Er hat gezeigt, daß bloß folgender Satz der Elektrodynamik vorausgesetzt werden muß: *Die Lichtgeschwindigkeit ist unabhängig vom Bewegungszustand der Lichtquelle.* Ist diese punktförmig, so sind die Wellenflächen also auf jeden Fall Kugeln mit ruhendem Mittelpunkt. Wir wollen diesen Sachverhalt wie üblich der Kürze wegen mit dem Schlagwort „Konstanz der Lichtgeschwindigkeit“ bezeichnen, obwohl diese Bezeichnung zu Mißverständnissen Anlaß geben kann. Von einer *universellen* Konstanz der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit kann schon deshalb nicht die Rede sein, weil diese nur in den Galileischen Bezugssystemen stets denselben Wert c hat. Ihre Unabhängigkeit vom Bewegungszustand der Lichtquelle besteht jedoch auch in der allgemeinen Relativitätstheorie zu recht. Sie erweist sich als der wahre Kern der alten Ätherauffassung. (Über die Gleichheit der *numerischen Werte* der Lichtgeschwindigkeit in allen Galileischen Bezugssystemen vgl. Nr. 5.)

Wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird, führt die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im Verein mit dem Relativitätspostulat zu einer Neuerung des Zeitbegriffes. Es ist deshalb von *W. Ritz*[21]) und unabhängig von ihm von *Tolman*[22]), *Kunz*[23]) und *Comstock*[24]) die Frage aufgeworfen worden, ob man nicht diesen radikalen Folgerungen entgehen und dennoch in Übereinstimmung mit der Erfahrung bleiben

21) *W. Ritz,* Recherches critiques sur l'éléctrodynamique générale. Ann. de chim. et phys. 13 (1908), p. 145 [Ges. Werke p. 317]; Sur les théories éléctromagnétiques des Maxwell-Lorentz, Arch. de Génève 16 (1908), p. 209 [Ges. Werke, p. 427]; Du rôle de l'éther en physique, Scientia 3 (1908), p. 260 [Ges. Werke, p. 447]; vgl. auch *P. Ehrenfest*, Zur Frage nach der Entbehrlichkeit des Lichtäthers, Phys. Ztschr. 13 (1912), p. 317; Zur Krise der Lichtätherhypothese, Rede gehalten in Leiden 1912, Berlin 1913.

22) *C. Tolman,* Phys. Rev. 30 (1910), p. 291 und 31 (1910), p. 26.

23) *J. Kunz,* Am. J. of Science 30 (1910), p. 1313.

24) *D. F. Comstock,* Phys. Rev. 30 (1910), p. 267.

kann, wenn man die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit leugnet und bloß das erste Postulat beibehält. Es ist klar, daß damit nicht nur die Existenz des Äthers, sondern auch die *Maxwell*schen Gleichungen für das Vakuum verworfen werden, so daß die ganze Elektrodynamik neu aufgebaut werden muß. Dies hat in einer *systematischen* Theorie nur *W. Ritz* getan. Er behält die Gleichungen

$$\text{rot}\,\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{H}} = 0, \quad \text{div}\,\mathfrak{H} = 0 \tag{2}$$

bei, so daß die Feldstärken sich in der gewöhnlichen Elektrodynamik aus einem skalaren und einem Vektorpotential herleiten lassen:

$$\mathfrak{E} = -\,\text{grad}\,\varphi - \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{A}}, \quad \mathfrak{H} = \text{rot}\,\mathfrak{A}. \tag{2a}$$

Die Gleichungen

$$\varphi(P, t) = \int \frac{\varrho\, d V_P}{[r_{PP'}]_{t'=t-\frac{r}{c}}}, \quad \mathfrak{A}(P, t) = \int \frac{\frac{1}{c}\varrho \mathfrak{v}\, d V_{P'}}{[r_{PP'}]_{t'=t-\frac{r}{c}}} \tag{3}$$

der gewöhnlichen Elektrodynamik werden jedoch ersetzt durch

$$\varphi(P, t) = \int \frac{\varrho\, d V_{P'}}{[r_{PP'}]_{t'=t-\frac{r}{c+v_r}}}, \quad \mathfrak{A}(P, t) = \int \frac{\varrho \mathfrak{v}\, d V_{P'}}{[r_{PP'}]_{t'=t-\frac{r}{c+v_r}}} \tag{4}$$

entsprechend dem Prinzip, daß nur die Geschwindigkeit einer Lichtwelle *relativ zur Quelle*, von der sie ausgeht, sowie die Geschwindigkeit einer elektromagnetischen Störung *relativ zum Elektron*, das sie verursacht, gleich c ist. Wir wollen alle Theorien, welche diese Annahme machen, kurz Emissionstheorien nennen. Da das Relativitätspostulat bei ihnen von selbst erfüllt ist, erklären sie alle den *Michelson*schen Interferenzversuch, und wir haben nun zu prüfen, ob sie mit den sonstigen optischen Erfahrungen verträglich sind.

Da ist zunächst zu bemerken, daß sie mit der elektronentheoretischen Erklärung der Reflexion und Brechung unvereinbar sind, für welche die Interferenz der von den Dipolen der Substanz ausgehenden Kugelwellen mit der einfallenden Welle wesentlich ist. Denken wir uns nämlich die Substanz ruhend und die Lichtquelle gegen sie bewegt, so haben nach *Ritz* die von den Dipolen ausgehenden Wellen eine andere Geschwindigkeit (nämlich c) als die einfallende Welle, Interferenz ist also nicht möglich. Die Emissionstheorien sind ferner nur durch künstliche Zusatzhypothesen imstande, von dem für die Optik bewegter Medien fundamentalen *Fizeau*schen Strömungsversuch (vgl. Nr. 6) Rechenschaft zu geben, was sehr schwer ins Gewicht fällt. Wir wollen noch genauer betrachten, was sie über den Dopplereffekt aussagen. Eine einfache Überlegung lehrt, daß die Frequenz sich genau so ändern muß, wie es die Äthertheorie verlangt, die Wellenlänge dagegen wegen der

veränderten Geschwindigkeit dieselbe bleibt wie bei ruhender Quelle.[22a]) Es fragt sich also, ob bei den gewöhnlichen, astronomischen Beobachtungen des Dopplereffektes die Änderung der Wellenlänge oder die der Frequenz konstatiert wird. Man kann zugunsten der Emissionstheorien annehmen, daß es sich bei Beobachtungen mit Prismen um die Frequenz handelt. Bei den Beobachtungen mit Beugungsgittern ist die Frage viel schwieriger zu entscheiden. *Tolman* ist der Ansicht, daß hier die Wellenlänge in Betracht kommt, die Emissionstheorien also dadurch widerlegt seien, *Stewart*[25]) dagegen vertritt die entgegengesetzte Anschauung. Es läßt sich hier nicht ohne weiteres eine Entscheidung treffen, da die Auffassung der Beugung bei den Emissionstheorien schon an sich sehr unklar ist. In den Aussagen über den Dopplereffekt am bewegten Spiegel gehen die verschiedenen Emissionstheorien auseinander. Nach *J. J. Thomson*[26]) und *Stewart*[25]) ist der bewegte Spiegel, was die Geschwindigkeit des reflektierten Strahles anlangt, äquivalent mit dem Spiegelbild der Lichtquelle, nach *Tolman* wirkt er wie eine neue Lichtquelle an seiner Oberfläche, nach *Ritz*[21a]) endlich ist die Geschwindigkeit des reflektierten Strahles gleich der eines parallelen, von der ursprünglichen Lichtquelle ausgehenden Strahles. Bei ruhender Quelle und bewegtem Spiegel ist also nach *Thomson-Stewart* kein Dopplereffekt der Wellenlänge zu erwarten, nach *Tolman* ist er halb so groß wie der der gewöhnlichen Optik, nach *Ritz* stimmt er mit diesem überein. Nun ist der Dopplereffekt der Wellenlänge des von einem bewegten Spiegel reflektierten Lichtes neuerdings wiederholt mit dem Interferometer bestimmt worden[27]) mit dem unzweifelhaften Ergebnis, daß er mit dem von der klassischen Optik geforderten übereinstimmt. Die Annahmen von *Thomson-Stewart* und *Tolman* sind damit widerlegt. Weiter hat *Q. Majorana*[28]) auch den Dopplereffekt bei einer bewegten Lichtquelle mit dem Interferometer bestimmt und hat gefunden, daß er ebenfalls dem nach der klassischen Optik zu erwartenden entspricht. Sein Ver-

---

22a) Dies wurde zuerst von *Tolman* (Phys. Rev., l. c. Anm. 22) hervorgehoben.

25) *O. M. Stewart,* Phys. Rev. 32 (1911), p. 418.

26) *J. J. Thomson,* Phil. Mag. 19 (1910), p. 301.

21a) *W. Ritz* u. *P. Ehrenfest,* l. c., Anm. 21); s. auch *C. Tolman,* Phys. Rev. 35 (1912), p. 136. Wenn im folgenden von „*Ritz*scher Theorie" gesprochen wird, so ist dabei die hier erwähnte, von Willkür nicht freie Vorschrift mitinbegriffen zu denken.

27) *A. A. Michelson,* Astroph. J. 37 (1913), p. 190; *Ch. Fabry* u. *H. Buisson,* Paris C. R. 158 (1914), p. 1498; *Q. Majorana,* Paris C. R. 165 (1917), p. 424, Phil. Mag. 35 (1918), p. 163 und Phys. Rev. 11 (1918), p. 411.

28) *Q. Majorana,* Phil. Mag. 37 (1919), p. 190.

such ist jedoch gegen *Ritz* nicht entscheidend, worauf besonders *Michaud*[29]) hingewiesen hat. Sei nämlich L eine mit der Geschwindigkeit v vom ruhenden Spiegel S sich entfernende Lichtquelle, A ein fester Punkt vor dem Spiegel, so kommt es in *Majoranas* Versuch in letzter Linie auf die Veränderung des Gangunterschiedes an, der beim Hin- und Zurücklaufen des Lichtes auf der Strecke $AS = l$ entsteht, wenn die Geschwindigkeit der Lichtquelle von Null auf v anwächst. Auf dem Hinweg haben wir nun: Geschwindigkeit gleich $c - v$, Frequenz $\nu_1 = \nu\left(1 - \frac{v}{c}\right)$, also $\lambda_1 = \frac{c - v}{\nu_1} = \lambda$. Bei der Reflexion am (ruhenden) Spiegel S bleibt zwar die Frequenz die gleiche, die Geschwindigkeit wird aber hernach $c + v$, also die Wellenlänge $\lambda_2 = \frac{c + v}{\nu_1} = \lambda\left(1 + \frac{2v}{c}\right)$, wenn wir uns auf Größen 1. Ordnung beschränken. Die gesuchte Änderung des gesamten Gangunterschiedes ist also

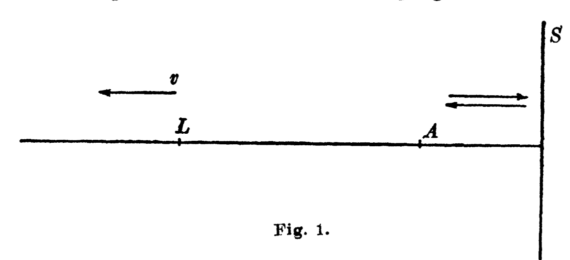


Fig. 1.

$$\Delta = \frac{2v}{c} l = \frac{v}{c} \cdot 2l,$$

genau wie in der klassischen Theorie. Man kann überhaupt allgemein zeigen, daß in den Größen 1. Ordnung, solange es sich um geschlossene Lichtwege handelt, zwischen der *Ritz*schen und der gewöhnlichen oder der relativistischen Optik kein Unterschied besteht. Terrestrische Versuche können also nur dann zwischen beiden Anschauungen entscheiden, wenn sie sich auf Effekte 2. Ordnung erstrecken.[30]) Als derartiges experimentum crucis könnte nach *La Rosa*[31]) und *Tolman*[32]) der *Michelson*sche Interferenzversuch dienen, wenn man ihn nicht mit irdischen Lichtquellen, sondern mit Sonnenlicht ausführt. Die *Ritz*sche Theorie würde im Gegensatz zur Relativitätstheorie verlangen, daß sich dann eine Streifenverschiebung bei Drehung des Apparates zeigt.

Effekte 1. Ordnung, die gegen *Ritz* entscheiden können, gibt es jedoch sehr wohl, wenn man es nicht mit geschlossenen, sondern mit offenen Lichtwegen zu tun hat. Diese Möglichkeit ist zwar nicht

29) *P. Michaud*, Paris C. R. 168 (1919), p. 507.

30) Dies wird gelegentlich von *Ehrenfest* bemerkt (Phys. Ztschr., l. c. Anm. 21).

31) *M. La Rosa*, Nuovo Cimento (6) 3 (1912), p. 345 und Phys. Ztschr. 13 (1912), p. 1129.

32) *C. Tolman*, Phys. Rev. 35 (1912), p. 136.

bei terrestrischen, wohl aber bei astronomischen Messungen vorhanden. Schon *Comstock*[24a]) hat auf mögliche Effekte bei Doppelsternen hingewiesen. *De Sitter*[33]) hat dann die Verhältnisse quantitativ diskutiert und kam zu folgendem Ergebnis: Bei in Wirklichkeit kreisförmigen Bahnen spektroskopischer Doppelsterne müßte bei Inkonstanz der Lichtgeschwindigkeit der tatsächlich zur Beobachtung kommende zeitliche Verlauf des Dopplereffektes dem einer exzentrischen Bahn entsprechen. Aus den vorhandenen Bahnen mit sehr kleiner Exzentrizität läßt sich entnehmen, daß die Lichtgeschwindigkeit von der Geschwindigkeit v des Doppelsternes weitgehend unabhängig ist. Setzt man sie in der Form $c + kv$ an, so muß $k < 0{,}002$ sein. Hält man dieses Ergebnis mit den erwähnten Schwierigkeiten der Emissionstheorien bei der Erklärung des *Fizeau*schen Versuches und bei der atomistischen Deutung der Brechung zusammen, so kann man wohl mit Sicherheit sagen, daß sich das Postulat von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit als richtig, der von *Ritz* und anderen eingeschlagene Weg, den *Michelson*schen Versuch zu erklären, als ungangbar erwiesen hat.

4. Relativität der Gleichzeitigkeit. Ableitung der Lorentz-Transformation aus den beiden Postulaten. Axiomatik der Lorentz-Transformation. Bei oberflächlicher Betrachtung scheinen die beiden Postulate unvereinbar. Denken wir uns nämlich eine Lichtquelle L, die sich relativ zum Beobachter A mit der Geschwindigkeit v bewegt, während der Beobachter B relativ zu L ruhen möge. Beide Beobachter müssen dann als Wellenflächen Kugeln sehen, deren Mittelpunkte relativ zu ihnen ruhen, also *verschiedene* Kugeln. Der Widerspruch verschwindet jedoch, wenn man zuläßt, daß Raumpunkte, die für A gleichzeitig vom Licht durchlaufen werden, für B nicht gleichzeitig durchlaufen werden. Wir sind damit unmittelbar zur Relativität der Gleichzeitigkeit gelangt. Damit hängt zusammen, daß überhaupt erst eine Definition des Synchronismus zweier Uhren an verschiedenen Orten gegeben werden muß. Als solche wählt *Einstein* folgende. Vom Punkt P gehe ein Lichtstrahl zur Zeit t_P aus, werde zur Zeit t_Q in Q reflektiert und gelange zur Zeit t'_P wieder nach P zurück. Die Uhr in Q läuft synchron mit der Uhr in P, wenn $t_Q = \frac{t_P + t'_P}{2}$ ist. Das Licht verwendet *Einstein* deshalb zur Zeit-

24a) *D. F. Comstock*, Phys. Rev., l. c., Anm. 24).

33) *W. de Sitter,* Amst. Proc. 15 (1913), p. 1297 u. 16 (1913), p. 395; Phys. Ztschr. 14 (1913), p. 429 u. 1267; vgl. auch die Diskussion bei *P. Guthnik,* Astr. Nachr. 195 (1913), Nr. 4670, sowie den durch *De Sitters* zweite Note widerlegten Einwand von *E. Freundlich,* Phys. Ztschr. 14 (1913), p. 835. Vgl. auch *W. Zurhellen,* Astr. Nachr. 198 (1914), p. 1.

regulierung, weil wir über den Vorgang der Lichtausbreitung auf Grund unserer Postulate bestimmte Aussagen machen können. Es sind natürlich auch andere Möglichkeiten der Uhrenvergleichung denkbar wie Transport von Uhren, mechanische oder elastische Koppelungen u. dgl. Wir müssen verlangen, daß sich bei diesen kein unlösbarer Widerspruch zur optischen Uhreneinstellung ergibt.

Wir sind nun imstande, die Transformationsformeln, welche die Koordinaten x, y, z, t und x', y', z', t' zweier gleichförmig gegeneinander bewegter Bezugssysteme K und K' verknüpfen, herzuleiten. Die x-Achse legen wir in die Bewegungsrichtung derart, daß K' gegen K sich in der positiven x-Richtung mit der Geschwindigkeit v bewegt. Von sämtlichen Autoren wird davon ausgegangen, daß die Transformationsformeln linear sein müssen. Man kann dies damit begründen, daß gleichförmige, geradlinige Bewegungen in K auch in K' gleichförmig und geradlinig sein sollen (wobei überdies noch als selbstverständlich angenommen wird, daß endliche Koordinatenwerte in K auch in K' endlich bleiben. Es steckt darin auch die Annahme der Gültigkeit der euklidischen Geometrie und der Homogenität von Raum und Zeit). Gemäß den beiden Postulaten muß nun die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \tag{2}$$

die entsprechende Gleichung

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0 \tag{2'}$$

nach sich ziehen, was wegen der Linearität der Transformation nur möglich ist, wenn

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = \varkappa(x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2)$$

ist, wo $\varkappa$ eine von v abhängige Konstante bedeutet. Berücksichtigt man noch, daß jede Bewegung parallel der x-Achse nach der Transformation wieder parallel der x-Achse sein muß, so folgen daraus durch ganz elementare Überlegungen die Formeln (1) der Nr. **1**. Es ist jetzt noch eine besondere Betrachtung nötig, um zu zeigen, daß $\varkappa = 1$ zu setzen ist. *Einstein* geht so vor, daß er auf K' noch einmal die Transformation (1) mit entgegengesetzter Geschwindigkeit anwendet.

$$x'' = \varkappa(-v)\frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y'' = \varkappa(-v)y', \quad z'' = \varkappa(-v)z',$$
$$t'' = \varkappa(-v)\frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Man findet

$$x'' = \varkappa(v)\varkappa(-v)x, \quad y'' = \varkappa(v)\varkappa(-v)y, \quad z'' = \varkappa(v)\varkappa(-v)z,$$
$$t'' = \varkappa(v)\varkappa(-v)t.$$

Da nun K'' relativ zu K ruht, muß es mit diesem identisch sein, d. h. es muß gelten
$$\varkappa(v)\varkappa(-v) = 1.$$
Nun bedeutet aber $\varkappa(v)$, wie wir bereits in Nr. 1 bemerkt haben, die Veränderung der Querdimension eines Stabes, und diese muß aus Symmetriegründen von der *Richtung* der Geschwindigkeit unabhängig sein: $\varkappa(v) = \varkappa(-v)$, woraus im Verein mit obiger Relation wegen des positiven Vorzeichens von $\varkappa$, $\varkappa(v) = 1$ folgt. In ähnlicher Weise schließt *Poincaré*. Er betrachtet die Gesamtheit aller linearen Transformationen, welche die Gleichung (2) in sich überführen (diese Gesamtheit bildet natürlich eine Gruppe), und fordert, daß sie als Untergruppe enthält:

a) die einparametrige Gruppe der Translationen parallel der x-Achse (als Gruppenparameter fungiert die Geschwindigkeit v),

b) die gewöhnlichen Verlagerungen der Koordinatenachsen. Hieraus folgt wieder $\varkappa = 1$. *Einsteins* Symmetrieforderung $\varkappa(v) = \varkappa(-v)$ ist nämlich in b) mitenthalten. Wir sind also zu dem definitiven Resultat gekommen:

$$\text{(I)} \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

$$\text{(II)} \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2.$$

Die zu (I) inverse Transformation erhält man, wenn man v durch $-v$ ersetzt:

$$\text{(Ia)} \qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$ [34]

Der einfache Bau der Formeln (I) legt die Frage nahe, ob sie nicht

---

34) Es ist für manche Anwendungen von Wert, auch die Formeln für die Koordinatentransformation in dem allgemeinen Fall zu kennen, wo die x-Achse nicht die Richtung der Translationsgeschwindigkeit hat. Man erhält sie, indem $\mathfrak{r}$ in eine Komponente $\mathfrak{r}_{\parallel}$ in der Richtung der Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Systems K gegen K' und eine zu $\mathfrak{v}$ senkrechte Komponente $\mathfrak{r}_{\perp}$ spaltet. Aus (I) folgt zunächst
$$\mathfrak{r}'_{\parallel} = \frac{\mathfrak{r}_{\parallel} - \mathfrak{v}t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \mathfrak{r}'_{\perp} = \mathfrak{r}_{\perp}, \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}\mathfrak{r}_{\parallel}}{\sqrt{1-\beta^2}};$$
wegen
$$\mathfrak{r}_{\parallel} = \frac{(\mathfrak{r}\mathfrak{v})\mathfrak{v}}{v^2}, \qquad \mathfrak{r}_{\perp} = \mathfrak{r} - \mathfrak{r}_{\parallel} = \mathfrak{r} - \frac{(\mathfrak{r}\mathfrak{v})\mathfrak{v}}{v^2}, \qquad \mathfrak{r}' = \mathfrak{r}'_{\parallel} + \mathfrak{r}'_{\perp}$$
kann dies aber auch geschrieben werden
$$\text{(1a)} \qquad \mathfrak{r}' = \mathfrak{r} + \frac{1}{v^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)(\mathfrak{r}\mathfrak{v})\mathfrak{v} - \frac{\mathfrak{v}t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad t' = \frac{t - \frac{1}{c^2}(\mathfrak{r}\mathfrak{v})}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$
Diese Formeln finden sich bei *G. Herglotz*, Ann. d. Phys. 36 (1911), p. 497 Gl. (9).

schon aus allgemeinen gruppentheoretischen Gesichtspunkten gefolgert werden können, ohne daß die Invarianz von (2) vorausgesetzt werden muß. Inwiefern dies der Fall ist, zeigen die Arbeiten von *Ignatowsky* und von *Frank* und *Rothe*.[35]) Setzt man bloß voraus:

1. daß die Transformationen eine einparametrige homogene lineare Gruppe bilden,
2. daß die Geschwindigkeit K gegen K' entgegengesetzt gleich der von K' gegen K ist, und
3. daß die Kontraktion der von K gesehenen, in K' ruhenden Längen gleich ist der Kontraktion der von K' gesehenen in K ruhenden Längen,

so folgt bereits, daß die Transformationsformeln die Gestalt haben müssen

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \alpha v^2}}, \quad t' = \frac{t - \alpha v x}{\sqrt{1 - \alpha v^2}}. \tag{3}$$

Über das Vorzeichen, die Größe und die physikalische Bedeutung von α folgt natürlich nichts. Aus den gruppentheoretischen Forderungen läßt sich also bloß die äußere Form der Transformationsformeln ableiten, nicht ihr physikalischer Inhalt. Man bemerkt übrigens, daß aus (3) die Transformationsformeln

$$x' = x - vt, \quad t' = t \tag{4}$$

der gewöhnlichen Mechanik hervorgehen, wenn man $\alpha = 0$ setzt. Sie werden jetzt allgemein nach dem Vorgang von *Ph. Frank* „Galilei-Transformation" genannt. Man erhält sie natürlich ebenso, wenn man in (I) $c = \infty$ setzt.

5. Lorentz-Kontraktion und Zeitdilatation. Die Lorentz-Kontraktion ergibt sich als einfachste Folge der Transformationsformeln (I) und damit auch der beiden Grundannahmen. Betrachten wir einen in der x-Achse liegenden Stab, der im Bezugssystem K' ruht. Die Koordinaten seiner Enden x_1' und x_2' sind also von t' unabhängig, und es ist

$$x_2' - x_1' = l_0 \tag{5}$$

gleich der Ruhlänge des Stabes. Wir denken uns andererseits im System K die Länge des Stabes folgendermaßen bestimmt. Wir ermitteln x_1 und x_2 als Funktion von t. Den Abstand zweier Lagen, die vom Anfangs- und Endpunkt des Stabes im System K gleichzeitig eingenommen werden, nennen wir die Länge l des Stabes im bewegten System:

$$x_2(t) - x_1(t) = l. \tag{6}$$

35) *W. v. Ignatowsky*, Arch. Math. Phys. 17 (1910), p. 1 und 18 (1911), p. 17; Phys. Ztschr. 11 (1910), p. 972 und 12 (1911), p. 779; *Ph. Frank* u. *H. Rothe*, Ann. d. Phys. 34 (1911), p. 825 und Phys. Ztschr. 13 (1912), p. 750.

Da diese Lagen in K' nicht gleichzeitig sind, haben wir auch nicht zu erwarten, daß l gleich l_0 wird. In der Tat folgt aus (1):

$$x_2' = \frac{x_2(t) - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x_1' = \frac{x_1(t) - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \text{also}$$

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad l = l_0\sqrt{1-\beta^2}, \tag{7}$$

der Stab ist im Verhältnis $\sqrt{1-\beta^2}:1$ kontrahiert, wie bereits *Lorentz* angenommen hatte. Da die Querdimensionen eines Körpers unverändert bleiben, kontrahiert sich auch sein Volumen nach der gleichen Formel

$$V = V_0\sqrt{1-\beta^2}. \tag{7a}$$

Wir haben gesehen, daß diese Kontraktion mit der Relativität der Gleichzeitigkeit zusammenhängt, und es ist deshalb die Ansicht geäußert worden[36]), daß sie nur „scheinbar", von unserer Raum-Zeitmessung vorgetäuscht ist. Nennt man nur dann einen Tatbestand wirklich, wenn er von allen Galileischen Bezugssystemen aus in derselben Weise konstatiert wird, so ist die Lorentz-Kontraktion allerdings nur scheinbar, denn der relativ zu K' ruhende Beobachter sieht den Stab unverkürzt. Wir halten das aber nicht für zweckmäßig, jedenfalls ist die Lorentz-Kontraktion prinzipiell beobachtbar. Zur Beurteilung dieser Frage ist ferner ein von *Einstein*[37]) angegebenes Gedankenexperiment lehrreich, welches zeigt, daß die zur Beobachtung der Lorentz-Kontraktion nötige Konstatierung der Gleichzeitigkeit räumlich entfernter Ereignisse durch Maßstäbe allein, ohne daß Uhren verwendet werden, vorgenommen werden kann. Verwenden wir nämlich zwei Maßstäbe A_1B_1 und A_2B_2 von der gleichen Ruhlänge l_0, die sich relativ zu K mit absolut genommen gleicher, aber entgegengesetzt gerichteter Geschwindigkeit v bewegen, und markieren den Punkt A^*, in dem sich A_1 und A_2, und den Punkt B^*, in dem sich B_1 und B_2 überdecken. (Aus Symmetriegründen folgt, daß diese Ereignisse in K gleichzeitig stattfinden.) Der Abstand A^*B^*, mit in K ruhenden Stäben ausgemessen, hat dann den Betrag

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2}.$$

Man muß also sagen: Die Lorentz-Kontraktion ist nicht eine Eigenschaft *eines* Maßstabes allein, sondern eine prinzipiell beobachtbare, reziproke Beziehung zweier relativ zueinander bewegten Maßstäbe.

Eine analoge Veränderung wie die Längeneinheit erfährt die Zeiteinheit bei Bewegung. Betrachten wir wieder eine in K' ruhende Uhr.

---

36) *V. Varičak,* Phys. Ztschr. 12 (1911), p. 169.

37) *A. Einstein,* Phys. Ztschr. 12 (1911), p. 509.

Die Zeit t', welche sie in K' anzeigt, ist ihre Normalzeit τ, ihre Koordinate x' können wir gleich 0 setzen. Aus (I) folgt dann

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \tau = \sqrt{1-\beta^2}\, t. \tag{8}$$

Gemessen in der Zeiteinheit von K geht also die mit der Geschwindigkeit v bewegte Uhr im Verhältnisse $\sqrt{1-\beta^2} : 1$ langsamer, als wenn sie ruhte. Diese Folgerung aus der Lorentz-Transformation ist zwar in den Ergebnissen von *Lorentz* und *Poincaré* bereits implizite enthalten, wurde jedoch erst von *Einstein* klar ausgesprochen.

Die Zeitdilatation gibt Anlaß zu einer scheinbar paradoxen Folgerung, die bereits in *Einsteins* erster Arbeit erwähnt und später von *Langevin*[38]), *Laue*[39]) und *Lorentz*[40]) genauer diskutiert wurde. Im Punkt P mögen sich zwei synchron gehende Uhren U_1, U_2 befinden. Bewegt man dann zur Zeit $t = 0$ eine von ihnen U_2 mit der konstanten Geschwindigkeit v während der Zeit t auf irgendeiner Kurve nach P', so geht sie hernach nicht mehr synchron mit U_1. Sie zeigt bei ihrer Ankunft in P' die Zeit $t\sqrt{1-\beta^2}$ statt t an. Insbesondere gilt das auch noch, wenn der Endpunkt P' der Bahn mit dem Anfangspunkt zusammenfällt. Der Einfluß der Beschleunigung auf den Gang der Uhr kann vernachlässigt werden, so lange wir uns in einem Galileischen Bezugssytem befinden. Betrachten wir insbesondere den Fall, daß U_2 auf der x-Achse bis zu einem Punkt Q und dann wieder zurück nach P bewegt wird — wobei die Geschwindigkeitsänderungen in P und Q ruckweise erfolgen sollen —, so wird dieser Einfluß jedenfalls unabhängig von t und leicht zu eliminieren sein. Das Paradoxon liegt im Folgenden: Beschreiben wir den Vorgang von einem Bezugssystem K^*, welches relativ zu U_2 dauernd ruht. Die Uhr U_1 bewegt sich dann relativ zu K^* genau so wie U_2 relativ zu K. Dennoch geht am Ende der Bewegung U_2 gegenüber der Uhr U_1 nach, U_1 also gegenüber der Uhr U_2 vor. Die Auflösung des Paradoxons besteht in der Bemerkung, daß das Koordinatensystem K^* kein Galileisches ist und in einem solchen der Einfluß der Beschleunigung auf eine Uhr nicht vernachlässigt werden kann, weil hier die Beschleunigung nicht durch eine äußere Kraft, sondern, wie man in der Newtonschen Mechanik sagt, durch eine Trägheitskraft erzeugt wird. Die volle Aufklärung des Problems kann naturgemäß erst im Rahmen

---

38) *P. Langevin,* L'évolution de l'espace et du temps, Scientia 10 (1911), p. 31.

39) *M. v. Laue,* Phys. Ztschr. 13 (1912), p. 118.

40) *H. A. Lorentz,* Das Relativitätsprinzip, 3 Haarlemer Vorlesungen, Leipzig 1914, p. 31 u. 47.

der allgemeinen Relativitätstheorie gegeben werden (vgl. Abschn. IV, Nr. **53** b); über die vierdimensionale Formulierung des Uhrenparadoxons siehe Abschn. III, Nr. **24**). Wir bemerken ferner, daß die Zeitregulierung durch Uhrentransport, die wir in der vorigen Nummer ins Auge gefaßt haben, nicht ohne weiteres möglich ist, sondern erst richtige Resultate liefert, wenn man die Zeitangaben der Uhren auf die Transportgeschwindigkeit Null extrapoliert.

Daß Versuche, einen Einfluß der Gesamttranslation eines Koordinatensystems auf die Erscheinungen innerhalb dieses Systems festzustellen, gemäß der Relativitätstheorie ein negatives Ergebnis haben müssen, ist evident. Dennoch ist es lehrreich nachzusehen, wie die Versuche von einem nicht mitbewegten System K aus gesehen werden. Wir wollen hier eine derartige Betrachtung für den *Michelson*schen Interferenzversuch durchführen. Ist l_1 die in K gemessene Länge des zur Bewegungsrichtung parallelen, l_2 die Länge des zur Bewegungsrichtung senkrechten Apparatarmes, so sind die Lichtzeiten t_1, t_2, die zum Durchlaufen der Arme gebraucht werden, bekanntlich bestimmt durch

$$ct_1 = \frac{2l_1}{1-\beta^2}, \qquad ct_2 = \frac{2l_2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Nun ist wegen der Lorentz-Kontraktion

$$l_1 = l_0\sqrt{1-\beta_2}, \qquad \text{dagegen} \qquad l_2 = l_0,$$

also

$$ct_1 = ct_2 = \frac{2l_0}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Es scheint also, daß der mitbewegte Beobachter in K' eine andere Lichtgeschwindigkeit

$$c' = c\sqrt{1-\beta^2} \tag{9}$$

beobachtet als der Beobachter in K. Dies ist eine Auffassung, die *Abraham*[41]) vertritt. Nach *Einstein* ist dagegen noch die Zeitdilatation

$$t' = t\sqrt{1-\beta^2}$$

zu berücksichtigen, so daß

$$ct_1' = ct_2' = 2l_0$$

wird und die Lichtgeschwindigkeit in K' dieselbe ist wie in K. Nach *Abraham* gibt es keine Zeitdilatation. Die *Abraham*sche Auffassung ist zwar mit dem *Michelson*schen Versuch im Einklang, steht aber im Widerspruch mit dem Relativitätspostulat, da sie prinzipiell Versuche zuläßt, welche die „absolute" Bewegung eines Systems zu bestimmen gestatten.[42])

41) *M. Abraham,* Theorie d. Elektrizität 2, 2. Aufl., Leipzig 1908, p. 367.

42) Es mögen an dieser Stelle auch die Gedankenexperimente von *W. Wien* [Würzb. phys. med. Ges. 1908, p. 29 und Taschenb. f. Math. u. Phys. 2 (1911),

Gehen wir nun noch genauer auf den Unterschied zwischen dem *Einstein*schen und dem *Lorentz*schen Standpunkt ein. Vor allem hat *Einstein* gezeigt, daß bei einer tiefer gehenden Fassung des Zeitbegriffes der Unterschied zwischen „Ortszeit" und wahrer Zeit verschwindet. Die *Lorentz*sche Ortszeit erweist sich als die Zeit im bewegten System K' schlechtweg. Es gibt ebenso viele Zeiten und ebenso viele Räume, als es Galileische Bezugssysteme gibt. Sehr wertvoll ist es weiterhin, daß *Einstein* die Theorie unabhängig gemacht hat von speziellen Annahmen über die Konstitution der Materie.

Ist aber deshalb das Bestreben, die Lorentz-Kontraktion atomistisch zu deuten, vollkommen zu verwerfen? Wir glauben diese Frage verneinen zu müssen. Die Kontraktion eines Maßstabes ist kein elementarer, sondern ein sehr verwickelter Prozeß. Sie würde nicht eintreten, wenn nicht schon die Grundgleichungen der Elektronentheorie sowie die uns noch unbekannten Gesetze, welche den Zusammenhalt des Elektrons selbst bestimmen, gegenüber der Lorentz-Gruppe kovariant wären. Wir müssen eben postulieren, daß dies der Fall ist, wissen aber auch, daß dann, wenn dies zutrifft, die Theorie imstande sein wird, das Verhalten von bewegten Maßstäben und Uhren atomistisch zu erklären. Nur muß man sich dabei stets der Gleichwertigkeit der beiden relativ zueinander bewegten Koordinatensysteme bewußt bleiben.

Die erkenntnistheoretischen Grundlagen der Relativitätstheorie sind neuerdings auch von philosophischer Seite einer eingehenden Prüfung unterzogen worden.[43]) Dabei ist auch die Meinung vertreten worden, daß die Relativitätstheorie den Ursachbegriff über Bord wirft. Wir sind der Ansicht, daß es erkenntnistheoretisch vollkommen befriedigt, zu sagen, die Relativbewegung ist die Ursache der Kontraktion, da diese nicht die Eigenschaft *eines* Maßstabes, sondern eine Relation zwischen zwei Maßstäben ist, und daß man, um der Kausalität zu genügen, sich nicht wie *Holst* auf die Massen des Weltalls berufen muß.

---

p. 287] und von *G. N. Lewis* und *C. Tolman* [Phil. Mag. 18 (1909), p. 516, Fußnote] erwähnt werden, welche den Term $-\frac{\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}$ in der Transformationsformel für die Zeit veranschaulichen.

43) S. insbesondere *J. Petzold,* Ztschr. f. pos. Phil. 2 (1914), p 40; Verh. d. deutsch. phys. Ges. 20 (1918), p. 189 und 21 (1918), p. 495; Ztschr. f. Phys. 1 (1920), p. 467; *M. Jakob,* Verh. d. d. phys Ges. 21 (1919), p. 159 und 501; *H. Holst,* Kgl. danske Vid. Selsk. Math.-fys. Meddelelser II (1919), p. 11; Ztschr. f. Phys. 1 (1920), p. 32 und 3 (1920), p. 108.

6. Einsteins Additionstheorem der Geschwindigkeiten und seine Anwendung auf Aberration und Mitführungskoeffizient. Dopplereffekt. Es ist ohne weiteres zu sehen, daß die Art, wie man in der alten Kinematik Geschwindigkeiten zusammengesetzt hat, in der relativistischen Kinematik nicht mehr zu richtigen Resultaten führt. Z. B. ist klar, daß eine Geschwindigkeit $v < c$ mit c zusammengesetzt, wieder c geben muß und nicht $c + v$. Die Transformationsformeln (I) enthalten vollständig die Regeln, wie man hier zu verfahren hat. Es sei in K' irgendeine Bewegung

$$x' = x'(t'), \quad y' = y'(t'), \quad z' = z'(t')$$

gegeben. Durch (I) wird ihr eine Bewegung

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

in K zugeordnet. Es ist gefragt nach dem Zusammenhang der Geschwindigkeitskomponenten

$$\frac{dx'}{dt'} = u_x' = u' \cos\alpha', \quad \frac{dy'}{dt'} = u_y', \quad \frac{dz'}{dt'} = u_z', \quad u' = \sqrt{u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2}$$

in K' mit den entsprechenden Größen

$$\frac{dx}{dt} = u_x = u \cos\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = u_y, \quad \frac{dz}{dt} = u_z, \quad u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$$

in K. Aus (Ia) erhält man

$$dx = \frac{dx' + v\,dt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

und daraus mittels Division durch die letzte Gleichung

$$(10) \quad u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}}, \quad u_y = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdot u_y'}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}}, \quad u_z = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdot u_z'}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}}.$$

Diese Relationen finden sich auch in der eingangs zitierten Arbeit von *Poincaré*. Aus ihnen folgt sogleich

$$(11) \qquad u = \frac{\sqrt{u'^2 + v^2 + 2u'v\cos\alpha' - \left(\frac{u'v\sin\alpha'}{c}\right)^2}}{1 + \frac{u'v\cos\alpha'}{c^2}},$$

was man auch schreiben kann

$$(11a) \qquad \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}{1 + \frac{u'v\cos\alpha'}{c^2}}$$

und

$$(12) \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, u'\sin\alpha'}{u'\cos\alpha' + v}.$$

Die inversen Formeln resultieren daraus, wenn man v durch $-v$ ersetzt. Für die absoluten Beträge gilt also das kommutative Gesetz, nicht aber für die Geschwindigkeitsrichtungen. Die Regeln für die Spezialfälle, daß die zusammenzusetzenden Geschwindigkeiten parallel bzw. senkrecht zueinander stehen, können aus den Formeln (10) sofort abgelesen werden.

Ferner entnimmt man aus (11a), daß Unterlichtgeschwindigkeit zu Unterlichtgeschwindigkeit hinzugefügt, immer wieder nur Unterlichtgeschwindigkeit gibt. Daß überdies materielle Körper sich nicht relativ zueinander mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen können, folgt schon daraus, daß die Transformation (I) in diesem Fall imaginäre Werte für die Koordinaten liefert. Man kann aber noch mehr behaupten: Pflanzte sich eine Wirkung in einem System K mit Überlichtgeschwindigkeit fort, so gäbe es ein (gegen K mit Unterlichtgeschwindigkeit bewegtes) System K', in dem ein Ereignis, das in K ein zweites, zeitlich nachfolgendes verursacht, erst *nach* dem letzteren eintrifft. Setzten wir nämlich an $u_y = u_z = 0$, $u > c$, so wird nach der Umkehrung von (10)

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} < 0,$$

sobald man $\frac{c}{u} < \frac{v}{c} < 1$ wählt. Die Begriffe Ursache und Wirkung wären umgestoßen, so daß man auf die Unmöglichkeit, mit Überlichtgeschwindigkeit Signale zu senden, schließen kann.[44]) Die Lichtgeschwindigkeit spielt also in der Relativitätstheorie in vieler Hinsicht die Rolle einer unendlich großen Geschwindigkeit. Um gelegentlich aufgetauchten Mißverständnissen vorzubeugen, möchten wir jedoch noch besonders betonen, daß der Satz von der Unmöglichkeit der Überlichtgeschwindigkeit seiner Herleitung nach nur in den Galileischen Bezugssystemen gilt.

Wir wollen nun den Fall genauer betrachten, daß die eine der Geschwindigkeiten, die zusammengesetzt werden, gleich der Lichtgeschwindigkeit wird, wobei wir aber die Richtung des Lichtstrahles beliebig lassen; wir haben also $u' = c$. Dann folgt zunächst aus (11) $u = c$, d. h. Lichtgeschwindigkeit + Unterlichtgeschwindigkeit gibt wieder Lichtgeschwindigkeit. Die Beziehung (12) ergibt sodann in unserem Fall

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \sin \alpha'}{\cos \alpha' + \beta}. \tag{13}$$

Dies ist die relativistische Aberrationsformel, die bereits *Einstein* in

44) *A. Einstein,* Ann. d. Phys. 23 (1907), p. 371.

seiner ersten Arbeit hergeleitet hat. Eine strengere Begründung für dieselbe werden wir weiter unten geben. In Größen 1. Ordnung stimmt sie mit der klassischen Formel überein. Die Relativitätstheorie bringt hier insofern eine prinzipielle Vereinfachung, als die Fälle bewegte Lichtquelle — ruhender Beobachter und ruhende Lichtquelle — bewegter Beobachter völlig identisch werden.

Eine zweite wichtige Anwendung des *Einstein*schen Additionstheorems der Geschwindigkeiten, auf die nach einem unvollkommenen Versuch von *J. Laub*[45]) zuerst *Laue*[46]) hingewiesen hat, besteht in der Erklärung des *Fresnel*schen Mitführungskoeffizienten. Gegenüber der elektronentheoretischen Erklärung von *H. A. Lorentz*[47]) kann die Relativitätstheorie ebensowenig wie bei der Aberration im Ergebnis etwas Neues liefern, wenigstens was die der Beobachtung allein zugänglichen Größen 1. Ordnung anlangt. Die relativistische Ableitung hat jedoch den großen Vorzug, daß sie einfacher ist als die elektronentheoretische und vor allem, daß sie die Unabhängigkeit des Endresultates von speziellen Annahmen über den Mechanismus der Lichtbrechung in Evidenz setzt. Auch ist die Auffassung eine andere. Man hat früher den *Fizeau*schen Versuch geradezu als einen Beweis für die Existenz eines ruhenden Äthers angesehen, indem man ihn dahin interpretierte[48]), daß die Lichtwellen sich relativ zum bewegten Medium nicht mit der Geschwindigkeit $\frac{c}{n}$, sondern mit der Geschwindigkeit $\frac{c}{n} - \frac{v}{n^2}$ ausbreiten. Es liegt hier eine vom relativistischen Standpunkt unberechtigte Anwendung der gewöhnlichen Kinematik vor. Man hat die Sache vielmehr so aufzufassen, daß für einen mit dem Medium mitbewegten Beobachter das Licht sich normal mit der Geschwindigkeit $\frac{c}{n}$ nach allen Richtungen fortpflanzt. Gerade deshalb breitet es sich jedoch relativ zu einem mit der Geschwindigkeit v gegen das Medium bewegten Beobachter nicht mit der Geschwindigkeit $\frac{c}{n} + v$ aus, sondern mit einer anderen V, die sich aus (10) bestimmt. Wir wollen uns hier auf den Fall beschränken, daß die Strahlrichtung mit der Bewegungsrichtung des Beobachters gegen das

45) *J. Laub,* Ann. d. Phys. 23 (1907), p. 738.

46) *M. v. Laue,* Ann. d. Phys. 23 (1907), p. 989.

47) Vgl die Darstellung im Artikel V 14, Nr. 60 dieser Encyklopädie. Eine vereinfachte Ableitung des Mitführungskoeffizienten vom elektronentheoretischen Standpunkt gibt *H. A. Lorentz* in der Naturw. Rundsch. 21 (1906), p. 487.

48) Siehe z. B. den Artikel V 13, Nr. 21, p. 103 dieser Encyklopädie von *H. A. Lorentz.*

Medium übereinstimmt. Im allgemeinen Fall, auf den wir im Abschnitt III, Nr. **36** γ) zurückkommen werden, ist das Additionstheorem der Geschwindigkeiten mit Vorsicht zu handhaben. Es ist also zu setzen $u_x' = u' = \frac{c}{n}$, $u_x = u = V$, und die erste Gleichung (10) liefert

$$V = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{cn}} \sim \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \tag{14}$$

wenn wir nur die Glieder 1. Ordnung beibehalten. Für dispergierende Medien ist, wie bereits *H. A. Lorentz*[49]) bemerkt hat, auf der rechten Seite noch eine Korrektur anzubringen. Wie aus der Ableitung hervorgeht, bedeutet dann nämlich n den Brechungsindex derjenigen Wellenlänge λ', welche im mitbewegten System K' wahrgenommen wird. Wegen des Dopplereffektes, dessen Theorie wir sogleich darlegen werden, bestimmt sie sich aus der für das System K gültigen Wellenlänge λ zu

$$\lambda' = \lambda\left(1 + \frac{v}{u'}\right) = \lambda\left(1 + \frac{nv}{c}\right).$$

(Wir beschränken uns wieder auf Größen 1. Ordnung.) Also wird

$$\frac{c}{n(\lambda')} = \frac{c}{n(\lambda)} - \frac{c}{n^2}\frac{dn}{d\lambda} \cdot \lambda \frac{nv}{c},$$

und wenn wir noch n statt $n(\lambda)$ schreiben, erhalten wir endlich

$$V = \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right). \tag{14a}$$

Zeeman[50]) ist es gelungen, das Vorhandensein dieses Zusatzgliedes auch experimentell sicherzustellen.

Die Versuchsanordnung wurde neuerdings mehrfach modifiziert, indem man das Licht nicht an festen, sondern an bewegten Flächen austreten ließ, und zwar auch senkrecht auf der Bewegungsrichtung des Körpers, in dem die Mitführung bestimmt wird. Es wurden dabei bewegte Glas- oder Quarzkörper statt der Flüssigkeit bei *Fizeau* verwendet. Die Theorie bedarf dann gewisser Modifikationen gegenüber der des *Fizeau*schen Versuchs, und es resultieren andere Endformeln.[51]) Auch ersetzte man die translatorische Bewegung durch

---

49) *H. A. Lorentz,* Versuch einer Theorie d. elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern, Leiden 1895, p. 101.

50) *P. Zeeman,* Amst. Versl. 23 (1914), p. 245; 24 (1915), p. 18.

51) Solche Experimente wurden ausgeführt von *G. Sagnac,* Paris C. R. 157 (1913), p. 708 u. 1410; J. de Phys. (5) 4 (1914), p. 177 [Theorie bei *M. v. Laue,* München Ber. 1911, p. 404 und Das Relativitätsprinzip, 3. Aufl. 1919]; *F. Harreß,* Diss. Jena 1911 und Bericht von *O. Knopf,* Ann. d. Phys. 62 (1920), p. 389 [Zur theoretischen Deutung vgl.: *P. Harzer,* Astron. Nachr. 198 (1914), p. 378 und 199

eine Drehung. Besonders bemerkenswert ist der Versuch von *Sagnac*[51]), bei dem alle Apparatteile mitrotiert werden, weil er zeigt, daß die Rotation eines Bezugssystems relativ zu einem Galileischen System durch optische Experimente innerhalb des Systems selbst festgestellt werden kann. Das Ergebnis des Experiments ist mit der Relativitätstheorie völlig im Einklang. Schon früher hatte *Michelson*[51a]) einen ähnlichen Versuch vorgeschlagen, um die Drehung der Erde optisch nachzuweisen, und *Laue*[51a]) hat diesen Vorschlag vom theoretischen Standpunkt aus eingehend besprochen. Wir haben es hier mit einem optischen Gegenstück zum *Foucault*schen Pendelversuch zu tun.

Als letzte der drei für die Optik bewegter Körper fundamentalen Erscheinungen besprechen wir hier gleich den Dopplereffekt, obwohl er nichts mit dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten zu tun hat. Betrachten wir eine sehr weit entfernte Lichtquelle L, die im System K ruht. Mit einem zweiten System K' bewege sich ein Beobachter in der positiven x-Richtung mit der Geschwindigkeit v relativ zu K. Die Verbindungslinie Lichtquelle-Beobachter schließe in K gemessen einen Winkel α mit der x-Achse ein, und die z-Achse liege überdies senkrecht auf der durch diese beiden Richtungen bestimmten Ebene. Dann ist in K die Lichtphase bestimmt durch

$$e^{2\pi i \nu \left[t - \frac{x \cos\alpha + y \sin\alpha}{c}\right]},$$

wo ν die Normalfrequenz der Lichtquelle bedeutet. Wie wir im Abschnitt III, Nr. 32δ) noch genauer ausführen werden, muß die Phase eine Invariante sein. Es gilt also

$$e^{2\pi i \nu' \left[t' - \frac{x' \cos\alpha' + y' \sin\alpha'}{c}\right]} = e^{2\pi i \nu \left[t - \frac{x \cos\alpha + y \sin\alpha}{c}\right]}.$$

Mittels (I) folgt daraus sofort

$$\nu' = \nu \frac{1 - \beta \cos\alpha}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \tag{15}$$

$$\cos\alpha' = \frac{\cos\alpha - \beta}{1 - \beta \cos\alpha}, \qquad \sin\alpha' = \frac{\sin\alpha \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos\alpha}, \tag{16}$$

woraus man weiter entnimmt

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{\sin\alpha \sqrt{1 - \beta^2}}{\cos\alpha - \beta} \tag{16a}$$

(1914), p. 10; *A. Einstein,* Astron. Nachr. 199 (1914), p. 9 und 47]; endlich *P. Zeeman,* Amst. Versl. 28 (1919), p. 1451 und *P. Zeeman* u. *A. Snethlage,* Amst. Versl. 28 (1919), p. 1462; Amst. Proc. 22 (1920), p. 462 u. 512; Die Theorie *aller* dieser Versuche wird ausführlich entwickelt durch *M. v. Laue,* Ann. d. Phys. 62 (1920), p. 448.

51a) *A. A. Michelson,* Phil. Mag. 8 (1904), p. 716; *M. v. Laue,* München Ber., math.-phys. Kl. 1911, p. 405.

und

(16b) $$\operatorname{tg}\frac{\alpha'}{2} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Wir fügen noch die Transformationsformel für den räumlichen Winkel $d\Omega$ eines Strahlenbündels hinzu. Da

$$\frac{d\Omega'}{d\Omega} = \frac{d\cos\alpha'}{d\cos\alpha},$$

folgt aus

(16c) $$1 + \beta\cos\alpha' = \frac{1-\beta^2}{1-\beta\cos\alpha}$$

durch Differenzieren sofort

(17) $$d\Omega' = \frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\alpha)^2}\,d\Omega.$$

Formel (15) bringt den Dopplereffekt zum Ausdruck, (16a) ist die Umkehrung unserer früheren Gleichung (13). Wir haben also zugleich eine neue, strengere Ableitung der relativistischen Aberrationsformel gewonnen. Wie zu erwarten war, stimmt auch der Ausdruck für den Dopplereffekt mit dem klassischen in den Größen 1. Ordnung, die allein der Beobachtung zugänglich sind, überein. Wie bei der Aberration bringt hier die Relativitätstheorie insofern eine prinzipielle Vereinfachung, als die in der alten Theorie und beim Schall auch tatsächlich verschiedenen Fälle: ruhende Lichtquelle — bewegter Beobachter und bewegte Lichtquelle — ruhender Beobachter vollkommen identisch werden.

Für die Relativitätstheorie charakteristisch ist der Umstand, daß auch dann, wenn die Geschwindigkeit der Lichtquelle senkrecht zur Blickrichtung gelegen ist ($\cos\alpha = 0$), der Dopplereffekt nicht verschwindet. Vielmehr wird nach (15) in diesem Fall

(17a) $$\nu' = \frac{\nu}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Diese transversale Dopplerverschiebung nach Rot ist vollkommen im Einklang mit der für jede bewegte Uhr postulierten Zeitdilatation (Nr 5). Bald nachdem *Stark* den Dopplereffekt in dem von den Kanalstrahlteilchen emittierten Licht beobachtet hatte, wurde von *Einstein*[52]) auf die Möglichkeit hingewiesen, diesen transversalen Dopplereffekt durch Beobachtungen an Kanalstrahlen zu verifizieren. Bisher ist es jedoch nicht gelungen das Experiment durchzuführen, da es äußerst schwierig ist, α genau gleich 90^0 zu machen und den relativistischen transversalen Dopplereffekt vom gewöhnlichen longitudinalen zu trennen.

52) *A. Einstein,* Ann. d. Phys. 33 (1907), p. 197.

II. Mathematische Hilfsmittel.

7. Die vierdimensionale Raum-Zeitwelt (Minkowski). Wie im vorausgehenden Abschnitt dargelegt wurde, lassen sich die Postulate der Relativität und der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in die eine Forderung der Invarianz aller Naturgesetze gegenüber der Lorentz-Gruppe zusammenfassen Unter Lorentz-Gruppe wollen wir von nun an die Gesamtheit aller ∞^{10} linearen Transformationen verstehen, welche die Identität (II) befriedigen. Jede derartige Transformation kann aus Drehungen des Koordinatensystems (zu denen eventuell auch noch Spiegelungen hinzutreten können) und aus der speziellen Lorentz-Transformation vom Typus (I) zusammengesetzt werden.[53]) Mathematisch gesprochen ist also die spezielle Relativitätstheorie die Invariantentheorie der Lorentz-Gruppe.

Für ihre Entwicklung sind die Arbeiten *Minkowskis*[54]) grundlegend geworden. Durch konsequente Ausnutzung von zwei Umständen gelang es ihm, die Theorie in eine außerordentlich elegante mathematische Form zu bringen.

1. *Führt man statt der gewöhnlichen Zeit t die imaginäre Größe $u = ict$ ein, so verhalten sich in der Lorentz-Gruppe, also auch in den gegenüber dieser Gruppe invarianten Naturgesetzen, Raum und Zeitkoordinaten formal völlig gleich.* In der Tat geht dann die für die *Lorentz*-Gruppe charakteristische Invariante

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$$

53) Sobald man von den Transformationen der Koordinaten selbst zu denen ihrer Differentiale übergeht, entspricht den Verschiebungen des Koordinatenursprunges keine Transformation mehr (vgl. die folgende Nr.). Über die Einschränkung der in der Lorentz-Gruppe zulässigen Transformationen, welche von den Realitätsverhältnissen gefordert wird, und über die Umkehr der Zeit vgl. Nr. 22.

54) *H. Minkowski:* 1. Das Relativitätsprinzip, Vortrag gehalten in der math. Gesellsch. zu Göttingen am 5. Nov. 1907, abgedruckt im Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. 24 (1915), p. 372 und in den Ann. d. Phys. 47 (1915), p. 927. 2. Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern, Gött. Nachr. 1908, p. 53 und Math. Ann. 68 (1910), p. 472, auch separat, Leipzig 1911. 3. Raum und Zeit, Vortrag gehalten auf der Naturforscherversammlung in Köln am 21. Sept. 1908, abgedruckt in der Phys. Ztschr. 10 (1909), p 104, auch in der Sammlung, Das Relativitätsprinzip, Leipzig 1913. Im folgenden zitiert als *Minkowski* I, II und III.

Als Vorläufer *Minkowskis* muß *Poincaré* (Rend. Pal. l. c. Anm. 11) genannt werden, der bereits die imaginäre Koordinate $u = ict$ gelegentlich einführt und öfters schon diejenigen Größen zusammenfaßt und als Koordinaten eines Punktes im R_4 deutet, die man heute als Komponenten eines Vektors bezeichnet Auch der invariante Abstand spielt in seinen Überlegungen eine Rolle.

über in

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2. \tag{18}$$

Es ist deshalb zweckmäßig, nicht von vornherein Raum und Zeit zu trennen, sondern die vierdimensionale Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit an sich zu betrachten, die wir mit *Minkowski* kurz Welt nennen wollen.

2. Da der Ausdruck (18) gegenüber Lorentz-Transformationen invariant und außerdem eine quadratische Form der Koordinaten ist, liegt es nahe, ihn als *Quadrat der Entfernung* des Weltpunktes $P(x, y, z, u)$ vom Koordinatenursprung zu definieren in Analogie zum entsprechenden Entfernungsquadrat $x^2 + y^2 + z^2$ im gewöhnlichen Raum. *Dadurch wird in der Welt eine Geometrie (Metrik) festgelegt, die eine weitgehende Verwandtschaft mit der Euklidischen Geometrie hat.* Eine volle Identität beider Geometrien ist wegen des imaginären Charakters der einen Koordinate nicht vorhanden, der zum Beispiel zur Folge hat, daß zwei Weltpunkte mit dem Abstand Null nicht notwendig zusammenfallen müssen; in Nr. 22 werden diese Verhältnisse näher erläutert. Ungeachtet dieser Unterschiede in den geometrischen Verhältnissen können jedoch die Lorentz-Transformationen in Analogie zu den Drehungen des Koordinatensystems im R_3 als *orthogonale* lineare Transformationen der Weltkoordinaten und als (imaginäre) Drehungen der Weltachsen angesehen werden. Und ebenso wie der gewöhnliche Vektor- und Tensorkalkül aufgefaßt werden kann als Invariantentheorie der orthogonalen linearen Koordinatentransformationen des R_3, nimmt die Invariantentheorie der Lorentz-Gruppe die Form eines vierdimensionalen Vektor- und Tensorkalküls an.[55]) Zusammenfassend können wir also das *zweite* für die *Minkowski*sche Darstellung der Theorie wesentliche Moment so formulieren: *Infolge des Umstandes, daß die Lorentz-Gruppe eine quadratische Form der vier Weltkoordinaten invariant läßt, kann die Invariantentheorie dieser Gruppe geometrisch eingekleidet werden und erscheint dann als naturgemäße Verallgemeinernng des gewöhnlichen Vektor- und Tensorkalküls für eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit.*

8. **Übergang zu allgemeineren Transformationsgruppen.** Um hier gleich auch die für die allgemeine Relativitätstheorie nötigen mathematischen Hilfsmittel entwickeln zu können, wollen wir schon hier einige formale Ergebnisse derselben vorwegnehmen.

Es ist dort nicht mehr möglich, den Abstand zweier in endlicher Entfernung voneinander befindlicher Weltpunkte in so einfacher Weise

---

55) Die entscheidenden Ansätze für denselben finden sich in den zitierten Arbeiten *Minkowskis*. Eine systematische Darstellung wurde zuerst von *Sommerfeld* gegeben: *A. Sommerfeld*, Ann. d. Phys. 32 (1910), p. 749 und 33 (1910), p. 649.

zu definieren, wie es durch die Relation (18) geschehen ist. Doch läßt sich auch hier das Quadrat des Abstandes ds zweier *unendlich benachbarter* Punkte darstellen als quadratische Form der Koordinatendifferentiale. Wir bezeichnen die Koordinaten statt mit x, y, z, u mit x^1, x^2, x^3, x^4, kurz mit x^i, die Koeffizienten dieser Form entsprechend mit g_{ik} und lassen mit *Einstein* die Summenzeichen fort, indem wir ein für allemal festsetzen, daß über jeden Index, der zweimal vorkommt, zu summieren ist, wobei er die Werte 1, 2, 3, 4 durchläuft. Dann können wir schreiben

$$ds^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k \qquad (g_{ik} = g_{ki}). \tag{19}$$

Die Summen auf der rechten Seite sind so auszuführen, daß i und k unabhängig voneinander je die Werte 1, 2, 3, 4 durchlaufen. Die Kombinationen ik, in welchen $i \neq k$ ist, kommen deshalb insgesamt je zweimal, die Kombinationen $i\,i$ nur einmal in (19) vor. Dies hat zum Beispiel die Konsequenz, daß bei Differentiation der quadratischen Form

$$J = g_{ik}\,u^i\,u^k$$

nach u^i sich ergibt

$$\frac{dJ}{du^i} = 2 g_{ik}\,u^k, \tag{20}$$

was auch im Einklang ist mit dem *Euler*schen Satz

$$u^i \frac{dJ}{du^i} = 2J.$$

Im Linienelement (19) werden die g_{ik} im allgemeinen beliebige Funktionen der Koordinaten sein können. Dementsprechend hat es die allgemeine Relativitätstheorie, nachdem die Größen g_{ik} *explizite* eingeführt sind, mit der Invariantentheorie der Gruppe aller Punkttransformationen

$$x'^k = x'^k(x^1, x^2, x^3, x^4)$$

zu tun.

Wir geben noch mit teilweiser Ergänzung des bisher Gesagten die folgende Zusammenstellung der für die Physik wichtigsten Transformationsgruppen, indem wir dem Erlanger Programm von *F. Klein*[56a]) folgen. Jede der angeführten Gruppen enthält die vorangehenden als Untergruppen (B' ausgenommen).

56a) *F. Klein,* Programm zum Eintritt in die philosophische Fakultät, Erlangen 1872; wiederabgedruckt in den Math. Ann. 43 (1893), p. 63. Vgl. auch *Kleins* Vortrag: Über die geometrischen Grundlagen der Lorentz-Gruppe, Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. 19 (1910), p. 281 und Phys. Ztschr. 12 (1911), p. 17. Siehe auch die Bemerkungen in *F. Kleins* Gesammelten mathematischen Abhandlungen, 1. Band, Berlin 1921, p. 565—567.

A. Die Gruppe der orthogonalen linearen Transformationen (Lorentz-Gruppe), welche das Quadrat der Distanz

$$s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

invariant läßt. Dabei können die inhomogenen Transformationen nach Belieben mitgezählt werden oder nicht. Definiert man die Lorentz-Gruppe jedoch als die Gruppe der linearen Transformationen der Koordinaten*differentiale,* welche das *infinitesimale* Abstandsquadrat

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

invariant lassen, so besteht sie nur aus ∞^6 *homogenen* Transformationen. Für manche Anwendungen sind jedoch gerade die Verschiebungen des Koordinatenursprunges wichtig. Außerdem hat man noch zu unterscheiden zwischen den eigentlichen orthogonalen Transformationen mit der Funktionaldeterminante $+1$, welche sich stetig in die identische Transformation überführen lassen, und der umfassenderen Gruppe, die auch die gemischt orthogonalen Transformationen mit der Funktionaldeterminante -1 enthält, welche mit einer Umklappung verbunden sind.

B. Die affine Gruppe, die alle linearen Transformationen enthält.

B'. Die Gruppe der konformen Abbildungen, welche die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

des Lichtkegels in sich überführt, so daß

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = \varrho(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$$

wird, wo ϱ eine beliebige Funktion der Koordinaten ist. Über ihre Anwendbarkeit auf die *Maxwell*schen Gleichungen und ihre Rolle in der *Nordström*schen Gravitationstheorie vgl. Nr. **28** und **65** d).

C. Die projektive Gruppe der linear gebrochenen Transformationen. Auf diese beziehen sich hauptsächlich die älteren Untersuchungen der Mathematiker über nichteuklidische Geometrie. Für die Physik ist sie bisher von geringerer Wichtigkeit (vgl. jedoch Nr. **18**).

D. Die Gruppe aller Punkttransformationen, der die invariante Differentialform (19) adjungiert ist. Ihre Invariantentheorie ist die Tensorrechnung der allgemeinen Relativitätstheorie.

E. Über die noch umfassendere Gruppe von *Weyl* siehe Abschn. V, Nr. **65**.

9. Tensorrechnung bei affinen Koordinatentransformationen.[56]) Um den Übelstand zu vermeiden, daß ein und dieselben Formeln in

---

56) Außer der in Nr. 7 zitierten Literatur kommt hier in Betracht: *H. Graßmann,* Ausdehnungslehre von 1862, Berlin; *M. v. Laue,* Das Relativitätsprinzip, Braunschweig, 1. Aufl. 1911, 3. Aufl. 1919; *H. Weyl,* Raum—Zeit—Materie, Berlin, 1. Aufl. 1918,

der speziellen und in der allgemeinen Relativitätstheorie in verschiedener Weise geschrieben werden, wollen wir gleich die affine Gruppe unseren Betrachtungen zugrunde legen und uns nicht auf orthogonale Transformationen beschränken. Geometrisch bedeutet dies, daß wir auch schiefwinklige (nicht aber krummlinige) Koordinatensysteme zulassen. Die g_{ik} sind Konstante, haben aber nicht immer die Normalwerte $g_{ik} = \delta_i^k$ wie in den orthogonalen Systemen. Dabei ist das Größensystem δ_i^k definiert durch

$$(21) \qquad \delta_i^k = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad i \neq k \\ 1 & \;\;\text{„} \quad\;\; i = k. \end{cases}$$

Der Tensorkalkül kann nun in verschiedener Weise begründet werden. Entweder man deutet die Tensorkomponenten als Projektionen gewisser geometrischer Gebilde, oder man charakterisiert sie rein algebraisch durch ihr Verhalten bei Koordinatentransformationen. *Minkowski* faßt bloß den Vierervektor geometrisch auf, während er zu dem von ihm zuerst eingeführten Begriffe des Flächentensors (oder wie er sagt, des Vektors II. Art) auf rein algebraischem Wege gelangt. Durch *Sommerfelds* Arbeiten[55a]) wurde jedoch die geometrische Methode die herrschende und blieb sie, bis die Lorentz-Gruppe durch allgemeinere Transformationsgruppen ersetzt wurde. In der für den Tensorkalkül der allgemeinen Punkttransformationsgruppe grundlegenden Abhandlung von *Ricci* und *Levi-Civita*[56]), an die *Einstein*[56]) anknüpfte, findet sich nämlich außer einem Ansatz für die Interpretation der kontra- und kovarianten Vektorkomponenten keine geometrische Betrachtung. Erst durch spätere Arbeiten von *Hessenberg, Levi-Civita* und *Weyl*[57]) wurde das geometrische Moment wieder mehr betont.

2. Aufl. 1919, 3. Aufl. 1920; *G. Ricci* u. *T. Levi-Civita,* Méth. de calcul différentiel absolu et leurs application, Math. Ann. 54 (1901), p. 135; *A. Einstein,* Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, Berl. Ber. 1914, p. 1030 und: Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, Ann. d. Phys. 49 (1916), p. 769, auch separat als Broschüre, Leipzig 1916. Eine abweichende Terminologie verwenden *G. N. Lewis,* Proc. Am. Acad. 46 (1910), p. 165 und *E. B. Wilson* und *G. N. Lewis,* Proc. Am. Acad. 48 (1912), p. 387, vgl. auch den Bericht von *G. N. Lewis,* Jahrb. f. Rad. u. El. 7 (1910), p. 321. Ferner: *H. Kafka,* Ann. d. Phys. 58 (1919), p. 1; *H. Lang,* Diss. München 1919 und Ann. d. Phys. 61 (1920), p. 32. Über die reziproken Vektorsysteme vgl. man auch *C. Runge*, Vektoranalysis, Leipzig 1919, dessen Darlegung sich aber auf den R_3 beschränkt. Man vgl. zu den folgenden Darlegungen dieses Abschnittes auch *R. Weitzenböck,* Art. III E 7 dieser Enzykl., zweiter Teil, Abschn. C. — Es sei noch bemerkt, daß die hier dargelegte Tensorrechnung bei affinen Koordinatentransformationen nur der Terminologie nach von der in der Algebra üblichen Invariantentheorie der Formen verschieden ist.

55a) *A. Sommerfeld,* Ann. d. Phys. l. c.

57) Vgl. Literaturangabe in Nr. **10**, **14** u. **16**, Anm. 58a), 65), 66), 67) u. 77).

Voll zur Geltung kommt es auch in der Dissertation von *Lang.*[56]) Die rein algebraische Darstellung hat den Vorzug der Einfachheit und Übersichtlichkeit, die geometrische den der Anschaulichkeit. Wir folgen hier zunächst der ersteren, um dann für spezielle Fälle der hier entwickelten Begriffe und Sätze auch geometrische Interpretationen zu geben.

Die Größen $a_{iklm\ldots}{}^{rst\ldots}$, in denen die Indizes unabhängig voneinander die Werte 1, 2, 3, 4 annehmen können, heißen Tensorkomponenten, und zwar in den Indizes $iklm \ldots$ kovariante, in den Indizes $rst \ldots$ kontravariante Komponenten, wenn sie sich bei der affinen Koordinatentransformation

$$x'^i = \alpha_k{}^i x^k \tag{22}$$

mit der Umkehrung

$$x^k = \bar{\alpha}_i{}^k x'^i, \tag{23}$$

(worin die Koeffizienten $\bar{\alpha}_i{}^k$ die Bedingungen

$$\alpha_r{}^i \bar{\alpha}_k{}^r = \alpha_i{}^r \bar{\alpha}_r{}^k = \delta_i{}^k \tag{24}$$

erfüllen), wie folgt transformieren:

$$a'_{iklm\ldots}{}^{rst\ldots} = a_{\iota\varkappa\lambda\mu\ldots}{}^{\varrho\sigma\tau\ldots} \bar{\alpha}_i{}^\iota \bar{\alpha}_k{}^\varkappa \bar{\alpha}_l{}^\lambda \ldots \alpha_\varrho{}^r \alpha_\sigma{}^s \ldots \text{[57a]}). \tag{25}$$

Hierin ist der allgemeinen Vorschrift gemäß über die doppelt vorkommenden Indizes zu summieren. (Über die Verallgemeinerung dieser Definition für beliebige Koordinatentransformationen siehe Nr. **14.**) Die Zahl der Indizes der Komponenten eines Tensors heißt sein *Rang*. Die Tensoren 1. Ranges heißen auch Vektoren. Das einfachste Beispiel für solche sind die (kontravarianten) Koordinaten x^i eines Punktes. Auch die durch (21) definierten Größen $\delta_i{}^k$ bilden zufolge (24) die Komponenten eines Tensors, und zwar im Index i kovariante und im Index k kontravariante. Dieser Tensor $\delta_i{}^k$ hat überdies die Eigentümlichkeit, daß seine Komponenten in allen Koordinatensystemen die gleichen Werte annehmen.

Durch Addition zweier Tensoren erhält man einen neuen Tensor gleichen Ranges, durch Multiplikation einen Tensor höheren Ranges, z. B.

$$a_i + b_i = c_i,$$

$$a_i b_k = c_{ik}, \quad a_i b^k = c_i{}^k.$$

Durch Verjüngung, d. h. Summation über korrespondierende Indizes

---

57a) Wir hielten es für richtiger, die Benennungen „kontravariant" und „kovariant" entsprechend der historisch älteren Bezeichnung „kogredient" und „kontragredient" zu vertauschen, so daß dann die Größen, die sich so wie die Koordinaten transformieren, kovariant genannt würden. Doch fügen wir uns hier der jetzt allgemein üblichen, von *Ricci* u. *Levi-Civita* herrührenden, auch von *Einstein* und *Weyl* (l. c. Anm. 56) angewandten Bezeichnung.

der oberen und unteren Reihe, erhält man einen Tensor niedrigeren Ranges. So z. B. aus dem Tensor 2. Ranges t_i^k die Invariante $t = t_i^i$ (wobei unserer Vorschrift entsprechend das Summenzeichen weggelassen ist). Man kann auch Multiplikation und Verjüngung kombinieren. Man bilde z. B. zuerst durch Multiplikation aus a_i und b^i den Tensor

$$s_i^k = a_i b^k$$

und dann durch Verjüngung die Invariante

$$s = s_i^i.$$

Diese erhält man aber auch *direkt* aus den Vektoren a_i und b^i mittels der Operation

$$s = a_i b^i.$$

Ebenso erhält man aus dem Tensor 2. Ranges a_{ik} und dem Vektor x den Vektor

$$y_i = a_{ik} x^k$$

und die Invariante

$$J = a_{ik} x^i x^k.$$

Die hier angewandte Regel läßt auch eine Umkehrung zu: Ist $a_i x^i$ bei *beliebigem* Vektor x^i eine Invariante, so sind die a_i kovariante Komponenten eines Vektors; ist $a^{ik} = a^{ki}$ und $a^{ik} x_i x_k$ bei *beliebigem* Vektor x_i eine Invariante, so sind die a^{ik} kontravariante Komponenten eines Tensors 2. Ranges usf. Die Verallgemeinerung dieser Sätze für Tensoren beliebigen Ranges erhellt unmittelbar.

Ein Tensor heißt in den Indizes i und k symmetrisch bzw. schiefsymmetrisch, wenn seine Komponenten bei Vertauschung der Indizes i und k sich nicht ändern, bzw. bloß ihr Vorzeichen wechseln (z. B. $a_{ik} = a_{ki}$, bzw. $a_{ik} = -a_{ki}$). Wie leicht zu verifizieren ist, sind diese Relationen vom zufällig gewählten Koordinatensystem unabhängig. Dabei ist aber wesentlich, daß die beiden Indizes i und k *derselben* Indexreihe (entweder beide der oberen oder beide der unteren) angehören.

Die in (19) eingeführten Größen g_{ik} bilden ebenfalls einen Tensor, wie aus der Invarianz von $g_{ik} x^i x^k$ [58]) folgt. Er ist sowohl für die Geometrie als auch für die Physik von der größten Bedeutung und heißt der *metrische Fundamentaltensor*. Man kann aus den g_{ik} auf folgende Weise neue Tensorkomponenten gewinnen. Man bilde zuerst die Determinante g der g_{ik}

$$g = |g_{ik}|, \tag{26}$$

---

58) Im Gültigkeitsbereich der affinen Gruppe brauchen die beiden Punkte, deren Entfernungsquadrat durch $g_{ik} x^i x^k$ bestimmt ist, nicht als unendlich benachbart angenommen werden, vgl. die folgende Nr.

und dividiere dann die zu einem bestimmten Glied g_{ik} konjugierte Unterdeterminante durch g. Man erhält auf diese Weise 10 Größen g^{ik} ($g^{ik} = g^{ki}$), welche die Relationen

$$g_{i\alpha} g^{k\alpha} = \delta_i^k \tag{27}$$

erfüllen. (Es sei auch gleich die Beziehung

$$|g^{ik}| = \frac{1}{g} \tag{26a}$$

angemerkt.) Wir behaupten, daß sie kontravariante Tensorkomponenten 2. Ranges sind. Beweis: Aus den kontravarianten Komponenten a^k eines Vektors erhält man durch Multiplikation mit g_{ik} und Verjüngung kovariante Komponenten:

$$a_i = g_{ik} a^k. \tag{28}$$

Da die Umkehrung dieses Gleichungssystems

$$a^i = g^{ik} a_k \tag{28a}$$

lautet und die Komponenten a_k ganz beliebig sein können, folgt nach dem früher erwähnten Satz der Tensorcharakter der g^{ik}.

Wir bezeichnen die Größen a_i und a^i als kovariante und kontravariante Komponenten *desselben* Vektors. Analog definiert man an Tensoren höheren Ranges das Herauf- und Heruntersetzen der Indizes und betrachtet die betreffenden Größensysteme als zum *gleichen* Tensor gehörig, z. B.

$$a_{ik} = g_{ir} g_{ks} a^{rs} = g_{ir} a^r{}_k, \quad a^{ik} = g^{ir} g^{ks} a_{rs} = g^{ir} a_r{}^k. \tag{28b}$$

Durch das Herauf- und Heruntersetzen von Indizes wird die Richtigkeit einer Relation zwischen Tensoren nicht gestört, nur muß beim Verjüngen stets über korrespondierende Indizes der oberen und der unteren Reihe summiert werden, z. B.

$$\begin{aligned} J &= a_i b^i = a^i b_i, \\ c_i &= a_{ik} b^k = a_i{}^k b_k, \quad c^i = a^{ik} b_k = a^i{}_k b^k. \end{aligned} \tag{29}$$

Hiermit sind die Regeln der Tensoralgebra erschöpft. Die Tensoranalysis, d. h. die Vorschriften, wie man durch *Differentiation* von Tensoren nach den Koordinaten neue Tensoren ableitet, folgt für die affine Gruppe sofort aus der Tensoralgebra durch die Bemerkung, daß sich die Operation $\frac{\partial}{\partial x^k}$ formal in jeder Hinsicht wie die kovarianten Komponenten eines Vektors verhält. Die naturgemäße Ordnung und geometrische Deutung dieser Operationen kann erst bei der Besprechung des Tensorkalküls der allgemeinen Transformationsgruppe gegeben werden.

10. Die geometrische Bedeutung der kontra- und kovarianten Komponenten eines Vektors.[58a]) Den Vektor können wir geometrisch darstellen als Strecke und nennen ihn deshalb auch Linientensor. Seine kontravarianten Komponenten sind dann durch deren Parallelprojektionen auf die Koordinatenachsen gegeben. Wenn wir den Anfangspunkt des Vektors in den Koordinatenursprung legen, so sind sie zugleich identisch mit den Koordinaten des Endpunktes, und diese transformieren sich in der Tat beim Übergang zu einem neuen Koordinatensystem nach der vorigen Nr. genau so, wie es von den kontravarianten Komponenten eines Vektors definitionsgemäß verlangt wird. Analog wie im R_3 läßt sich ferner die Summe zweier Vektoren als Diagonale des Parallelogramms darstellen.

Wir müssen nun Entfernungen und Winkel einführen und gehen zu diesem Zweck von einem Cartesischen (orthogonalen) System (X_1, X_2, X_3, X_4) aus. In diesem ist das Längenquadrat eines Vektors $\mathfrak{x}$ mit den Komponenten X_i gegeben durch

$$\mathfrak{x}^2 = \sum_i X_i^2 \tag{30}$$ [59]),

und zwei Vektoren heißen aufeinander senkrecht stehend, wenn

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = \sum_i X_i Y_i \tag{31}$$

verschwindet. Im allgemeinen heißt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ das skalare Produkt der Vektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$. Die Invarianz dieser Definition gegenüber orthogonalen Transformationen folgt aus der Invarianz von (30) mittels der Relation

$$(\lambda\mathfrak{x} + \mu\mathfrak{y})^2 = \lambda^2\mathfrak{x}^2 + 2\lambda\mu(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) + \mu^2\mathfrak{y}^2.$$

Da diese Form in λ und μ definit ist[59]), folgt auch noch

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y})^2 - \mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2 \leqq 0,$$

(worin überdies das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ parallel sind: $\mathfrak{x} = a\mathfrak{y}$). Wir können also durch

$$\cos(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \frac{(\mathfrak{x}\mathfrak{y})}{\sqrt{\mathfrak{x}^2 \cdot \mathfrak{y}^2}} \tag{32}$$

den von zwei Richtungen eingeschlossenen Winkel definieren. Die geometrische Bedeutung des skalaren Produktes ist dieselbe wie im gewöhnlichen Raum: es ist gleich dem Produkt aus der Orthogonalprojektion des Vektors $\mathfrak{x}$ auf die Richtung von $\mathfrak{y}$ und der Länge von $\mathfrak{y}$.

58a) In den Darlegungen dieser Nr. schließen wir uns an *G. Hessenberg* an [Math. Ann. 78 (1917), p. 187].

59) Wir nehmen hier an, daß in (30) alle Quadrate das positive Zeichen haben und die Koordinaten reell sind. Auf die abweichenden Verhältnisse in der wirklichen Raum-Zeitwelt kommen wir in Nr. 22 zurück.

Man erkennt das sofort, wenn man das orthogonale Koordinatensystem speziell so wählt, daß eine Koordinatenachse die Richtung von $\mathfrak{y}$ hat, was immer möglich ist.

Um nun auch die Ausdrücke für Länge und skalares Produkt in einem beliebigen schiefwinkligen Koordinatensystem zu finden, charakterisieren wir zunächst ein solches System durch seine vier Achsenvektoren $\mathfrak{e}_k$ $k = 1, 2, 3, 4$, deren kontravariante Komponenten in diesem System

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_1 &= (1, 0, 0, 0) \\ \mathfrak{e}_2 &= (0, 1, 0, 0) \\ \mathfrak{e}_3 &= (0, 0, 1, 0) \\ \mathfrak{e}_4 &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned} \tag{33}$$

lauten. Ihre Längen sind im allgemeinen von 1 verschieden. Es wird also zwar die Länge eines Vektors selbst mit einem für alle Koordinatensysteme gleichen Maßstab gemessen, die Projektionen auf die Achsen dagegen mit Maßstäben, die sogar für die Achsen desselben Koordinatensystems im allgemeinen verschieden sind. Es kann dann jeder Vektor $\mathfrak{x}$ in der Form geschrieben werden

$$\mathfrak{x} = x^k \mathfrak{e}_k. \tag{34}$$

Für Entfernung und skalares Produkt folgt daraus sofort

$$\mathfrak{x}^2 = (x^i \mathfrak{e}_i) \cdot (x^k \mathfrak{e}_k) = (\mathfrak{e}_i \mathfrak{e}_k) x^i x^k = g_{ik} x^i x^k, \tag{35}$$

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = (x^i \mathfrak{e}_i)(y^k \mathfrak{e}_k) = (\mathfrak{e}_i \mathfrak{e}_k) x^i y^k = g_{ik} x^i y^k \tag{36}$$

mit

$$g_{ik} = (\mathfrak{e}_i \mathfrak{e}_k). \tag{37}$$

Wir haben also zugleich die geometrische Bedeutung der Größen g_{ik} ermittelt.

Nun führen wir das zum Vektorquadrupel $\mathfrak{e}_k$ reziproke Vektorquadrupel $\mathfrak{e}_k^*$ ein. Es ist definiert durch die Relationen

$$(\mathfrak{e}_i \mathfrak{e}_k^*) = \delta_i^k, \tag{38}$$

d. h. die Vektoren $\mathfrak{e}_i^*$ stehen auf den von je drei Vektoren $\mathfrak{e}_i$ gebildeten Räumen senkrecht, und ihre Längen sind außerdem geeignet normiert. Bezeichnen wir nun mit x_i die Parallelprojektionen von $\mathfrak{x}$ auf die reziproken Achsen gemessen mit den zugehörigen Einheitsmaßstäben, so gilt

$$\mathfrak{x} = x_k \mathfrak{e}_k^*. \tag{39}$$

Um den Zusammenhang zwischen den x_i und den x^i zu finden, multiplizieren wir nun die Gleichung

$$x_k \mathfrak{e}_k^* = x^k \mathfrak{e}_k \tag{39a}$$

skalar mit $\mathfrak{e}_i$. Mit Rücksicht auf (37) und (38) erhalten wir

(40) $$x_i = g_{ik} x^k,$$

das heißt: *Die Parallelprojektionen des Vektors $\mathfrak{x}$ auf die reziproken Achsen, gemessen mit den reziproken Einheitsmaßstäben sind seine kovarianten Komponenten.*[60]) Multiplizieren wir andererseits (39a) skalar mit $\mathfrak{e}_i^*$, so folgt

$$x^i = (\mathfrak{e}_i^* \mathfrak{e}_k^*) x_k,$$

also wegen $x^i = g^{ik} x_k$:

(41) $$g^{ik} = (\mathfrak{e}_i^* \mathfrak{e}_k^*).$$

Indem man die Ausdrücke (34) und (39) für $\mathfrak{x}$ einerseits einzeln quadriert, andererseits miteinander multipliziert, erhält man noch

(35a) $$\mathfrak{x}^2 = g_{ik} x^i x^k = g^{ik} x_i x_k = x_i x^i$$

und ebenso ergibt sich für das skalare Produkt aus

$$\mathfrak{x} = x^k \mathfrak{e}_k = x_k \mathfrak{e}_k^*, \quad \mathfrak{y} = y^k \mathfrak{e}_k = y_k \mathfrak{e}_k^*:$$

(36a) $$(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = g_{ik} x^i y^k = g^{ik} x_i y_k = x_i y^i = x^i y_i.$$

Es bleibt noch zu untersuchen, wie sich die Achsenvektoren $\mathfrak{e}_i$ bei einer Koordinatentransformation verhalten. Sind $\mathfrak{e}_i'$ die Achsenvektoren des neuen (gestrichenen) Koordinatensystems, dann gilt für einen beliebigen Vektor $\mathfrak{x}$

$$\mathfrak{x} = x'^i \mathfrak{e}_i' = x^k \mathfrak{e}_k.$$

Mit Rücksicht auf (22) und (23) folgt daraus

(42) $$\mathfrak{e}_i' = \bar{\alpha}_i^k \mathfrak{e}_k$$

und

(43) $$\mathfrak{e}_k = \alpha_k^i \mathfrak{e}_i'.$$

Die $\bar{\alpha}_i^k$ sind also die Komponenten der neuen Achsenvektoren im alten System, die α_k^i die der alten Achsenvektoren im neuen System. Man bestätigt überdies die aus (25) folgenden Transformationsformeln für den Fundamentaltensor g_{ik} auf Grund von (37) und (42).

---

60) Bei *Ricci* und *Levi-Civita* sowie bei *Lang*, l. c. Anm. 56), werden die kovarianten Vektorkomponenten als *Orthogonalprojektionen* auf die ursprünglichen Achsen gedeutet. Dann muß aber noch ein Faktor hinzugefügt werden, der die Einfachheit und Symmetrie der Formeln stört. Aus (39) folgt nämlich durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{e}_i : x_i = (\mathfrak{e}_i \mathfrak{x})$. Die Orthogonalprojektion von $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{e}_i$ ist also gleich

$$\frac{x_i}{|\mathfrak{e}_i|} = \frac{x_i}{\sqrt{(\mathfrak{e}_i \mathfrak{e}_i)}} = \frac{x_i}{\sqrt{g_{ii}}} \quad \text{zufolge von (37).}$$

(Über i ist hierin *nicht* zu summieren.) Es sei noch bemerkt, daß im Cartesischen System, in dem die g_{ik} die Werte δ_i^k annehmen, der Unterschied zwischen kontra- und kovarianten Komponenten verschwindet und auch die Achsenvektoren $\mathfrak{e}_i$ dieses Koordinatensystems mit ihrem reziproken Vektorquadrupel identisch werden.

11. Flächen- und Raumtensoren. Vierdimensionales Volumen. Nach der Strecke ist das nächsthöhere geometrische Gebilde die Fläche, dementsprechend folgt auf den Linientensor der Flächentensor. Zu diesem gelangt man auf folgendem Weg. Zwei Vektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ spannen ein zweidimensionales Parallelepiped auf. Dessen achsenparallele Projektionen auf die sechs zweidimensionalen Koordinatenebenen, gemessen in den sechs Parallelepipeden der Achsenvektoren $\mathfrak{e}_i$, sind gegeben durch

$$\xi^{ik} = x^i y^k - x^k y^i. \tag{44}$$

Sie bilden also die kontravarianten Komponenten eines Tensors 2. Ranges, und zwar eines schiefsymmetrischen: es bestehen die Relationen

$$\xi^{ik} = -\xi^{ki}. \tag{45}$$

Läßt man die reziproken Achsen und die aus den $\mathfrak{e}_i^*$ gebildeten Einheitsflächen an die Stelle der oben verwendeten treten, so erhält man die kovarianten Komponenten

$$\xi_{ik} = x_i y_k - x_k y_i. \tag{44a}$$

Man nennt nun jeden schiefsymmetrischen Tensor 2. Ranges, d. h. jeden Tensor 2. Ranges, dessen Komponenten die Relationen (45) erfüllen, einen Flächentensor. Zwar läßt sich nicht jeder solche Tensor in der Form (44) darstellen, — denn die ξ^{ik} dieser speziellen Form erfüllen die Identität

$$\xi^{12}\xi^{34} + \xi^{13}\xi^{42} + \xi^{14}\xi^{23} = 0 \tag{46}$$

— wohl aber als die Summe zweier einfacher Flächentensoren der Form (44). Die Invariante

$$J = \tfrac{1}{2}\xi_{ik}\xi^{ik} \tag{47}$$

stellt den *Inhalt* des Parallelogramms dar. Sind allgemeiner ξ_{ik} und η_{ik} zwei Flächentensoren der speziellen Form (44), so gibt die Invariante

$$J = \tfrac{1}{2}\xi_{ik}\eta^{ik} \tag{48}$$

das Produkt aus der Orthogonalprojektion des Parallelepipedes ξ_{ik} auf η_{ik} und der Größe von η_{ik} an. Die analogen Invarianten für allgemeine Flächentensoren sind die Summe von Produkten derartiger Flächengrößen.[60a]) Über die invariantentheoretische Bedeutung der linken Seite von (46) beim allgemeinen Flächentensor siehe Nr. 12.

60a) Wir möchten in diesem Zusammenhang auf die *Plücker*schen Linienkoordinaten hinweisen. Sind $x_1 \dots x_4$ und $y_1 \dots y_4$ die homogenen Koordinaten zweier Punkte einer Geraden des dreidimensionalen Raumes (so daß $\frac{x_1}{x_4} \cdots \frac{x_3}{x_4}$ und $\frac{y_1}{y_4} \cdots \frac{y_3}{y_4}$ deren gewöhnliche Koordinaten sind), so läßt sich die Gerade

Der Raumtensor wird dargestellt durch ein dreidimensionales Raumstück, welches von drei Vektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ aufgespannt wird. Seine Komponenten sind gegeben durch die Determinanten

$$(49) \qquad \xi^{ikl} = \begin{vmatrix} \xi^i & \eta^i & \zeta^i \\ \xi^k & \eta^k & \zeta^k \\ \xi^l & \eta^l & \zeta^l \end{vmatrix}, \qquad \xi_{ikl} = \begin{vmatrix} \xi_i & \eta_i & \zeta_i \\ \xi_k & \eta_k & \zeta_k \\ \xi_l & \eta_l & \zeta_l \end{vmatrix}.$$

Sie erfüllen die Symmetriebedingungen, daß sie beim Vertauschen zweier Indizes das Vorzeichen wechseln. Die Zahl der unabhängigen Komponenten ist 4. Zum Unterschied vom Flächentensor ist (49) schon der allgemeinste Raumtensor, d. h. jeder Tensor 3. Ranges, dessen Komponenten die erwähnten Symmetriebedingungen erfüllen, läßt sich in der Form (49) darstellen.

Vier Vektoren $\mathfrak{x}^{(1)}$, $\mathfrak{x}^{(2)}$, $\mathfrak{x}^{(3)}$, $\mathfrak{x}^{(4)}$ spannen ein vierdimensionales Volumelement auf. Im cartesischen System ist dessen Größe einfach gleich der Determinante der 4×4 Komponenten der Vektoren $\mathfrak{x}$. Nach (34) und (39) drückt sich diese durch die Komponenten im schiefwinkligen System wie folgt aus:

$$(50) \qquad S = |\overset{(i)}{x}{}^k| \cdot |\mathfrak{e}_i| = |\overset{(i)}{x}_k| \cdot |\mathfrak{e}_i^*|,$$

wie man durch Anwendung des Multiplikationssatzes der Determinanten findet. $|\mathfrak{e}_i|$ und $|\mathfrak{e}_i^*|$ bedeuten darin die Determinanten der 4×4 Komponenten der Vektoren $\mathfrak{e}_i$ bzw. $\mathfrak{e}_i^*$ im cartesischen System. Man erhält ihren Wert durch Quadrieren und nochmalige Anwendung des

---

definieren durch die sechs Größen $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$, deren *Verhältnisse* von der speziellen Wahl der zwei Punkte auf der Geraden unabhängig sind. Diese Größen p_{ik} genügen der Relation (46). Die formale Analogie zum Flächentensor in der vierdimensionalen Welt ist eine vollkommene.

Ist ferner ξ_{ik} zunächst ein spezieller Flächentensor vom Typus (44a), so wird durch $dx^i = \xi^{ik} x_k$ einem jeden Vektor x^i eine infinitesimale Verschiebung zugeordnet. Da dx^i in der Ebene des Flächentensors ξ^{ik} liegt und auf x_k senkrecht steht, hat man es mit einer infinitesimalen Drehung des R_4 vom Betrag und Umlaufssinn von ξ_{ik} zu tun. Ist ξ_{ik} ein Flächentensor von allgemeiner Art, so entsteht die betreffende Verschiebung durch Addition zweier zueinander orthogonaler Drehungen und kann als *Schraubung* bezeichnet werden. *Minkowski* selbst (III, l. c. Anm. 54) hebt die Analogie des Flächentensors zur Kraftschraube hervor. Die entsprechende Analogie im dreidimensionalen Raum findet eine weitgehende Anwendung auf die Mechanik in der Schraubentheorie von *Sir Robert Ball* (A Treatise on the Theory of Screws, Cambridge 1900). Vgl. auch den zugehörigen Aufsatz von *F. Klein,* Ztschr. Math. Phys. 47 (1902), p. 237 und Math. Ann. 62 (1906), p. 419.

Es sei auch bemerkt, daß die selbständige Bedeutung der Flächentensoren gegenüber den Vektoren in mehrdimensionalen Mannigfaltigkeiten schon von *H. Graßmann,* l. c. Anm. 56), erkannt und näher ausgeführt wurde.

Multiplikationssatzes der Determinanten mit Rücksicht auf (37), (41) und (26a) zu

$$|\mathfrak{e}_i|^2 = |(\mathfrak{e}_i\mathfrak{e}_k)| = |g_{ik}| = g; \qquad |\mathfrak{e}_i^*|^2 = |(\mathfrak{e}_i^*\mathfrak{e}_k^*)| = |g^{ik}| = \frac{1}{g}.$$

Also ergibt sich endlich für das *invariante* Volumen:

$$\Sigma = |\overset{(i)}{x}{}^k| \cdot \sqrt{g} = |\overset{(i)}{x}_k| \cdot \frac{1}{\sqrt{g}}. \tag{51}$$

Da sich das vierfache Integral

$$\int dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4,$$

welches wir der Kürze wegen einfach $\int dx$ schreiben wollen, beim Übergang zu einem neuen Koordinatensystem wie die Determinante $|\overset{(i)}{x}{}^k|$ transformiert, ist das Volumen eines beliebigen Gebietes nach (51) gegeben durch

$$\Sigma = \int \sqrt{g}\, dx. \tag{52}$$

Ist das Integral

$$\int \mathfrak{W}\, dx$$

eine Invariante, so nennen wir mit *Weyl*[61]) $\mathfrak{W}$ eine skalare Dichte. Eine solche entsteht aus einem gewöhnlichen Skalar durch Multiplikation mit $\sqrt{g}$.

Analoges gilt von der Vektordichte mit den Komponenten $\mathfrak{w}^i$, die durch die Bedingung definiert ist, daß die (über ein unendlich kleines Gebiet erstreckten) Integrale

$$\int \mathfrak{w}^i\, dx$$

einen Vektor bilden. Allgemein sprechen wir in einem analogen Sinn von einer Tensordichte. Man erhält sie ebenfalls aus gewöhnlichen Tensoren durch Multiplikation mit $\sqrt{g}$.

Bei der in Nr. **9** besprochenen Systematik der Tensoren wurde auf die Symmetriebeziehungen der Komponenten keine Rücksicht genommen. Wir haben jedoch gesehen, daß z. B. die schiefsymmetrischen von den symmetrischen Tensoren 2. Ranges in geometrischer Hinsicht vollständig verschieden sind. Bei der Tensoranalysis wird diese Verschiedenheit von neuem hervortreten (s. Nr. **19** u. **20**). Es empfiehlt sich infolgedessen nach dem Vorgang von *Weyl*[62]) und in Anlehnung an die Terminologie in *Graßmanns* Ausdehnungslehre neben der früher verwendeten auch eine neue Systematik der Tensoren einzuführen. Man bilde wie in (44) und (49) die Größenreihe $\xi^i, \xi^{ik}, \xi^{ikl}, \ldots$ Die Tensoren 1. Stufe (Linientensoren) 1., 2., 3., ... Ranges entstehen dann aus den linearen, quadratischen, kubischen, ... Formen der *einen*

61) *H. Weyl,* Ztschr. f. Math. 2 (1918), p. 384; Raum — Zeit — Materie, 3. Aufl., Berlin 1920, p. 92 ff.

62) *H. Weyl,* Raum—Zeit—Materie, 1. Aufl., Berlin 1918, p. 45—51.

Verschiebung ξ^i $\quad a_i\xi^i,\quad a_{ik}\xi^i\xi^k,\quad a_{ikl}\xi^i\xi^k\xi^l,\ \ldots$

Ebenso bei den Tensoren 2. Stufe (Flächentensoren):

$$b_{ik}\xi^{ik},\quad b_{iklm}\xi^{ik}\xi^{lm},\ \ldots$$

Damit die Koeffizienten durch die Formen eindeutig bestimmt sind, müssen sie gewissen Normierungsbedingungen genügen. Die a_{ik}, $a_{ikl}\ldots$ z. B. müssen bei Vertauschung zweier beliebiger Indizes unverändert bleiben, die b_{ik} müssen schiefsymmetrisch sein, endlich muß für die Komponenten b_{iklm} des Flächentensors 2. Ranges gelten:

(53a) $$b_{iklm} = -b_{kilm} = -b_{ikml} = b_{lmik},$$

(53b) $$b_{iklm} + b_{ilmk} + b_{imkl} = 0,$$

letzteres folgt aus den Relationen (46). Ein derartiger Flächentensor 2. Ranges ist der Krümmungstensor (s. Nr. **16**). Die Zahl der unabhängigen Komponenten eines solchen Tensors reduziert sich im n-dimensionalen Raum auf Grund von (53a) und (53b) auf $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$. Die hier dargelegte Systematik umfaßt bei weitem nicht alle Größen, die unter die in Nr. **9** formulierte Definition des Tensors fallen. Doch spielen nur diejenigen Tensoren, die sich ihr einordnen lassen, in den physikalischen Anwendungen eine Rolle.

12. Duale Ergänzung zu Flächen- und Raumtensoren. In einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit kann jedem Flächenstück

(54) $$\xi^{ik} = x^i y^k - x^k y^i$$

ein normales zugeordnet werden von der Eigenschaft, daß alle Geraden des letzteren auf allen Geraden des ersteren senkrecht stehen. Wir nennen es zu ξ^{ik} dual, wenn es außerdem dieselbe Größe hat. Es ist zunächst bestimmt durch

$$\xi^{*ik} = x^{*i}y^{*k} - x^{*k}y^{*i},$$

worin die Vektoren x^{*i}, y^{*i} auf x^i, y^i normal sind:

$$x_i^* x^i = 0,\quad x_i^* y^i = 0,\quad y_i^* x^i = 0,\quad y_i^* y^i = 0.$$

Eine einfache Rechnung zeigt dann, daß die Komponenten ξ^{*ik} aus den Komponenten von ξ_{ik} einfach durch eine gerade Permutation hervorgehen, wobei aber noch ein Faktor $\sqrt{g}$ bzw. $\frac{1}{\sqrt{g}}$ hinzuzufügen ist:

(54a) $$\begin{aligned}\xi^{*14} &= \frac{1}{\sqrt{g}}\xi_{23}, & \xi^{*24} &= \frac{1}{\sqrt{g}}\xi_{31}, & \xi^{*34} &= \frac{1}{\sqrt{g}}\xi_{12},\\ \xi^{*23} &= \frac{1}{\sqrt{g}}\xi_{14}, & \xi^{*31} &= \frac{1}{\sqrt{g}}\xi_{24}, & \xi^{*12} &= \frac{1}{\sqrt{g}}\xi_{34}.\end{aligned}$$

Analog durch Vertauschung von ξ^{ik} und ξ^{*ik}:

(54b) $$\begin{aligned}\xi_{14}^* &= \sqrt{g}\,\xi^{23}, & \xi_{24}^* &= \sqrt{g}\,\xi^{31}, & \xi_{34}^* &= \sqrt{g}\,\xi^{12},\\ \xi_{23}^* &= \sqrt{g}\,\xi^{14}, & \xi_{31}^* &= \sqrt{g}\,\xi^{24}, & \xi_{12}^* &= \sqrt{g}\,\xi^{34}.\end{aligned}$$

Durch die gleichen Relationen ordnet man dem Flächentensor ξ^{ik} auch dann den dualen zu, wenn dieser nicht von der speziellen Form (44) ist. Durch skalare Multiplikation des Flächentensors ξ_{ik} mit seinem dualen Tensor ξ^{*ik} nach (48) erhält man eine Invariante von besonders einfachem Bau:

$$J = \frac{1}{2}\xi_{ik}\xi^{*ik} = \frac{1}{\sqrt{g}}(\xi_{12}\xi_{34} + \xi_{13}\xi_{42} + \xi_{14}\xi_{23}). \tag{46a}$$

In genau entsprechender Weise läßt sich einem Raumtensor ξ^{ikl} ein dualer Vektor ξ^{*i} zuordnen. Es ist dies diejenige Strecke, die auf allen Geraden des Raumstückes senkrecht steht und deren Länge gleich ist dem Voluminhalt desselben. Es ergibt sich wieder für irgendeine gerade Permutation $iklm$:

$$\xi^{*m} = \frac{1}{\sqrt{g}}\xi_{ikl}, \qquad \xi_m{}^* = \sqrt{g}\,\xi^{ikl}. \tag{55}$$

13. Übergang zur allgemeinen Geometrie Riemanns. Wir gehen nun dazu über, die Invariantentheorie der Gruppe aller Punkttransformationen zu besprechen. Hierzu ist erforderlich, zunächst auf die Maßbestimmung und die Sätze der allgemeinen Riemannschen Geometrie einzugehen. Die älteren Geometrien von *Bolyai* und *Lobatschewsky*, welche das Euklidische Parallelenaxiom aufgegeben haben, behalten alle das Axiom der freien Beweglichkeit starrer Punktsysteme (Kongruenzaxiom) bei und gelangen deshalb bloß zu den speziellen Fällen der Räume konstanter Krümmung. Auch von der projektiven Geometrie ausgehend kommt man zu keiner allgemeineren Metrik. Die Möglichkeit einer solchen wurde zuerst von *Riemann*[63]) ins Auge gefaßt. Die Modifikation des Begriffes vom starren Körper in der speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie hat es mit sich gebracht, daß man heute die so lange als evident angesehenen Kongruenzaxiome aufgeben und demnach die allgemeine Riemannsche Geometrie den Betrachtungen über Raum und Zeit zugrunde legen muß.

Wir nehmen an, daß sich eine gewisse endliche Umgebung eines jeden Punktes der Mannigfaltigkeit, die wir betrachten wollen (wir wollen der Kürze wegen bisweilen einfach von „Raum" sprechen) eineindeutig und stetig durch Koordinaten $x^1, x^2, \ldots x^n$ kennzeichnen läßt. Von der *ganzen* Mannigfaltigkeit braucht dies keineswegs vor-

63) *B. Riemann,* Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen. Habilitationsvortrag, gehalten im Jahr 1854. Aus dem Nachlaß *Riemanns* herausgegeben von *Dedekind* in den Gött. Nachr. 13 (1868), p. 133. [*Riemanns* Ges. Werke, p. 254.] Neuerdings separat als Broschüre erschienen, herausgegeben von *H. Weyl,* Berlin 1920.

ausgesetzt zu werden. Die Zahl n der Dimensionen der Mannigfaltigkeit lassen wir zunächst beliebig. Der Grundbegriff der Metrik ist dann die Länge s einer gegebenen Kurve

$$x^k = x^k(t), \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

wo t einen beliebigen Parameter bedeutet. Erst nachdem sie irgendwie physikalisch definiert ist, können die Ergebnisse der mathematischen Untersuchung auf die in der Wirklichkeit vorhandene Mannigfaltigkeit angewendet werden. Im R_3 müssen wir uns jedenfalls den starren Maßstab durch einen beliebig biegsamen Maßfaden ersetzt denken.

Es handelt sich nun darum, über die Funktion $s(t)$ plausible Annahmen zu machen. Indem solche Annahmen bloß über den Differentialquotienten $\frac{ds}{dt}$ gemacht werden, kennzeichnet sich die Riemannsche Geometrie als Nahegeometrie, im Gegensatz zur Euklidischen Ferngeometrie. Als erstes Axiom stellen wir folgendes auf.

Axiom I. *Der Differentialquotient* $\frac{ds}{dt}$ *in einem bestimmten Kurvenpunkt soll bloß abhängen von den Differentialquotienten* $\frac{dx^k}{dt}$ *in diesem Punkt, nicht von den höheren Differentialquotienten und vom sonstigen Verlauf der Kurve.*

Da die Bogenlänge s von der Wahl des Parameters t unabhängig ist, folgt daraus, daß $\frac{ds}{dt}$ eine homogene Funktion ersten Grades der Größen $\frac{dx^k}{dt}$ sein muß. Als Abstand zweier Punkte wird man die Bogenlänge der kürzesten sie verbindenden Linie bezeichnen. Eine solche Linie heißt auf einer zweiten senkrecht stehend, wenn die Distanz von irgendeinem Punkt P der Linie 1 vom Schnittpunkt S beider Linien kleiner ist als die Distanz von P von irgendeinem anderen Punkte Q der Linie 2. Gemäß dem Axiom I. kommt es dabei auf die Lage des Punktes P auf der Linie 1 nicht an, sondern nur auf die Differentialquotienten $\left(\frac{dx_k}{dt}\right)_1$ und $\left(\frac{dx_k}{dt}\right)_2$ in S. Man kann daher auch sagen, die Richtung 1 ist orthogonal zur Richtung 2. Im allgemeinen wird daraus nicht folgen, daß auch 2 orthogonal auf 1 ist. Wir wollen jedoch die Art der Funktion $\frac{ds}{dt}$ durch ein zweites Axiom festlegen:

Axiom II. $\frac{ds}{dt}$ *soll die Quadratwurzel aus einer quadratischen Form der* $\frac{dx_k}{dt}$ *sein:*

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{g_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt}},$$

wofür wir kürzer schreiben können:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k. \tag{19}$$

Dies ist die in Nr. 8 angeschriebene Gleichung. Das Axiom II. kann als *Pythagoreis*cher Lehrsatz für unendlich benachbarte Punkte bezeichnet werden. Gerade diese Einschränkung seines Gültigkeitsbereiches charakterisiert den Übergang von der Fern- zur Nahegeometrie. Infolge des Axioms II. ist die Orthogonalität zweier Richtungen eine reziproke Beziehung. Umgekehrt, wenn dies immer eine reziproke Beziehung ist, muß das Linienelement von der Form (19) sein.[64]) Man kann deshalb das Axiom II. auch durch das folgende ersetzen:

Axiom II'. *Wenn die Richtung* 1 *in* P *orthogonal ist auf der Richtung* 2, *so ist auch* 2 *orthogonal auf* 1.

Legt man das Axiom II zugrunde, so kommt man für $n = 2$ auf die *Gauß*sche Geometrie auf beliebig gekrümmten Flächen zurück. Sowie man sich jede derartige Fläche in einem euklidischen R_3 denken kann, kann auch jeder Riemannsche Raum R_n in einem euklidischen $R_{\frac{n(n+1)}{2}}$ eingebettet werden $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right.$ entspricht dabei der Zahl der Komponenten g_{ik}). Doch lassen sich alle für die Relativitätstheorie wichtigen geometrischen Sätze auch herleiten, ohne daß von dieser Möglichkeit Gebrauch gemacht wird. Der Winkel (1, 2) zwischen zwei Richtungen dx^i und δx^i in einem Punkt P kann genau so definiert werden wie im euklidischen Raum, nur müßten die geraden Strecken durch unendlich kleine kürzeste Linien ersetzt werden. Man findet analog zu (32)

$$\cos(1,2) = \frac{g_{ik}\,dx^i\,\delta x^k}{\sqrt{g_{ik}\,dx^i\,dx^k} \cdot \sqrt{g_{ik}\,\delta x^i\,\delta x^k}}. \tag{56}$$

Durch Bestimmung des Linienelementes in $\frac{n(n+1)}{2}$ unabhängigen Richtungen (d. h. in $\frac{n(n+1)}{2}$ Richtungen, für welche die $\frac{n(n+1)}{2}$ reihige Determinante der zugehörigen Größen $dx^i dx^k$ nicht verschwindet) können die g_{ik} in jedem Punkt ermittelt werden.

Bei einer beliebigen Punkttransformation

$$x'^i = x'^i(x^1 \dots x^n) \qquad (i = 1, 2, \dots n) \tag{57}$$

transformieren sich die Differentiale dx^k homogen linear

$$dx'^i = \alpha_k^{\ i}\,dx^k, \tag{58}$$

$$\alpha_k^{\ i} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}, \tag{59}$$

mit den entsprechenden inversen Relationen,

---

64) *D. Hilbert*, Grundlagen der Physik, 2. Mitt., Gött. Nachr. 1917, p. 53; *W. Blaschke*, Leipz. Ber., math.-phys. Kl. 68 (1916), p. 50.

$$dx^k = \bar{\alpha}_i^k dx'^i, \tag{60}$$

$$\bar{\alpha}_i^k = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \tag{61}$$

genau wie in (22) die Koordinaten. Dies ist der Zusammenhang der allgemeinen Transformationsgruppe mit der affinen Gruppe. Wesentlich ist jedoch der Umstand, daß die α_k^i nicht beliebige Funktionen der Koordinaten sein können, sondern den Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial \alpha_k^i}{\partial x^l} = \frac{\partial \alpha_l^i}{\partial x^k}, \tag{62}$$

die man auch durch die inversen Bedingungen

$$\frac{\partial \bar{\alpha}_i^k}{\partial x'^l} = \frac{\partial \bar{\alpha}_l^k}{\partial x'^i} \tag{63}$$

ersetzen kann, genügen müssen. An einem bestimmten Punkt P_0 können die α_i^k jedoch beliebige Werte annehmen. Solange es sich also um Relationen zwischen Tensoren in einem und demselben Punkt, also nicht um Differentiation und Integration eines Tensorfeldes handelt, können alle Tensoroperationen der affinen Gruppe unmittelbar übertragen werden. Man kann diesen Sachverhalt auch so ausdrücken: In der Tensoralgebra ist der Riemannsche Raum in dem ins Auge gefaßten Punkt P_0 ersetzbar durch den „Tangentialraum", den man erhält, indem man den g_{ik} überall dieselben konstanten Werte $g_{ik}(P_0)$ erteilt, welche sie im Riemannschen Raume bloß im Punkt P_0 annehmen. Die Form ds^2 ist ihrer Bedeutung nach invariant, die g_{ik} bilden die kovarianten Komponenten eines Tensors zweiten Ranges. Auch die Regeln für den Übergang zu den kontravarianten Komponenten g^{ik} und für die Bildung des Volumelementes $d\Sigma$ können aus der Tensoralgebra übernommen werden.

14. Begriff der Parallelverschiebung eines Vektors. Für die geometrische Begründung des Tensorkalküls im Riemannschen Raum hat sich der Begriff der Parallelverschiebung eines Vektors immer mehr als fundamental erwiesen. Zuerst aufgestellt von *Levi-Civita*[65]) auf Grund des Einlagerns des Riemannschen Raumes R_n in einen euklidischen Raum $R_{\frac{n(n+1)}{2}}$ (vgl. vorige Nr.), wurde er hernach von *Weyl*[66]) direkt hergeleitet. Später hat ihn *Weyl* auch für Mannigfaltigkeiten, in denen das Linienelement noch gar nicht definiert ist, axiomatisch festgelegt (vgl. Abschn. V).[67])

65) *T. Levi-Civita,* Notione di parallelismo etc., Rend. Pal. 42 (1917), p. 173.

66) *H. Weyl,* Raum — Zeit — Materie, 1. Aufl., Berlin 1918, p. 97—101.

67) *H. Weyl,* Math. Ztschr. 2 (1918), p. 384; Raum — Zeit — Materie, 3. Aufl., Berlin 1920, p. 100—102.

Wir betrachten wieder die Kurve

$$x^k = x^k(t)$$

und in jedem Punkt P derselben die Gesamtheit aller von ihm ausgehenden Vektoren. Es handelt sich dann darum, von allen Abbildungen

$$\xi^i = f^i(\overset{\circ}{\xi}{}^k, t)$$

der Vektorgesamtheit von $P_0(t_0)$ auf die Vektorgesamtheit von $P(t)$ eine spezielle Gruppe in invarianter Weise herauszuheben und als Parallelverschiebungen oder Translationen zu kennzeichnen. Es ist nun nicht möglich einfach zu postulieren, daß zwei parallele Vektoren in Punkten von endlichem Abstand dieselben Komponenten haben sollen. Denn wenn das in *einem* Koordinatensystem der Fall ist, wird es in einem anderen im allgemeinen nicht zutreffen. Die betreffende Eigenschaft der Translationen muß vielmehr so formuliert werden:

1. Es gibt in jedem Punkt P ein solches Koordinatensystem, daß die Änderung der Komponenten eines Vektors bei *infinitesimaler* Translation längs aller von P ausgehenden Kurven verschwindet, d. h. daß in P

$$\frac{d\xi^i}{dt} = 0$$

ist.

Indem das Wegtransformieren der infinitesimalen Änderung der Vektorkomponenten für alle von P ausgehenden Kurven gleichzeitig verlangt wird, werden erst die Parallelverschiebungen längs verschiedenen Kurven miteinander verknüpft. Eine einfache Betrachtung zeigt, daß die Änderung $\frac{d\xi^i}{dt}$ der Vektorkomponenten infolge der Forderung 1 in einem beliebigen Koordinatensystem

$$\frac{d\xi^i}{dt} = -\Gamma^i_{rs}\frac{dx^s}{dt}\xi^r \tag{64}$$

beträgt, wo die Γ^i_{rs} bloß von den Koordinaten, nicht von den $\frac{dx^s}{dt}$ abhängen. Sie erfüllen die Symmetriebedingung

$$\Gamma^i_{rs} = \Gamma^i_{sr}. \tag{65}$$

Umgekehrt zeigt man, daß die Forderung 1 erfüllt ist, wenn (64) und (65) zu Recht bestehen. Gegenüber linearen Koordinatentransformationen verhalten sich die Γ^i_{rs} wie die Komponenten eines Tensors, nicht aber gegenüber der allgemeinen Transformationsgruppe. Letzteres ergibt sich schon daraus, daß die Γ^i_{rs} immer zum Verschwinden gebracht werden können, während die Komponenten eines Tensors in jedem Koordinatensystem sämtlich verschwinden, wenn es in *einem* System der Fall ist, da sie sich homogen linear transformieren.

Wir definieren gleich noch die Größenreihe $\Gamma_{i,rs}$ durch

$$\Gamma_{i,rs} = g_{ik}\Gamma^k_{rs}, \qquad \Gamma^i_{rs} = g^{ik}\Gamma_{k,rs}. \tag{66}$$

Die Definition der Parallelverschiebung wird vervollständigt durch die zweite Forderung.

2. Die Translation ist eine kongruente Abbildung, das heißt sie läßt die Länge der Vektoren unverändert:

$$\frac{d}{dt}(g_{ik}\xi^i\xi^k) = \frac{d}{dt}(\xi_i\xi^i) = 0. \tag{67}$$

Dadurch werden die geodätischen Komponenten mit dem metrischen Fundamentaltensor verknüpft. Daß auch die Winkel bei der Parallelverschiebung unverändert bleiben, ist eine einfache Folge der Forderung 2. Da die Relationen (64) und (67) bei beliebigen ξ^i gelten müssen, ergibt sich sofort

$$\frac{\partial g_{ir}}{\partial x^s} = \Gamma_{i,rs} + \Gamma_{r,is}, \tag{68}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{is}}{\partial x^r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i}\right) = \Gamma_{i,rs}. \tag{69}$$

Die Größen Γ^i_{rs} folgen dann aus (66). *Christoffel*, in dessen Arbeit[68]) die durch (69) und (66) definierten Größen zum erstenmal in der Literatur gedruckt vorkommen, schrieb $\begin{bmatrix} rs \\ i \end{bmatrix}$ und $\begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix}$ an Stelle von $\Gamma_{i\,rs}$ und Γ^i_{rs}. Sie werden auch vielfach *Christoffel*sche Dreiindizessymbole genannt. *Weyl*[69]) bezeichnet sie als Komponenten des affinen Zusammenhangs, da die infinitesimale Translation gemäß (64) eine affine Abbildung der Vektoren ist. Hier sollen sie einfach die *geodätischen Komponenten* des betreffenden Bezugssystems genannt werden. Ein Koordinatensystem, in welchem sie im Punkt P verschwinden, heißt selbst in P geodätisch.

Aus der Invarianz von $\xi_i\eta^i$ bei beliebigem η^i ergibt sich ferner mit Rücksicht auf (64) die Transformationsformel für die kovarianten Komponenten ξ_i zu:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \Gamma^r_{is}\frac{dx^s}{dt}\xi_r = \Gamma_{r,is}\frac{dx^s}{dt}\xi^r; \tag{70}$$

endlich folgt aus $\quad \frac{d}{dt}(g^{ik}\xi_i\xi_k) = 0$

die Identität

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^s} + g^{ir}\Gamma^k_{rs} + g^{kr}\Gamma^i_{rs} = 0. \tag{71}$$

68) *E. B. Christoffel*, Crelles J. 70 (1869), p. 46. Vgl. auch *R. Lipschitz*, Crelles J. 70 (1869), p. 71. Die betreffenden Entwicklungen von *Riemann* wurden 1861 in einer Pariser Preisarbeit niedergelegt und erst 1876 in der ersten Ausgabe von *Riemanns* gesammelten Werken veröffentlicht (vgl. Ges. Werke, 1. Aufl., p. 370).

69) *H. Weyl*, Raum—Zeit—Materie, 3. Aufl., Berlin 1920, p. 101.

Wir merken noch die aus (26) und (27) durch Differentiation folgenden Gleichungen an:

$$dg^{ik} = -g^{ir}g^{ks}dg_{rs}, \quad dg_{ik} = -g_{ir}g_{ks}dg^{rs}, \tag{72}$$

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = -g^{ir}g^{ks}\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^l}, \quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = -g_{ir}g_{ks}\frac{\partial g^{rs}}{\partial x^l}, \tag{72a}$$

und

$$dg = gg^{ik}dg_{ik} = -gg_{ik}dg^{ik}, \tag{73}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x^l} = gg^{ik}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = -gg_{ik}\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}. \tag{73a}$$

Aus (69) erhält man noch durch Verjüngung

$$\Gamma^r_{ir} = g^{rs}\Gamma_{r,is} = \frac{1}{2}g^{rs}\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^i} = \frac{\partial\log\sqrt{g}}{\partial x^i} \tag{74}$$

und sodann aus (71):

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}g^{ik}}{\partial x^k} + g^{rs}\Gamma^i_{rs} = 0. \tag{75}$$

15. Geodätische Linien. Die Richtung der Kurve $x^k = x^k(t)$ in irgendeinem ihrer Punkte P ist charakterisiert durch den Vektor u^i

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}, \qquad (s = \text{Bogenlänge}) \tag{76}$$

der die Richtung der Tangente an die Kurve in P und die Länge 1 hat. In der Tat ist

$$u_iu^i = g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 1. \tag{77}$$

Die geodätische Linie ist nun eine Kurve, die *ihre Richtung stets beibehält.*[70]) Dies soll besagen: Konstruiert man in irgendeinem Punkt P_0 der geodätischen Linie den zugehörigen Richtungsvektor u^i, so erhält man die Richtungsvektoren in den anderen Punkten durch Parallelverschieben von u^i längs der geodätischen Linie. Nach (64) und (70) drückt sich das analytisch aus durch die einander völlig äquivalenten Relationen

$$\frac{du_i}{ds} = \Gamma_{r,is}u^ru^s = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i}u^ru^s \tag{78}$$

und

$$\frac{du^i}{ds} = -\Gamma^i_{rs}u^ru^s; \tag{79}$$

letztere kann man auch schreiben:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{rs}\frac{dx^r}{ds}\frac{dx^s}{ds} = 0. \tag{80}$$

---

70) *H. Weyl,* Raum—Zeit—Materie, 1. Aufl., Berlin 1918, p. 102.

Dies sind die Differentialgleichungen der geodätischen Linie. Aus (80) folgt rückwärts wegen der Invarianz der Länge eines Vektors bei der Parallelverschiebung

$$g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} = \text{const.}, \tag{77a}$$

d. h. (80) gilt *nur* für einen solchen Kurvenparameter s, der bis auf einen konstanten Faktor gleich der Bogenlänge ist.

Die geodätischen Linien können auch durch ein Variationsprinzip charakterisiert werden. Sie sind nämlich zugleich die in Nr. **13** erwähnten *kürzesten* Linien, oder genauer gesagt die „Extremalen“[70a]), für welche die Variation der Kurvenlänge verschwindet (letztere braucht nicht notwendig ein Minimum zu sein). Seien A und B die festen Anfangs- und Endpunkte, s die Bogenlänge, λ ein beliebiger Parameter; dann ist also zu zeigen, daß für die geodätischen Linien

$$\delta\int_A^B ds = \delta\int_A^B \sqrt{g_{ik}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^k}{d\lambda}}\,d\lambda = 0 \tag{81}$$

wird. Die g_{ik} sind dabei gegebene Funktionen der Koordinaten x^i, variiert werden die Funktionen $x^k = x^k(\lambda)$.

An der Relation (81) wollen wir nun eine aus der Mechanik bekannte Umformung[70b]) vornehmen. Zu diesem Zwecke wählen wir den Parameter λ speziell so, daß er auf der Extremalen mit der Bogenlänge s zusammenfällt und stets denselben Wertebereich durchläuft. In den resultierenden Differentialgleichungen kann dann λ durch s ersetzt werden. Setzen wir nun

$$L = \frac{1}{2}g_{ik}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^k}{d\lambda}, \tag{82}$$

so wird

$$\delta\int_A^B ds = \int_A^B \frac{\delta L\,d\lambda}{\sqrt{g_{ik}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^k}{d\lambda}}},$$

und da die Wurzel für die Extremale gleich 1 wird, kann statt (81) einfach geschrieben werden

$$\int_A^B \delta L\,d\lambda = \delta\int_A^B L\,d\lambda = 0. \tag{83}$$

70a) Vgl. *A. Kneser*, Art. II 8 dieser Encykl., p. 597 u. 600.

70b) Es handelt sich dort um den Übergang von der *Jacobi*schen Form des Prinzips der kleinsten Wirkung zum *Hamilton*schen Prinzip. Vgl. *A. Voß*, Art. IV 1 dieser Encykl., p. 96.

Damit ist die vollständige Analogie mit dem *Hamilton*schen Prinzip der Mechanik hergestellt, wenn L als *Lagrange*sche Funktion aufgefaßt wird. Schreiben wir also für den Moment noch $\dot{x}^i$ statt $\frac{dx^i}{d\lambda} = \frac{dx^i}{ds}$, so lauten die aus (83) resultierenden Differentialgleichungen

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0. \tag{84}$$ [70c]

Da nach (20) $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = g_{ik}\frac{dx^k}{ds}$ ist, ergibt dies in der Tat

$$\frac{d}{ds}\left(g_{ik}\frac{dx^k}{ds}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i}\frac{dx^r}{ds}\frac{dx^s}{ds},$$

was mit (78) übereinstimmt. (In einer Mannigfaltigkeit, in welcher die Form ds^2 nicht definit ist, versagt die hier gegebene Ableitung für diejenigen Kurven, auf denen durchweg $ds = 0$ ist. Über die Ausnahmsstellung dieser „Nulllinien" vgl. Nr. 22.)

16. Raumkrümmung. Der Begriff der Raumkrümmung wurde zuerst von *Riemann*[71]) aufgestellt, und zwar als eine Verallgemeinerung des *Gauß*schen Flächenkrümmungsmaßes für n-dimensionale Mannigfaltigkeiten (siehe darüber Nr. 17). Seine zugehörigen analytischen Entwicklungen blieben aber bis zur Publikation der Pariser Preisarbeit[72]) unbekannt; hier finden sie sich sowohl nach der Eliminationsmethode, als auch nach der Variationsmethode fertig ausgeführt. Vorher waren jedoch *Christoffel*[73]) und *Lipschitz*[74]) bereits zu den gleichen Ergebnissen gelangt, indem sie die Bedingung dafür aufstellten, daß eine vorgegebene quadratische Form

$$g_{ik}dx^i dx^k \qquad (g_{ik} \text{ Funktionen der } x)$$

in die Form

$$\sum_i (dx^i)^2$$

transformiert werden kann. Dies ist seinerseits wieder ein spezieller Fall des gleichfalls von *Christoffel* in Angriff genommenen Äquivalenz-

70c) Während in der gewöhnlichen Mechanik die *Lagrange*schen Gleichungen entstehen, wenn man für die Raumkoordinaten alle möglichen Punkttransformationen zuläßt, zeigt das Obige, daß dieselbe Form erhalten bleibt, wenn auch die Zeit beliebig mittransformiert wird; die unabhängige Variable ist jetzt natürlich nicht t, sondern s. Vgl. *T. Levi-Civita*, l'enseignement mathém. 21 (1920), p. 5.

71) *B. Riemann*, Habilitationsvortrag l. c. Anm. 63).

72) l. c. Anm. 68).

73) *E. B. Christoffel*, Crelles J. l. c. Anm. 68).

74) *R. Lipschitz*, Crelles J. 70 (1869), p. 71; 71 (1870), p. 244 u. 288 und 72 (1870), p. 1, ferner ebenda 82 (1877), p. 316. Letztere Arbeit ist bereits nach der Veröffentlichung von *Riemanns* Preisarbeit erschienen.

problems der quadratischen Differentialformen, der Frage, wann zwei Formen

$$g_{ik}\,dx^i\,dx^k \quad \text{und} \quad g'_{ik}\,dx'^i\,dx'^k$$

ineinander transformiert werden können. Dieses allgemeine Äquivalenzproblem ist jedoch bisher für die Physik nicht von Bedeutung geworden. Auf einem zwar rein formalen, aber verglichen mit *Christoffels* weitläufigen Rechnungen sehr kurzen Weg haben *Ricci* und *Levi-Civita*[75]), deren Darstellung sich *Einstein*[76]) angeschlossen hat, den Krümmungstensor abgeleitet. Endlich fanden *Hessenberg*[77]) und *Levi-Civita*[78]) im Anschluß an den Begriff der Parallelverschiebung eines Vektors eine anschauliche geometrische Deutung für denselben.

Es war in Nr. 14 immer nur die Rede von der Parallelverschiebung eines Vektors längs einer gegebenen Kurve, niemals von der Parallelverschiebung vom Punkt P nach P' schlechtweg. Diese ist in der Tat bloß bei euklidischer Geometrie vom Zwischenweg unabhängig. Verschiebt man dagegen im allgemeinen Fall einen Vektor ξ^i längs einer geschlossenen Kurve parallel, so erhält man am Ende einen vom Ausgangsvektor ξ^i verschiedenen Vektor ξ^{*i}. Durch Benützung dieses Sachverhaltes kann man den Krümmungstensor definieren. Es sei nämlich eine zweiparametrige Kurvenschar

$$x^k = x^k(u, v)$$

gegeben. Nun verschieben wir den beliebigen Vektor ξ^h vom Punkt $P_{00}(u, v)$ über $P_{10}(u + \Delta u, v)$, $P_{11}(u + \Delta u, v + \Delta v)$ $P_{01}(u, v + \Delta v)$ wieder zurück nach $P_{00}(u, v)$, abwechselnd auf Kurven mit konstantem v und Kurven mit konstantem u. Die Differenz $\xi^{*h} - \xi^h = \Delta \xi^h$ muß offensichtlich von der Ordnung $\Delta u\, \Delta v$ sein, da sie Null wird, sobald *eine* der Größen Δu oder Δv verschwindet. Der $\lim\limits_{\substack{\Delta u \to 0 \\ \Delta v \to 0}} \frac{\Delta \xi^h}{\Delta u\, \Delta v}$, auf den es hier allein ankommt, kann mit Hilfe von (94) ohne weiteres ermittelt werden und ergibt sich zu

$$\lim \frac{\Delta \xi^h}{\Delta u\, \Delta v} = R^h_{ijk}\, \xi^i \frac{dx^j}{du} \frac{dx^k}{dv}, \tag{85}$$

worin

$$R^h_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^h_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^h_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^h_{k\alpha} \Gamma^\alpha_{ij} - \Gamma^h_{j\alpha} \Gamma^\alpha_{ik}. \tag{86}$$

---

75) *G. Ricci* und *T. Levi-Civita*, Math. Ann. l. c. Anm. 56).

76) *A. Einstein*, Ann. d. Phys. l. c. Anm. 56).

77) *G. Hessenberg*, Math. Ann. 78 (1917), p. 187, l. c. Anm. 58a).

78) *T. Levi-Civita*, Rend. Pal., l. c. Anm. 65). Vgl. auch die Darstellung von *Weyl* in der 1. und 3. Aufl. von Raum — Zeit — Materie.

Wegen des Vektorcharakters der linken Seite von (85) — es ist zu beachten, daß in $\Delta\xi^h$ die Differenz von zwei Vektoren *im selben Punkt* gebildet wird — folgt, daß auch die rechte Seite Vektorcharakter hat. Demnach sind die Größen R^h_{ijk} die Komponenten eines Tensors. Es ist der Krümmungstensor, der nach seinen Entdeckern auch der *Riemann-Christoffel*sche Tensor heißt. Der Sinn der Formel (85) wird noch etwas anschaulicher, wenn man von den Differentialquotienten zu den Differentialen übergeht. Schreibt man dx^j für $\frac{dx^j}{du}du$ und δx^k für $\frac{dx^k}{dv}dv$, und führt unter Ausnutzung der Antisymmetrie von R^h_{ijk} in j und k den Flächenvektor

$$d\sigma^{jk} = dx^j \delta x^k - dx^k \delta x^j$$

ein, so nimmt sie die Gestalt an

$$\Delta\xi^h = \tfrac{1}{2} R^h_{ijk}\xi^i d\sigma^{jk}.\text{[78a]} \tag{87}$$

Durch die gleiche Überlegung, die zu (86) führt, erhält man für die Änderung der *kovarianten* Komponenten bei der Parallelverschiebung längs des genannten geschlossenen Weges aus (70):

$$\Delta\xi_h = \tfrac{1}{2} R_{hijk}\xi^i d\sigma^{jk} \tag{88}$$

mit

$$\begin{aligned} R_{hijk} &= \frac{\partial \Gamma_{i,hk}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{i,hj}}{\partial x^k} + g^{\alpha\beta}(\Gamma_{\alpha,hj}\Gamma_{\beta,ik} - \Gamma_{\alpha,hk}\Gamma_{\beta,ij}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{hj}}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^h \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{hk}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^h \partial x^k}\right) \\ &\quad + g^{\alpha\beta}(\Gamma_{\alpha,hj}\Gamma_{\beta,ik} - \Gamma_{\alpha,hk}\Gamma_{\beta,ij}). \end{aligned} \tag{89}$$

Es ist ferner leicht zu zeigen, daß

$$\Delta\xi_h = g_{h\alpha}\Delta\xi^\alpha$$

ist; infolgedessen sind auch R_{hijk} die zu R^h_{ijk} kovarianten Komponenten:

$$R_{hijk} = g_{h\alpha}R^\alpha_{ijk}. \tag{91}$$

Aus (89) folgt, daß die R_{hijk} die Symmetriebedingrngen

$$R_{hijk} = -R_{hikj} = -R_{ihjk} = R_{jkhi},\quad R_{hijk} + R_{hjki} + R_{hkij} = 0 \tag{92}$$

erfüllen, nach Nr. **14** ist also der Krümmungstensor als Flächentensor 2. Ranges anzusprechen. Das Bestehen der Relationen (92) kann auch, wie *Hessenberg*[79]) gezeigt hat, direkt aus der Definition (87) des Krüm-

78a) Bei einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit führt das hier besprochene Verfahren zum bekannten Zusammenhang des *Gauß*schen Krümmungsmaßes mit dem Exzeß bzw. Defekt der Winkelsumme eines geodätischen Dreieckes, den bereits *Gauß* dargelegt hat.

79) *G. Hessenberg*, l. c. Anm. 77).

mungstensors gefolgert werden. Da *Riemann* an Stelle von $R_{hijk}(hijk)$ schreibt, werden diese Größen manchmal auch Vierindizessymbole genannt. Im euklidischen Raum verschwinden sie, denn sie verschwinden zunächst sicher in *den* Koordinatensystemen, in welchen die g_{ik} konstant sind, und aus ihrem Tensorcharakter folgt dann, daß sie in *jedem* Koordinatensystem verschwinden. Dieses Verschwinden ist also eine notwendige Bedingung dafür, daß die Form $g_{ik}dx^i dx^k$ in die Form $\sum(dx'^i)^2$ transformiert werden kann.

Aus dem Flächentensor 2. Ranges R^h_{ijk} erhält man durch Verjüngung einen Linientensor 2. Ranges R_{ik}:

$$R_{ik} = R^\alpha_{i\alpha k} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha i \beta k} = g^{\alpha\beta} R_{i\alpha k\beta}. \tag{93}$$

Die Symmetrie desselben folgt aus

$$g^{\alpha\beta} R_{\alpha i\beta k} = g^{\alpha\beta} R_{\beta k\alpha i} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha k\beta i}.$$

Seine Komponenten sind nach (86) gegeben durch:

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{i\alpha}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{ik}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\beta_{i\alpha}\Gamma^\alpha_{k\beta} - \Gamma^\alpha_{ik}\Gamma^\beta_{\alpha\beta}. \tag{94}$$

Durch abermalige Verjüngung ergibt sich aus ihm die Krümmungsinvariante

$$R = g^{ik} R_{ik}.\text{[79a)]} \tag{95}$$

Es möge noch bemerkt werden, daß bei *Herglotz*[80]) und in den neueren Arbeiten von *Weyl*[81]) die Krümmungstensoren definitionsgemäß das entgegengesetzte Vorzeichen haben wie hier und bei den anderen Autoren.

17. Riemanns Normalkoordinaten und ihre Anwendungen. Für viele Zwecke erweist sich die Einführung des folgenden, von *Riemann* in seinem Habilitationsvortrag erwähnten Koordinatensystems als nützlich. Es sei ein beliebiges Koordinatensystem x^i gegeben. Man ziehe nun von irgendeinem Punkt P_0 aus alle geodätischen Linien. Ihre Richtungen sind charackterisiert durch die Tangentialvektoren in P_0 mit den Komponenten $\left(\frac{dx^k}{ds}\right)_0$. In einer gewissen Umgebung von P_0 wird es nur *eine* geodätische Linie geben, welche durch einen gegebenen Punkt P und durch P_0 geht. Ist s die geodätische Bogenlänge PP_0, so kann also der Punkt P in eineindeutiger Weise charakterisiert werden durch die Werte

$$y^k = \left(\frac{dx^k}{ds}\right)_0 \cdot s. \tag{96}$$

79a) Sie tritt zuerst bei *R. Lipschitz*, Crelles J. 72 (1870), l. c. Anm. 74) auf.

80) Vgl. nächste Nr. Anm. 82).

81) *H. Weyl*, l. c. Anm. 67).

Diese y^k sind die *Riemann*schen Normalkoordinaten. Offensichtlich tangiert das Koordinatensystem der y das Koordinatensystem der x in P_0, so daß dort die g_{ik} und überhaupt die Komponenten eines beliebigen Tensors in beiden Systemen übereinstimmen. Wir kennzeichnen sie durch eine übergeschriebene 0, z. B. $\overset{0}{g}_{ik}$. Einer beliebigen Transformation des x-Systems entspricht eine affine Transformation des y-Systems. Wir lassen nun das x-System ganz außer Betracht und fragen nach der Gestalt des Linienelementes im Normalsystem. Zunächst müssen in P_0 nach (80) die Γ^i_{rs} verschwinden, da *alle* von P_0 ausgehenden geodätischen Linien lineare Gleichungen haben.

$$\overset{0}{\Gamma}{}^i_{rs} = 0, \tag{97}$$

d. h. das Normalsystem ist in P^0 geodätisch. Im beliebigen Punkt P sind nicht die Gleichungen *aller* von ihm ausgehenden geodätischen Linien linear, sondern bloß die der *einen* geodätischen Linie, welche auch durch P_0 geht. Dies wird ausgedrückt durch

$$\Gamma^i_{rs}(y) \cdot y^r y^s = 0, \tag{98}$$

worin $\Gamma^i_{rs}(y)$ die Werte der geodätischen Komponenten im Punkt mit den Koordinaten y bedeuten. Diese Gleichung muß für alle y gelten. Sind umgekehrt die Relationen (97) und (98) für ein vorgegebenes Koordinatensystem erfüllt, so ist dieses ein Normalsystem. Man kann beweisen[81a]), daß infolge dieser Relationen das Linienelement ds^2 die Form haben muß:

$$ds^2 = \overset{0}{g}_{ik} dy^i dy^k + \sum_{(hi)(jk)} p_{hijk}(y)(y^h dy^i - y^i dy^h)(y^j dy^k - y^k dy^j). \tag{99}$$

In der Summe muß man die Indexpaare (hi) und (jk) unabhängig voneinander alle $\binom{n}{2}$ möglichen Kombinationen durchlaufen lassen. Aus (99) kann auch rückwärts auf (97) und (98) geschlossen werden, so daß diese Form des Linienelementes die notwendige und hinreichende Bedingung dafür bildet, daß das Koordinatensystem der y^k ein Normalsystem ist. Die p_{hijk} sind reguläre Funktionen der y und verhalten sich gegenüber linearen Transformationen der y wie die Komponenten eines Flächentensors 2. Ranges, können auch stets so bestimmt werden[81b]), daß sie dessen Symmetriebedingungen erfüllen (vgl. Nr. **11**). Der Krümmungstensor im Nullpunkt hängt in überaus einfacher Weise mit den Werten der p_{hijk} daselbst zusammen: Es ist

$$\overset{0}{R}_{hijk} = 3\overset{0}{p}_{hijk}. \tag{100}$$

81a) Vgl. dazu die Erläuterungen von *H. Weber* in *Riemanns* Ges. Werken, 2. Aufl., p. 405 sowie *F. Schur,* Math. Ann. 27 (1886), p. 537.

81b) *H. Vermeil,* Math. Ann. 79 (1918), p. 289.

Die R_{hijk} messen also in dieser Darstellung direkt die Abweichung der Geometrie von der euklidischen. *Riemann* bemerkt weiter, daß für den Fall einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit — ihr Linienelement sei gegeben durch

$$ds^2 = \gamma_{11} du^2 + 2\gamma_{12} du dv + \gamma_{22} dv^2 \text{ —}$$

die einzige unabhängige Komponente R_{1212} des Krümmungstensors gemäß der Formel

$$(101) \qquad K = -\frac{R_{1212}}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}$$

das *Gauß*sche Krümmungsmaß K der Fläche bestimmt. Dies wird durch direkten Vergleich von (89) mit den *Gauß*schen Formeln für K gezeigt. Sind u, v speziell Normalkoordinaten der Fläche, so daß das Linienelement die Form

$$(102) \quad ds^2 = \mathring{\gamma}_{11} du^2 + 2\mathring{\gamma}_{12} du dv + \mathring{\gamma}_{22} dv^2 + \pi(u, v)(u dv - v du)^2$$

annimmt, so kann das *Gauß*sche Krümmungsmaß in P_0 wegen (100), (101) auch geschrieben werden

$$(103) \qquad \mathring{K} = -\frac{3\mathring{\pi}}{\mathring{\gamma}_{11}\mathring{\gamma}_{22} - \mathring{\gamma}_{12}^2}.$$

Das Vorzeichen von K ist historisch begründet durch das Verhältnis der Fläche zum euklidischen R_3, in dem sie eingebettet ist, und hat nichts zu tun mit den Maßverhältnissen der Fläche selbst. Es schiene im Hinblick auf die Entwicklung (99) des Linienelementes natürlicher das Vorzeichen entgegengesetzt zu wählen, z. B. die Krümmung der Kugel negativ zu nennen.

Mit Hilfe der Normalkoordinaten kann nun der Begriff der Krümmung des R_n auf den der Flächenkrümmung zurückgeführt werden. Auf diese Weise ist *Riemann* überhaupt zuerst zu jenem Begriff gelangt. Es seien zunächst zwei Richtungen gegeben, welche durch die Vektoren ξ^i und η^i charakterisiert seien. Die Länge dieser Vektoren ist gleichgültig. Sie bestimmen das lineare Richtungsbüschel

$$\xi^i u + \eta^i v$$

und die Flächenrichtung

$$\xi^{ik} = \xi^i \eta^k - \xi^k \eta^i.$$

Längs jeder Richtung des Büschels konstruieren wir die von P^0 ausgehende geodätische Linie. Die Gesamtheit dieser geodätischen Linien bildet eine Fläche, auf deren Krümmungsmaß es uns ankommt. Das Linienelement der Fläche ergibt sich, indem man in (99) die Substitutionen macht:

$$y^i = \xi^i u + \eta^i v.$$

Es wird von der Form (102), worin die Größen $\mathring{\gamma}_{ik}$ und π die Werte

annehmen:

$$\overset{\circ}{\gamma}_{11} = \overset{\circ}{g}_{ik}\xi^i\xi^k = \xi_i\xi^i,\ \overset{\circ}{\gamma}_{12} = \tfrac{1}{2}\overset{\circ}{g}_{ik}(\xi^i\eta^k + \xi^k\eta^i) = \xi_i\eta^i,\ \overset{\circ}{\gamma}_{22} = \overset{\circ}{g}_{ik}\eta^i\eta^k = \eta_i\eta^i,$$

$$\pi = \sum_{(hi)(jk)} p_{hijk}\xi^{hi}\xi^{jk}.$$

Für das Krümmungsmaß erhält man daraus mit Rücksicht auf (100) und (103) sofort

$$(104)\qquad -K = \frac{\sum\limits_{(hi)(jk)} R_{hijk}\xi^{hi}\xi^{jk}}{\frac{1}{2}\xi_{ik}\xi^{ik}} = \frac{\sum\limits_{(hi)(jk)} R_{hijk}\xi^{hi}\xi^{jk}}{\sum\limits_{(hi)(jk)}(g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij})\xi^{hi}\xi^{jk}}.$$

(Der Index 0 ist fortgelassen worden.)

Mit den Normalkoordinaten hat dieses Resultat nichts mehr zu tun, es wird einfach jeder Flächenrichtung (die *Größe* von ξ^{ik} hebt sich offensichtlich weg) ein invariantes *Gauß*sches Krümmungsmaß zugeordnet, welches nach *Riemann* das Krümmungsmaß des Raumes R_n in der betreffenden Flächenrichtung heißt (nachdem man ihm noch das entgegengesetzte Vorzeichen gegeben hat). Dabei tritt auch klar zutage, daß die Größen R_{hijk} die Komponenten eines Flächentensors 2. Ranges bilden.

Im Anschluß an die von *Riemann* herrührende Formel (104) hat *Herglotz*[82]) gezeigt, wie man auch den verjüngten Krümmungstensor und die Krümmungsinvariante geometrisch interpretieren kann. Seine Ergebnisse sind diese: Es seien n orthogonale Richtungen gegeben, welche $\binom{n}{2}$ Flächenrichtungen bestimmen. Ist $K(rs)$ die Raumkrümmung in der durch den r^{ten} und s^{ten} Vektor bestimmten Flächenrichtung, so wird zunächst die Krümmungsinvariante R gleich der doppelten Summe:

$$(105)\qquad R = 2\sum_{(rs)} K(rs),$$

die über alle Indexkombinationen (rs) zu erstrecken ist. Sie ist unabhängig von der Wahl der n Richtungen $1, 2, \ldots n$ und kann als die mittlere Krümmung des R_n in dem betreffenden Punkt bezeichnet werden. Ist durch den Vektor ξ^i eine weitere Richtung 0 bestimmt, so bestimmt die Summe

$$(106)\qquad \sum_{(0r)} K(0r)\sin^2(0, r) = \frac{R_{ik}\xi^i\xi^k}{\xi_i\xi^i},$$

welche sich gleichfalls von der Wahl der n Ausgangsrichtungen als

82) *G. Herglotz*, Zur *Einstein*schen Gravitationstheorie, Leipzig Ber., math.-phys. Kl., 68 (1916), p. 199. Die Deutung der Krümmungsinvariante findet sich schon vor *Herglotz* bei *H. A. Lorentz*, Amst. Versl. 24 (1916), p. 1389.

unabhängig erweist, den verjüngten Krümmungstensor. Hiermit ist auch der geometrische Beweis für den Tensorcharakter von R_{ik} und die Invarianz von R, die beide früher bloß arithmetisch begründet wurden, nachgeliefert. Läßt man insbesondere eine der n orthogonalen Ausgangsrichtungen, etwa 1, mit der Richtung 0 zusammenfallen, so wird

$$\frac{R_{ik}\xi^i\xi^k}{\xi_i\xi^i} = \sum_{r=2}^{n} K(1r). \tag{107}$$

Aus (105) und (107) folgt endlich für das mittlere Krümmungsmaß des auf der Richtung 1, welche durch den Vektor ξ^i charakterisiert ist, senkrecht stehenden R_{n-1} der Ausdruck

$$\sum_{\substack{(rs)\\ r\neq 1,\, s\neq 1}} K(rs) = \frac{1}{2}R - \frac{R_{ik}\xi^i\xi^k}{\xi_i\xi^i} = -\frac{G_{ik}\xi^i\xi^k}{\xi_i\xi^i}, \tag{108}$$

worin

$$G_{ik} = R_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik}R \tag{109}$$

gesetzt ist. Dieser Tensor spielt in der allgemeinen Relativitätstheorie eine wichtige Rolle.

Es möge hier noch ein einfaches Theorem von *Vermeil*[83]) erwähnt werden, welches auf der Entwicklung (99) des Linienelementes beruht. Das Volumen V_n einer Kugel mit dem Radius r im euklidischen R_n hat den einfachen Wert

$$V_n = C_n r^n,$$

wo C_n ein Zahlenfaktor ist, auf dessen Wert es hier nicht ankommt. In einem beliebigen *Riemann*schen Raum wird V_n eine komplizierte Funktion von r. Denkt man sie sich in eine Potenzreihe nach r entwickelt und behält nur das auf $C_n r^n$ nächstfolgende Glied bei, so ergibt sich

$$V_n = C_n r^n\left\{1 + \frac{R}{6}\frac{r^2}{n+2} + \cdots\right\}, \tag{110}$$

wo R die Krümmungsinvariante im Kugelmittelpunkt ist. Durch Differentiieren erhält man daraus die Formel für die Oberfläche O_n der Kugel:

$$O_n = nC_n r^{n-1}\left\{1 + \frac{R}{6}\frac{r^2}{n} + \cdots\right\}. \tag{111}$$

Man kann diese Relationen zu einer neuen geometrischen Definition der Krümmungsinvariante benutzen:

$$R = \lim_{r\to 0}\left(\frac{V_n}{C_n r^n} - 1\right)\frac{6(n+2)}{r^2} = \lim_{r\to 0}\left(\frac{O_n}{nC_n r^{n-1}} - 1\right)\frac{6n}{r^2}. \tag{112}$$

83) *H. Vermeil*, Notiz über das mittlere Krümmungsmaß einer n-fach ausgedehnten *Riemann*schen Mannigfaltigkeit. Gött. Nachr., math.-phys. Kl., 1917, p. 334.

Die Einführung der Normalkoordinaten führt die Frage nach den Invarianten gegenüber beliebigen Transformationen auf die Frage nach den Invarianten bei linearen Transformationen zurück.[84]) So kann bewiesen werden, daß R (abgesehen von einem belanglosen, konstanten Faktor) die einzige Invariante ist, welche bloß die g_{ik} selbst sowie deren erste und zweite Differentialquotienten enthält und in den letzteren linear ist.[84a]) Und alle Linientensoren zweiten Ranges, welche diese Eigenschaften haben, sind in der Form

$$c_1 R_{ik} + c_2 R g_{ik} + c_3 g_{ik} \qquad (c_1, c_2, c_3 \text{ Konstante}) \tag{113}$$

enthalten.[84a])

18. Die Spezialfälle der euklidischen Geometrie und der konstanten Krümmung. Daß im euklidischen Raum der Krümmungstensor R_{hijk} verschwindet, ist ohne weiteres einzusehen (vgl. Nr. **16**). Doch hat bereits *Riemann* in seinem Habilitationsvortrag darauf hingewiesen, daß sich dieser Satz umkehren läßt: Verschwindet der Krümmungstensor, so ist der Raum euklidisch, d. h. es kann dann stets ein Koordinatensystem gefunden werden, in welchem die g_{ik} Konstante sind. Einen allerdings sehr umständlichen Beweis für diese Behauptung hat zuerst *Lipschitz*[85]) gegeben. Am durchsichtigsten und anschaulichsten ist der Gedankengang, den *Weyl*[86]) angedeutet hat. Im allgemeinen Fall ist das Ergebnis der Parallelverschiebung eines Vektors wesentlich abhängig von dem Weg, auf welchem sie erfolgt. Dies wird nur dann nicht zutreffen, wenn sich die Vektorkomponenten nicht bloß als Funktionen von s, sondern auch als Funktionen der Koordinaten x^k so bestimmen lassen, daß überall und für alle Kurvenrichtungen (64) befriedigt ist. Das heißt aber, die ξ^i müssen die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^s} = - \Gamma^i_{rs} \xi^r \tag{114}$$

befriedigen. Stellt man nun ihre Integrabilitätsbedingungen auf, so zeigt sich, daß sie gleichlautend werden mit $R_{hijk} = 0$. Verschwindet also der Krümmungstensor, so läßt sich das Gleichungssystem (114) stets lösen, die Richtungsübertragung ist vom Zwischenweg unabhängig, man kann auch sagen, sie ist integrabel. Jetzt braucht man nur noch

---

84) Vgl. die allgemeinen Angaben bei *E. Noether*, Invarianten beliebiger Differentialausdrücke, Gött. Nachr., math.-phys. Kl., 1918, p. 37 und die Ausführungen bei *H. Vermeil*, l. c. Anm. 81b).

84a) Vgl. *H. Vermeil*, l. c. Anm. 83) und *H. Weyl*, Raum — Zeit — Materie, 4. Aufl. 1921, Anhang.

85) *R. Lipschitz*, Crelles J. 70 (1869), p. 71, l. c. Anm. 74).

86) *H. Weyl*, Raum — Zeit — Materie, 1. Aufl., Berlin 1918, p. 111.

statt des gegebenen Koordinatensystems K mit den Achsenvektoren $\mathfrak{e}_k$ ein neues Koordinatensystem K' mit den Achsenvektoren $\mathfrak{e}_i'$ von folgender Eigenschaft einzuführen. Die $\mathfrak{e}_i'$ im beliebigen Punkt P_1 sollen zu den $\mathfrak{e}_i'$ im beliebigen zweiten Punkt P_2 parallel sein. Ihre Komponenten $\bar{\alpha}_i^k$ im System K (vgl. Nr. **10**) müssen deshalb nach (114) die Gleichungen

$$\frac{\partial \bar{\alpha}_i^k}{\partial x^s} = - \Gamma^k_{rs} \bar{\alpha}_i^r \tag{115}$$

befriedigen. Eine solche Koordinatenwahl wird dadurch möglich, daß zufolge von (115) die Integrabilitätsbedingungen (63) von selbst erfüllt sind. In der Tat ist

$$\frac{\partial \bar{\alpha}_i^k}{\partial x'^l} = \frac{\partial \alpha_i^k}{\partial x^s} \bar{\alpha}_l^s = - \Gamma^k_{rs} \alpha_i^r \alpha_l^s$$

in i und l symmetrisch. Es gibt nun in jedem Punkt n Vektoren, nämlich die n Achsenvektoren $\mathfrak{e}_i'$, deren Komponenten in K' bei jeder infinitesimalen Translation konstant bleiben. Da ein beliebiger Vektor $\mathfrak{x}$ sich aus den $\mathfrak{e}_i'$ linear zusammensetzen läßt und die infinitesimale Translation nach Nr. **14** affin ist, werden auch die Komponenten von $\mathfrak{x}$ in K' bei derselben nicht geändert. Das ist aber nur möglich, wenn die geodätischen Komponenten von K' überall verschwinden, d. h. die g'_{ik} Konstante sind. Man bestätigt dies auch leicht durch direkte Berechnung von $\frac{\partial g'_{ik}}{\partial x'^l}$. Hiermit ist der Beweis vollendet.

Eine umfassendere Klasse von *Riemann*schen Räumen sind diejenigen, deren Krümmungsmaß sowohl von der Flächenrichtung als auch vom Ort unabhängig ist, welche also nach (104) charakterisiert sind durch die Relation

$$R_{hijk} + \alpha(g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij}) = 0, \tag{116}$$

wo α eine (positive oder negative) Konstante bedeutet. Durch Verjüngung folgt daraus noch

$$R_{ik} + (n-1)\alpha g_{ik} = 0 \tag{117}$$

und

$$R = -n(n-1)\alpha. \tag{118}$$

Für spätere Anwendungen merken wir auch noch den Ausdruck für den durch (109) definierten Tensor G_{ik} an:

$$G_{ik} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \alpha g_{ik}. \tag{119}$$

Für $\alpha = 0$ kommt man auf den Fall verschwindender Krümmung zurück.

Ein Beispiel für einen Raum konstanter Krümmung ist eine n-dimensionale Kugel, die wir uns in einem euklidischen R_{n+1} eingebettet denken können. Wenn man bloß auf ihre inneren Maßverhält-

nisse achtet, spricht man besser von einem sphärischen Raum R_n. Wir haben dann

$$ds^2 = \sum_i (dx^i)^2 + (dx^{n+1})^2 \tag{120}$$

$$\sum_i (x^i)^2 + (x^{n+1})^2 = a^2. \tag{121}$$

Die Indizes in den Summen laufen immer von 1 bis n. Führen wir zunächst als Koordinaten auf der Kugel die x^i (in $1, \ldots n$) ein, was der Parallelprojektion auf die Äquatorebene $x^{n+1} = 0$ entspricht, so ergibt sich durch Elimination von x^{n+1} aus (120) mittels (121):

$$ds^2 = \sum_i (dx^i)^2 + \frac{(x^i dx^i)^2}{a^2 - r^2} \qquad \left(r^2 = \sum_i (x^i)^2\right). \tag{122}$$

Der Äquator $x^{n+1} = 0$ ist eine singuläre Linie des Koordinatensystems, und zu jedem Wertesystem für die Koordinaten gehören *zwei* Punkte des sphärischen Raumes R_n. Man kann auch die Kugelpunkte vom Zentrum aus auf die Ebene $x^{n+1} = -a$ projizieren, was der Koordinatentransformation

$$x^i = \frac{r}{r'} x'^i \left(r'^2 = \sum_i (x'^i)^2\right), \quad \frac{r}{r'} = \frac{|x^{n+1}|}{a} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + r'^2}} \tag{123}$$

entspricht. Lassen wir im Endresultat die Akzente wieder fort, so nimmt das Linienelement die Gestalt an:

$$ds^2 = \frac{a^2}{(a^2 + r^2)^2} \left\{(a^2 + r^2) \sum_i (dx^i)^2 - (x^i dx^i)^2\right\}. \tag{124}$$

Das Koordinatensystem umfaßt überhaupt nur die eine Halbkugel, der Äquator rückt ins Unendliche ($r = \infty$).

Ebenso erhält man durch stereographische Projektion:

$$x^i = \frac{r}{r'} x'^i, \quad \frac{r}{r'} = \frac{a - x^{n+1}}{2a} = \frac{1}{1 + \frac{r'^2}{4a^2}}, \tag{125}$$

$$ds^2 = \frac{\sum_i (dx^i)^2}{\left(1 + \frac{r^2}{4a^2}\right)^2}, \tag{126}$$

wobei im Endresultat die Akzente gleichfalls weggelassen wurden. Singulär wird dieses Koordinatensystem bloß im Pol $x^{n+1} = a$, dort wird nämlich $r = \infty$.

Eine vierte Form des Linienelementes erhält man durch Einführung der Normalkoordinaten, was durch die Substitution von

$$x^i = \frac{r}{\varrho} y^i \left(\varrho = \sum_i (y^i)^2\right), \quad \frac{r}{\varrho} = \frac{a}{\varrho} \sin \frac{\varrho}{a}, \quad x^{n+1} = a \cos \frac{\varrho}{a} \tag{127}$$

in (122) bewirkt wird. Es ergibt sich

$$(128)\qquad ds^2 = \frac{a^2}{\varrho^2}\sin^2\frac{\varrho}{a}\sum(dx^i)^2 + \frac{1}{\varrho^2}\left(1 - \frac{a^2}{\varrho^2}\sin^2\frac{\varrho}{a}\right)(y^i dy^i)^2.$$

Wegen

$$(129)\qquad \sum_{(ik)}(y^i dy^k - y^k dy^i)^2 = \varrho^2\sum(dy^i)^2 - (y^i dy^i)^2$$

(in der Summe der linken Seite ist jede Kombination (ik) bloß einmal zu zählen) kann dies auch geschrieben werden

$$(128\text{a})\qquad ds^2 = \sum(dy^i)^2 - \frac{1}{\varrho^2}\left(1 - \frac{a^2}{\varrho^2}\sin^2\frac{\varrho}{a}\right)\sum_{(ik)}(y^i dy^k - y^k dy^i)^2.$$

Die y^i sind also in der Tat Normalkoordinaten. Man kann diese Ausdrücke auch auf dem Umweg über Polarkoordinaten ableiten. Dem Ursprung des Systems der y^i entspricht der Pol $x^{n+1} = a$; bei $\varrho = a\pi$ wird es singulär, weil allen Werten von y^i, welche die Bedingung $\varrho = a\pi$ erfüllen, derselbe Punkt nämlich der Pol $x^{n+1} = -a$ entspricht. Man erhält bereits alle Kugelpunkte, wenn man ϱ an die beschränkende Bedingung $\varrho \leqq a\pi$ knüpft.

Aus (128a) folgt zunächst mit Rücksicht auf (99) und (100), daß im Punkt $y^i = 0$ das Krümmungsmaß des Raumes von der Flächenrichtung unabhängig ist, daß also dort eine Relation von der Form (116) gilt. Der Koeffizient α nimmt wegen

$$\frac{1}{\varrho^2}\left(1 - \frac{a^2}{\varrho^2}\sin^2\frac{\varrho}{a}\right)_{\varrho=0} = \frac{1}{3a^2}$$

nach (100) den Wert an:

$$(130)\qquad \alpha = \frac{1}{a^2}.$$

Daß die Relationen (116) mit demselben Wert von α in allen Punkten des sphärischen Raumes gelten, folgt aus der Existenz einer Bewegungsgruppe $G_{\frac{n(n+1)}{2}}$, welche gestattet, einen vorgegebenen Punkt und ein zugehöriges „n-Bein“ gleichzeitig in irgendeinen anderen Punkt und ein anderes n-Bein überzuführen und zwar, was wesentlich ist, in der Weise, daß die Längen aller Kurven bei der Bewegung unverändert bleiben. Bezeichnen wir nämlich mit S den Übergang (135) vom System $x^1, \ldots x^{n+1}$ des euklidischen R_{n+1} zum Normalkoordinatensystem im sphärischen R_n mit T die $\frac{n(n+1)}{2}$ parametrige Gruppe der orthogonalen Transformationen des erstgenannten Systems, so ist

$$G_{\frac{n(n+1)}{2}} = S^{-1}TS$$

die gesuchte Bewegungsgruppe. Sie zeigt, daß das Linienelement in allen Normalkoordinatensystemen dieselbe Form hat, wo auch immer

im sphärischen Raum R_n ihr Nullpunkt liegen mag. Daraus folgt sogleich die Allgemeingültigkeit der Relationen (116) und (130) im sphärischen Raum. Man kann das natürlich auch durch direkte Rechnung bestätigen.

Die Konstanz des Krümmungsmaßes ist offenbar immer dann vorhanden, wenn der R_n folgende Eigenschaft hat: In einer gewissen (endlichen) Umgebung eines jeden Punktes des R_n läßt sich ein Koordinatensystem so bestimmen, daß das Linienelement dort eine der vier äquivalenten Formen (120), (122), (124) und (128) annimmt; α braucht nicht notwendig positiv zu sein. Ist α negativ, so hat man in den betreffenden Formeln überall a^2 durch $-a^2$ zu ersetzen, und es gilt dann

$$\alpha = -\frac{1}{a^2}. \tag{130a}$$

Riemann hat nun in seinem Habilitationsvortrag darauf hingewiesen, und *Lipschitz*[88]) hat zuerst bewiesen, daß auch umgekehrt aus der Gültigkeit von (116) immer die genannte Eigenschaft des R_n folgt. *Vermeil*[89]) gab mittels Potenzreihenansatzes für das Linienelement in den Normalkoordinaten einen einfacheren Beweis des allgemeinen Satzes, daß bei gegebenem Krümmungstensor auch schon die Form des Linienelementes in Normalkoordinaten eindeutig bestimmt ist. Dies wurde gleichfalls schon von *Riemann* angedeutet. In der Physik hat dieser Umkehrsatz bisher keine Anwendung gefunden.

Für kosmologische Fragen (vgl. Abschn. IV) von Bedeutung ist jedoch folgender Umstand. Durch die Form des Linienelementes sind die Zusammenhangsverhältnisse des R_n im Großen keineswegs eindeutig bestimmt. Dies ist derjenige Punkt, wo die projektive Auffassung die differentialgeometrische zu ergänzen hat. Erstere gestattet für die Räume *konstanter Krümmung* ohne weiteres die Frage nach dem Zusammenhang des *ganzen* Raumes zu beantworten. So ergeben sich, wie zuerst *Klein*[90]) gezeigt hat, für die Räume mit konstanter *positiver* Krümmung zwei Möglichkeiten. Entweder entsprechen im Koordinatensystem der Darstellung (122) jedem Wertesystem der Koordinaten zwei oder nur ein Raumpunkt. Im ersteren Fall heißt der Raum sphärisch, im zweiten in Anlehnung an die projektive Auffassung elliptisch. Beide Arten von Räumen sind, obwohl unbegrenzt,

88) *R. Lipschitz,* Crelles J. l. c. Anm. 74).

89) *H. Vermeil,* Math. Ann. 79 (1918), p. 289, l. c. Anm. 81b).

90) *F. Klein,* Math. Ann. 4 (1871), p. 573; 6 (1872), p. 112 und insbesondere Math. Ann. 37 (1890), p. 544, wo das Problem in seiner ganzen Allgemeinheit gelöst wird. Ferner Programm zum Eintritt in die philosophische Fakultät in Erlangen 1872, wiederabgedruckt in den Math. Ann. 43 (1893), p. 63.

dennoch endlich im *Riemann*schen Sinn. Das Gesamtvolumen des elliptischen Raumes ist offenbar halb so groß wie das Gesamtvolumen des sphärischen Raumes gleicher Krümmung. Gleiches gilt vom Verhältnis der gesamten Längen der (geschlossenen) geodätischen Linien in beiden Räumen. Bei den Räumen mit konstanter *negativer* Krümmung ist die Zahl der Möglichkeiten viel größer. Besonders bemerkenswert ist die *Clifford*sche Fläche, welche die Möglichkeit einer *endlichen* Mannigfaltigkeit mit der *Krümmung Null* zeigt. Die ganze Frage nach den Zusammenhangsverhältnissen der Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung im Großen wurde von *Killing* als Problem der *Clifford-Klein*schen Raumformen bezeichnet.

19. Die Integralsätze von Gauß und Stokes im vierdimensionalen Riemannschen Raum. Die Komplikation der Tensoranalysis der allgemeinen Transformationsgruppe gegenüber der der affinen Gruppe rührt daher, daß es jetzt nicht mehr gestattet ist, die Komponenten von zwei Tensoren, welche an verschiedene Punkte geknüpft sind, einfach zu addieren. Um aus Tensoren durch Differentiation neue Tensoren abzuleiten, muß man deshalb im allgemeinen den in Nr. **14** entwickelten Begriff der Parallelverschiebung zu Hilfe nehmen. Die betreffenden Regeln wurden zuerst rein formal von *Christoffel*[91]) abgeleitet und später von *Ricci* und *Levi-Civita*[56a]) in ein System gebracht. Vereinfachungen und geometrische Interpretationen brachten die Arbeiten von *Weyl*[92]), *Hessenberg*[93]) und *Lang*[56a]).

Bei gewissen Operationen, die zunächst betrachtet werden sollen und sich auf Tensoren ersten Ranges im Sinne der Nr. **11** beziehen, gehen jedoch die geodätischen Komponenten in das Schlußresultat nicht ein. Es ist deshalb eine naturgemäße Forderung, bei ihrer Herleitung den Begriff der Parallelverschiebung nicht zu benützen. Zunächst kann aus einem Skalar φ durch Differentiation ein Vektor grad φ abgeleitet werden, wie unmittelbar aus der Invarianz von

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} d x^i$$

folgt. Dabei ist zu beachten, daß die $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ *kovariante* Komponente sind:

$$\operatorname{grad}_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}. \tag{131}$$

Um weitere Relationen zu finden, müssen wir die Integralsätze von

91) l. c. Anm. 68).

56a) l. c. Anm. 56).

92) *H. Weyl*, Raum—Zeit—Materie, 1. Aufl. 1918, p. 103—107.

93) l. c. Anm. 77).

Gauß und *Stokes* auf unseren Fall anwenden, wobei wir uns aber auf vierdimensionale Mannigfaltigkeiten beschränken wollen. Die betreffende Verallgemeinerung des *Gauß*schen und *Stokes*schen Satzes für Räume beliebiger Dimension findet sich in allgemeinster Weise bei *Poincaré*[93a]) und *Goursat*[93b]). Für den Fall der speziellen Relativitätstheorie (euklidische Geometrie und orthogonale Koordinaten) wurden die Formeln auch von *Sommerfeld*[55a]) entwickelt.

Es seien

$$f^i,\ F^{ik},\ A^{ikl} \tag{132}$$

die Komponenten eines Linien-, Flächen- und Raumtensors,

$$ds^i,\ d\sigma^{ik},\ dS^{ikl},\ d\Sigma \tag{133}$$

die eines Kurven-, Flächen, Raum- und Weltelementes, mit den absoluten Beträgen

$$ds,\ d\sigma,\ dS,\ |d\Sigma|. \tag{133a}$$

Die Komponenten (133) drücken sich durch die Koordinaten so aus: Die ds^i sind direkt gleich den Koordinatendifferentialen

$$ds^i = dx^i; \tag{134a}$$

sind ferner dx^i, δx^i resp. dx^i, δx^i, $\mathfrak{d} x^i$ die Komponenten zweier bzw. dreier Linienelemente in unabhängigen Richtungen auf dem Flächen- bzw. Raumelement, so ist

$$d\sigma^{ik} = \begin{vmatrix} dx^i, & \delta x^i \\ dx^k, & \delta x^k \end{vmatrix} \tag{134b}$$

$$dS^{ikl} = \begin{vmatrix} dx^i, & \delta x^i, & \mathfrak{d} x^i \\ dx^k, & \delta x^k, & \mathfrak{d} x^k \\ dx^l, & \delta x^l, & \mathfrak{d} x^l \end{vmatrix}. \tag{134c}$$

Setzt man diese Ausdrücke in irgendein Flächen- bzw. Raumintegral $\int \varphi(x)\, d\sigma^{ik}$ bzw. $\int \varphi(x)\, dS^{ikl}$ ein, so entspricht dies derjenigen Schreibweise der mehrfachen Integrale, die *Klein*[94]) gelegentlich eingeführt und die *Graßmann*sche genannt hat. Sie ist die naturgemäße, da sie sofort das Verhalten mehrfacher Integrale bei Koordinatentransformationen abzulesen gestattet, und *Klein*[94]) zieht sie deshalb der gewöhnlichen Schreibweise vor. Jedoch hat die letztere den Vorzug

93a) *H. Poincaré*, Acta Math. 9 (1887), p. 321.

93b) *E. Goursat*, Liouvilles J. (6) 4 (1908), p. 331.

55a) *A. Sommerfeld*, l. c. Anm. 55). Die Divergenz des Flächentensors wird dort in anderer Weise hergeleitet, als es hier geschieht.

94) *F. Klein*, Über die Integralform der Erhaltungssätze usw., Gött. Nachr., math.-phys. Kl., 1918, p. 394.

größerer Einfachheit, obzwar sie wieder den Nachteil mit sich bringt, das Verhalten des Integranden gegenüber Koordinatentransformationen nicht unmittelbar in Evidenz zu setzen. Man gelangt zu ihr, wenn man die unabhängigen Richtungen d, δ (d, δ, $\mathfrak{d}$) bei den einzelnen Komponenten des Flächen (Raum-)elementes parallel den zugehörigen Koordinaten annimmt. Dann wird nämlich

$$d\sigma^{ik} = dx^i \delta x^k, \; dS^{ikl} = dx^i \delta x^k \mathfrak{d} x^l,$$

wofür man noch einfacher schreibt

$$d\sigma^{ik} = dx^i dx^k, \; dS^{ikl} = dx^i dx^k dx^l. \tag{135}$$

Es ist aber wohl zu beachten, daß sich diese Ausdrücke bei Koordinatentransformationen wie die Komponenten eines Flächen- bzw. Raumtensors verhalten.

Wir können nun aus den Tensoren (132) und (133) zweierlei Arten von Invarianten bilden.

1. Die Orthogonalprojektionen von f, F, A auf $ds, d\sigma, dS$ multipliziert mit dem Betrag der letzteren Tensoren:

$$f_s ds = f_i dx^i \tag{136a}$$

$$F_\sigma d\sigma = F_{ik} d\sigma^{ik} \tag{136b}$$

$$A_S dS = A_{ikl} dS^{ikl}. \tag{136c}$$

2. Die Orthogonalprojektion des Vektors f auf die Normalrichtung zu dS, des Flächentensors F auf die zu $d\sigma$ normale Flächenrichtung, des Raumtensors A auf die zu s normale Raumrichtung, immer multipliziert mit dem Betrag der letzteren Tensoren. Man findet den Wert dieser Ausdrücke mit Hilfe der dualen Ergänzungen zu ds, $d\sigma$, dS (nach Nr. **12** (54b), (55) zu:

$$f_n dS = f^i dS_i^* = \sum_{(iklm)} \sqrt{g} f^i dS^{klm} = \sum_{(iklm)} \mathfrak{f}^i dS^{klm} \tag{137a}$$

$$F_N d\sigma = F^{ik} d\sigma_{ik}^* = \sum_{(iklm)} \sqrt{g} F^{ik} d\sigma^{lm} = \sum_{(iklm)} \mathfrak{F}^{ik} d\sigma^{lm} \tag{137b}$$

$$A_n ds = A^{ikl} ds_{ikl}^* = \sum_{(iklm)} \sqrt{g} A^{ikl} ds^m = \sum_{(iklm)} \mathfrak{A}^{ikl} ds^m. \tag{137c}$$

Die Summen $\sum_{(iklm)}$ sind darin über gerade Permutationen zu erstrecken, und $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{A}$ sind die zu f, F, A gehörigen Tensordichten (Nr. **11**).

Die Verallgemeinerung der Integralsätze von *Gauß* und *Stokes* läßt sich nun so formulieren. Wir integrieren (136a) über eine geschlossene Kurve, (136b) und (137b) über eine geschlossene Fläche und (137a) über ein geschlossenes Raumstück. [Die analogen Sätze für (136c) und (137c) lassen wir beiseite, da sie in der Physik bisher

keine Anwendung gefunden haben.] Diese Integrale lassen sich in Integrale über das von ihnen eingeschlossene Flächen-, Raum- bzw. Weltgebiet verwandeln:

(138a) $$\int f_s ds = \int \mathrm{Rot}_N f \cdot d\sigma = \int \mathrm{Rot}_{ik} f \cdot d\sigma^{ik}$$

(138b) $$\int F_\sigma d\sigma = \int \mathrm{Rot}_n F \cdot dS = \int \mathrm{Rot}_{ikl} F \cdot dS^{ikl}$$

(139a) $$\int f_n dS = \int \mathrm{Div} f \cdot d\Sigma = \int \mathfrak{Div}\, \mathfrak{f} dx$$

(139b) $$\int F_N d\sigma = \int \mathrm{Div}_n F \cdot dS = \int \sum_{(iklm)} \mathfrak{Div}^i \mathfrak{F} \cdot dS^{klm}$$

Dabei ist gesetzt:

(140a) $$\mathrm{Rot}_{ik} f = \frac{\partial f_k}{\partial x^i} - \frac{\partial f_i}{\partial x^k}$$

(140b) $$\mathrm{Rot}_{ikl} F = \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i}$$

und

(141a) $$\mathfrak{Div}\, \mathfrak{f} = \frac{\partial \mathfrak{f}^k}{\partial x^i} \qquad \left(\mathrm{Div} f = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} f^i}{\partial x^i}\right)$$

(141b) $$\mathfrak{Div}^i \mathfrak{F} = \frac{\partial \mathfrak{F}^{ik}}{\partial x^k} \qquad \left(\mathrm{Div}^i F = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} F^{ik}}{\partial x^k}\right).$$

Das Wichtige dabei ist, daß die Invarianz der Ausgangsintegrale auch die Invarianz der Endintegrale nach sich zieht. Diese kann aber nur dann vorhanden sein, wenn schon der Integrand an jeder Stelle invariant ist, da das Integrationsgebiet beliebig klein gewählt werden kann. Daraus folgt nun weiter, daß $\mathrm{Rot}_{ik} f$ und $\mathrm{Rot}_{ikl} F$ die kovarianten Komponenten eines Flächen- bzw. Raumtensors, $\mathfrak{Div}\, \mathfrak{F}$ eine skalare Dichte und $\mathfrak{Div}^i \mathfrak{F}$ die kontravarianten Komponenten einer Vektordichte sind. Diese Eigenschaften der Operationen Rot und $\mathfrak{Div}$ können in die Regel zusammengefaßt werden:

1. Die Operation Rot erhöht die Stufe des Tensors (vgl. Nr. **11**), die Operation $\mathfrak{Div}$ erniedrigt sie.

2. Bei der Operation Rot werden die kovarianten Komponenten des Tensors, bei der Operation $\mathfrak{Div}$ die kontravarianten Komponenten der Tensordichte differenziert. Wir fügen noch hinzu:

3. Die Operationen Rot und $\mathfrak{Div}$ entsprechen einander dual. Es folgt dies aus den Relationen (137). In der Tat ist z. B.

(142) $$\mathrm{Rot}_{ikl} F = \mathfrak{Div}^m \mathfrak{F}^*,$$

wie man leicht nachrechnet.

Wie in der gewöhnlichen Vektorrechnung können die Operationen Grad, Rot, $\mathfrak{Div}$ miteinander kombiniert werden. Es ergibt sich

(143) $$\mathrm{Rot}\ \mathrm{Grad}\ \varphi = \mathfrak{Div}\ \mathfrak{Div}\ \mathfrak{F} = \mathrm{Rot}\ \mathrm{Rot} f = 0.$$

Wendet man hintereinander die Operation Div und Grad auf einen Skalar φ an, so gelangt man zur Verallgemeinerung der *Laplace*schen Operation Δ. Man bezeichnet sie nach einem Vorschlag von *Cauchy* mit $\Box$. In die Invariantentheorie n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten wurde sie bereits von *Beltrami*[94a]) eingeführt; ihre erste Anwendung im Fall der speziellen Relativitätstheorie kommt bei *Poincaré* vor. Es ist dabei zu beachten, daß man nach der Grad-Bildung zufolge (141a) zu den kontravarianten Komponenten der Vektordichte übergehen muß:

$$(144)\qquad \Box\varphi = \operatorname{Div}\operatorname{Grad}\varphi = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}\,g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right).$$

Für konstante g_{ik} wird daraus

$$(144\,a)\qquad \Box\varphi = g^{ik}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^k}.$$

In diesem Spezialfall kann man auch mittels der Operation $\Box$ aus einem Vektor f_i einen neuen Vektor ableiten. Es gilt dann nämlich wie in der gewöhnlichen Vektorrechnung

$$(145)\qquad \operatorname{Div}_i\operatorname{Rot} f = \operatorname{Grad}_i\operatorname{Div} f - \Box f_i.$$

Diese Relation läßt jedoch für nicht konstante g_{ik} keine Verallgemeinerung zu.

Es sei noch bemerkt, daß sich hier die in Nr. 11 aus geometrischen Gründen eingeführte Systematik der Tensoren auch rechnerisch aufs beste bewährt. Die Tensoren 1. Ranges sind vor denen höheren Ranges analytisch dadurch ausgezeichnet, daß sich aus ihnen ohne Zuhilfenahme der geodätischen Komponenten des Bezugssystems durch Differentiation neue Tensoren bilden lassen.

20. Herleitung von invarianten Differentialoperationen mit Benutzung der geodätischen Komponenten. Wir kommen nun zur zweiten Gruppe von Differentialoperationen, bei welcher der Begriff der Parallelverschiebung eine wesentliche Rolle spielt. Für die physikalischen Anwendungen sind nur zwei von diesen Operationen von Bedeutung, nämlich diejenigen, welche den Operationen

$$a_{ik} = \frac{\partial a_i}{\partial x^k}$$

und

$$t_i = \frac{\partial t_i^k}{\partial x^k}\quad \text{(Div des Tensors zweiten Ranges)}$$

der affinen Gruppe entsprechen. Um ihren Ausdruck in der allgemeinen Transformationsgruppe zu finden, machen wir folgende Konstruktion. Es sei zunächst in jedem Punkt der Kurve $x^k = x^k(t)$ ein

94a) *E. Beltrami*, Sulla teorica generale dei parametri differenziale, Memorie Acc. di Bologna (2) 8 (1869), p. 549.

Vektor mit den Komponenten a^i gegeben. Ist P ein beliebig herausgegriffener Kurvenpunkt, so konstruieren wir durch Parallelverschiebung des Vektors $a^i(P)$ längs der Kurve eine zweite Vektorgesamtheit $\bar{a}^i(P')$, P' beliebig, wobei also in P $\bar{a}^i$ und a^i übereinstimmt:

$$\bar{a}^i(P) \equiv a^i(P).$$

Nunmehr kann durch

$$A^i = \lim_{P' \to P} \frac{a^i(P') - \bar{a}^i(P')}{\Delta t}$$

in invarianter Weise ein Vektor definiert werden, da im Zähler die Differenz zweier Vektoren *im selben Punkt* gebildet ist. Aus (64) und (70) folgt sofort

$$(146\,\mathrm{a}) \qquad A^i = \frac{d a^i}{dt} + \Gamma^i_{rk} a^r \frac{d x^k}{dt} \qquad \text{und}$$

$$(146\,\mathrm{b}) \qquad A_i = \frac{d a_i}{dt} - \Gamma^r_{ik} a_r \frac{d x^k}{dt}.$$

Wird an Stelle von t die Bogenlänge s und an Stelle von a^i der Tangentialvektor $u^i = \frac{dx^i}{ds}$ gesetzt, so erhält man auf diese Weise den Vektor der „Beschleunigung", dessen Komponenten B^i mit den linken Seiten von (80) übereinstimmen:

$$(147) \qquad B^i = \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{rs} \frac{d x^r}{ds} \frac{d x^s}{ds}.$$

Ist a^i nicht nur längs einer Kurve, sondern als Vektorfeld gegeben, so ist $\frac{d a^i}{dt} = \frac{\partial a}{\partial x^k} \frac{d x^k}{dt}$, und durch (146) wird jeder Richtung $\frac{d x^k}{dt}$ ein Vektor

$$A_i = a_{ik} \frac{d x^k}{dt}, \qquad A^i = a^i_k \frac{d x^k}{dt}$$

zugeordnet. Daraus folgt, daß

$$(148\,\mathrm{a}) \qquad a^i_k = \frac{\partial a^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{rk} a^r$$

$$(148\,\mathrm{b}) \qquad a_{ik} = \frac{\partial a^i}{\partial x^k} - \Gamma^r_{ik} a_r$$

die Komponenten eines Tensors bilden. Er ist die gesuchte Verallgemeinerung des Tensors $\frac{\partial a_i}{\partial x^k}$ der affinen Gruppe.

Ein Vektorfeld a^i, für welches der zugehörige Tensor a_{ik} in einem Punkt P verschwindet, heißt in diesem Punkt *stationär*. Nach Nr. **16** und **18** gibt es im euklidischen Raum und nur in diesem Vektorfelder, die in allen Punkten eines endlichen Gebietes stationär sind.

Da das Größensystem a_{ik} weder symmetrisch noch schiefsymmetrisch ist, haben wir es hier nicht mit einem Tensor im geometrischen Sinne der Nr. **11**, sondern bloß mit einem Tensor im weiteren Sinne

der Nr. 9 zu tun. Wir können a_{ik} spalten in einen schiefsymmetrischen Teil

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x^k} - \frac{\partial a_k}{\partial x^i}\right)$$

und einen symmetrischen Teil

$$\hat{a}_{ik} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x^k} + \frac{\partial a_k}{\partial x^i}\right) - \Gamma^{r}_{i\,k} a_r. \tag{148c}$$

Mit Hilfe der stationären Vektorfelder können wir nun nach dem Vorgang von *Weyl*[95]) die Divergenz eines Tensors 2. Ranges T^{ik} ableiten. Es sei ξ^i ein in P stationäres Vektorfeld, so daß in diesem Punkt

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} = -\Gamma^{\,i}_{r\,k}\xi^r$$

und

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} = \Gamma^{r}_{i\,k}\xi_r$$

ist. Dann bilden wir nach (141a) die Divergenz des Vektors

$$f^i = T^{ik}\xi_k = T_k^{\,i}\xi^k.$$

Setzen wir die angeschriebenen Werte für die Ableitungen der ξ_i ein, so kommt

$$\mathfrak{Div}\, f = \frac{\partial \mathfrak{f}^i}{\partial x^i} = \mathfrak{Div}_i\,\mathfrak{T}\cdot\xi^i = \mathfrak{Div}^i\,\mathfrak{T}\cdot\xi_i \tag{149}$$

mit

$$\mathfrak{Div}_i\,\mathfrak{T} = \frac{\partial \mathfrak{T}_i^{\,k}}{\partial x^k} - \mathfrak{T}_r^{\,s}\,\Gamma^{r}_{i\,s} = \frac{\partial \mathfrak{T}_i^{\,k}}{\partial x^k} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i}\mathfrak{T}^{rs}. \tag{150a}$$

$$\mathfrak{Div}^i\,\mathfrak{T} = \frac{\partial \mathfrak{T}^{ik}}{\partial x^k} + \mathfrak{T}^{rs}\Gamma^{\,i}_{r\,s}. \tag{150b}$$

$\mathfrak{T}$ ist dabei die zu T gehörige Tensordichte, und aus der Invarianz von (149) folgt, daß (150a) und (150b) die ko- bzw. kontravarianten Komponenten einer Vektordichte bilden.

Im euklidischen Raum kann die Divergenz eines Tensors zweiten Ranges auch noch anders interpretiert werden. Sind r^i und s^i zwei Einheitsvektoren, so möge $T_{(rs)} = T_{ik}r^i s^k$ die Komponente des Tensors nach diesen zwei Richtungen heißen. Ist r^i in P beliebig vorgegeben, so kann man im euklidischen Raum dieser Richtung in jedem Punkt P' eine parallele Richtung $\bar{r}^i$ in eindeutiger und invarianter Weise zuordnen. Das Vektorfeld $\bar{r}^i$ ist offenbar überall stationär und kann in (149) für ξ^i genommen werden, so daß gilt

$$\mathfrak{Div}\,(\mathfrak{T}\bar{r}) = \mathfrak{Div}_{\bar{r}}\cdot\mathfrak{T}.$$

Setzt man nun in (139a) $\mathfrak{f} = (\mathfrak{T}\bar{r})$, so folgt sofort

$$\int T_{(\bar{r}n)}\,dS = \int \mathfrak{Div}_{\bar{r}}\,\mathfrak{T}\,dx = \int \mathfrak{Div}_{\bar{r}}\,\mathfrak{T}\,d\Sigma, \tag{151}$$

$$\mathfrak{Div}_{\bar{r}}\,\mathfrak{T} = \lim_{S\to 0}\frac{\int T_{(\bar{r}n)}\,dS}{\int d\Sigma}, \tag{151a}$$

95) *H. Weyl*, Raum—Zeit—Materie, 3. Aufl., 1920, p. 104.

eine Formel, die von *Lang*[96]) abgeleitet wurde. Man kann für vorliegenden Zweck jeden nichteuklidischen Raum durch einen euklidischen Tangentialraum ersetzen, da die zweiten Differentialquotienten der g_{ik} in das Schlußresultat (150) nicht eingehen und die ersten Ableitungen der g_{ik} durch geeignete Wahl der Koordinaten in beiden Räumen immer zur Übereinstimmung gebracht werden können. Deswegen kann das Ergebnis des Grenzüberganges in (151a), der Vektorcharakter von $\mathfrak{Div}_i \mathfrak{T}$, allgemeine Gültigkeit beanspruchen, obwohl das Integral der rechten Seite nur im euklidischen Raume einen Sinn hat.

Der Vollständigkeit halber sei hier noch die folgende allgemeine Formel angeführt, die in der Physik jedoch keine weitere Rolle spielt. Aus dem Tensor $a^{ikl\cdots}{}_{rst\cdots}$ folgt durch Differentiation der Tensor höheren Ranges

$$(152)\quad \begin{cases} a^{ikl\cdots}{}_{p,rst\cdots} = \dfrac{\partial a^{ikl\cdots}{}_{rst\cdots}}{\partial x^p} + \Gamma^i_{\varrho p} a^{\varrho kl\cdots}{}_{rst\cdots} + \Gamma^k_{\varrho p} a^{i\varrho l\cdots}{}_{rst\cdots} + \\ \qquad + \cdots - \Gamma^{\varrho}_{p r} a^{ikl\cdots}{}_{\varrho st\cdots} - \Gamma^{\varrho}_{p s} a^{ikl\cdots}{}_{r\varrho t\cdots} - \cdots \end{cases}$$

Die durch (152) dargestellte Operation, die sich schon bei *Christoffel* findet, nennen *Ricci* und *Levi-Civita* kovariante Differentiation.

Man hat sie früher wie folgt benutzt, um die Divergenz des Tensors 2. Ranges abzuleiten. Man bildete zuerst gemäß (152) den Tensor T_l^{ik} durch Differentiation von T^{ik} und verjüngte dann:

$$\mathrm{Div}^i T = T_k^{ik}.$$

Es möge noch erwähnt werden, wie *Ricci* und *Levi-Civita*[56b]) zu dem Ausdruck für den Krümmungstensor gelangt sind. Man gehe aus vom beliebigen Vektor a_i und bilde zuerst nach (148b) a_{ik}, dann nach (152) $a_{ik,l}$. Auf der rechten Seite stehen dann sowohl Glieder, welche nur die a_i selbst, als auch Glieder, welche die ersten und zweiten Ableitungen der a_i enthalten. Letztere heben sich aber fort, wenn man die Differenz $a_{ik,l} - a_{il,k}$ bildet, und es bleibt einfach stehen

$$a_{ik,l} - a_{il,k} = R^h{}_{ikl} a_h.$$

Damit ist dann der Tensorcharakter des Größensystems $R^h{}_{ikl}$ bewiesen. Diese Methode verschafft aber keine Einsicht in seine natürliche geometrische Bedeutung.

21. Affintensoren und freie Vektoren. Obwohl die allgemeine Relativitätstheorie es nur mit Gleichungen zu tun hat, die gegenüber beliebigen Transformationen der Koordinaten kovariant sind, spielen dennoch in ihr auch Größensysteme eine Rolle, die sich nur gegenüber

96) *Lang,* Diss. München, l. c. Anm. 56).

56b) *Ricci* und *T. Levi-Civita,* l. c. Anm. 56), vgl. auch die Darstellung bei *Einstein,* Ann. d. Phys. 49, l. c. Anm. 56).

linearen (affinen) Koordinatentransformationen wie Tensoren verhalten. Wir nennen sie *Affintensoren.* Solche Affintensoren sind z. B. die geodätischen Komponenten. Insbesondere kommen aber auch Affintensoren U_i^k vor, deren zugehörige Tensordichten $\mathfrak{U}_i^k = U_i^k \sqrt{g}$ *in jedem Bezugssystem* den Gleichungen

$$\frac{\partial \mathfrak{U}_i^k}{\partial x^k} = 0 \tag{153}$$

genügen. Es ist klar, daß sich die U_i^k bei allgemeinen Koordinatentransformationen nicht linear-homogen transformieren können. Man kann jedoch aus den U_i^k durch Integration ein Größensystem J_k ableiten, das sich gegenüber einer viel allgemeineren Gruppe von Transformationen als der affinen wie ein Vektor verhält.

Um dies zu zeigen, stellen wir zuerst eine vorbereitende Hilfsbetrachtung an. Es sei ein Vierervektor s^k mit der zugehörigen Vektordichte $\mathfrak{s}^k$ gegeben, dessen Div überall verschwindet.

$$\frac{\partial \mathfrak{s}^k}{\partial x^k} = 0. \tag{154}$$

Es habe ferner $\mathfrak{s}^k$ nur innerhalb einer „Weltröhre" von Null verschiedene Werte oder nehme jedenfalls nach außen so rasch ab, daß die über außerhalb der Weltröhre gelegene Gebiete erstreckten Integrale, die im folgenden vorkommen, verschwinden, wenn man das Integrationsgebiet hinreichend weit entfernt. Wir betrachten ferner nur solche Koordinatensysteme, in denen die Räume konstanter Zeit $x^4 = \text{const.}$ die Weltröhre nur in einfach zusammenhängenden Bereichen schneiden. Nun benutzen wir den Umstand, daß nach (139a) und (154), das Integral $\int s_n dS$ stets verschwindet, wenn es über ein geschlossenes Raumstück integriert wird. Als Integrationsgebiet wählen wir zuerst zwei Querschnitte $x^4 = \text{const.}$, die wir uns durch außerhalb der Weltröhre gelegene Raumteile verbunden denken. Dann folgt mit Rücksicht auf (137a), daß das Integral

$$J = \int \mathfrak{s}^4 dx^1 dx^2 dx^3 \tag{155}$$

für beide Querschnitte den gleichen Wert hat, d. h. von x^4 unabhängig ist. Nun führen wir ein zweites Koordinatensystem K' ein, das innerhalb der Weltröhre nur der Bedingung zu genügen hat, daß die Räume $x'^4 = \text{const.}$ die Weltröhre in einfach-zusammenhängenden Bereichen schneidet, außerhalb der Weltröhre aber konstante g_{ik} haben soll. Indem wir nun als Integrationsgebiet einen Querschnitt $x^4 = \text{const.}$ und einen Querschnitt $x'^4 = \text{const.}$ nehmen, die wir immer so wählen können, daß sie sich gegenseitig nicht schneiden, ergibt sich

$$\int \mathfrak{s}^4 dx^1 dx^2 dx^3 = \int \mathfrak{s}'^4 dx'^1 dx'^2 dx'^3,$$

d. h. das Integral J ist gegenüber allen hier zugelassenen Koordinatentransformationen invariant.

Auf diesen Fall kann man nun den des Integrals über die Komponenten eines Affintensors zurückführen. Man multipliziere diesen Affintensor mit einem Vektor p^k, dessen Komponenten innerhalb der Weltröhre konstant sind,

$$U^k = U_i^k p^i.$$

U^k verhält sich gegenüber allen linearen Transformationen wie ein Vektor. In allen Koordinatensystemen K', die aus dem ursprünglichen System K durch eine solche Transformation hervorgehen, sind die Komponenten p'^i ebenfalls innerhalb der Weltröhre konstant, und es gilt deshalb in ihnen auch die Gleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{U}^k}{\partial x^k} = 0.$$

Nach (155) ist deshalb das Integral

$$J = \int \mathfrak{U}^4 dx^1 dx^2 dx^3$$

gegenüber linearen Transformationen invariant und hat auch für jeden Querschnitt denselben Wert. Da aber

$$J = J_k p^k,$$

worin

$$J_k = \int \mathfrak{U}_k^4 dx^1 dx^2 dx^3 \tag{156}$$

und der Vektor p^k ganz beliebig war, haben die Größen J_k Vektorcharakter gegenüber linearen Transformationen.[97])

Wir zeigen nun nach dem Vorgang von *Einstein*[98]), daß sie diesen Vektorcharakter auch behalten, wenn man vom Koordinatensystem K zu irgendeinem Koordinatensystem K' übergeht, welches außerhalb der Weltröhre mit K übereinstimmt. Zu diesem Zweck brauchen wir nur ein Koordinatensystem zu konstruieren, welches auf *einem* Querschnitt $x''^4 = c_1$ mit K, auf einem anderen Querschnitt $x''^4 = c_2$ mit K' übereinstimmt. Da schon bewiesen ist, daß für zwei verschiedene Querschnitte $x^4 =$ const. desselben Koordinatensystems die J_k die gleichen Werte haben, ist hiermit auch gezeigt, daß die J_k in K und K' dieselben Werte haben. *Sie sind von der Koordinatenwahl innerhalb der Weltröhre überhaupt nicht abhängig.* Es ist interessant, daß man ausgehend von dem Affintensor $\mathfrak{U}_i^k$, der sich nur

---

97) Es wurde dies zuerst bewiesen von *F. Klein*, Über die Integralform der Erhaltungssätze usw., Gött. Nachr., math.-phys. Kl, 1918, p. 394, wo die freien Vektoren ausführlich behandelt werden. Die hier gegebene Ableitung rührt von *H. Weyl* her, Raum — Zeit — Materie, 3. Aufl 1920, p. 234.

98) *A. Einstein*, Berl. Ber. 1918, p. 448.

bei *linearen* Koordinatentransformationen kovariant verhält, durch Integration zu einem Größensystem J_k gelangt, das sich gegenüber einer *viel allgemeineren* Transformationsgruppe wie ein Vektor verhält. Der Vektor J_k unterscheidet sich von den gewöhnlichen Vektoren dadurch, daß er nicht an einen bestimmten Punkt gebunden ist. Wir nennen ihn im Anschluß an die Terminologie der Mechanik mit *Klein* einen *freien Vektor.*

22. Realitätsverhältnisse. Es wurde in diesem Abschnitt stets so gerechnet, als ob die Form ds^2 definit wäre. In der wirklichen Raum-Zeitwelt ist das jedoch keineswegs der Fall, vielmehr hat ds^2 in der Normalform drei positive und ein negatives Zeichen. Formal bleiben alle bisherigen Ergebnisse auch für diesen Fall bestehen, da man durch Einführung einer imaginären Koordinate den einen Fall auf den anderen zurückführen kann (vgl. Nr. 7). Geometrisch müssen die Formeln jedoch etwas anders gedeutet werden.

Bleibt man zunächst im Gültigkeitsbereich der speziellen Relativitätstheorie und führt als vierte Koordinate $x^4 = ct$ ein, so läßt sich bei gegebenem Anfangspunkt des Koordinatensystems die Welt in gegenüber Lorentz-Transformationen invarianter Weise in zwei Teile zerfällen, die charakterisiert sind durch

(A) $$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 < 0 \quad \text{(Vor- und Nachkegel)}$$

und

(B) $$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 > 0 \quad \text{(Zwischengebiet).}$$

Getrennt werden sie durch den Kegelmantel

(C) $$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0,$$

auf dem die Weltlinien der Lichtstrahlen verlaufen.

Läßt man den Anfangspunkt eines Vektors mit dem Ursprung O des Koordinatensystems zusammenfallen, so heißt der Vektor raumartig, falls sein Endpunkt in das Weltstück (B), zeitartig, falls er in das Weltstück (A), und ein Nullvektor (Vektor vom Betrag Null) falls er auf den Kegel (C) fällt. Die Lorentz-Transformation stellt sich wegen des veränderten Vorzeichens der vierten Dimension eigentlich nicht dar als Drehung des Koordinatensystems, sondern als Übergang von einem System konjugierter Durchmesser des Hyperboloids

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 1$$

zu einem anderen. (Diese Interpretation der Lorentz-Transformation sowie auch die übrigen hier gebrauchten Bezeichnungen kommen zuerst bei *Minkowski* vor.) Durch eine einfache geometrische Betrachtung oder auch durch eine einfache Anwendung der Formel (I) für die Lorentz-Transformation kann gezeigt werden, daß durch geeignete Koordinaten-

wahl für die Punkte des Weltstückes (A) stets räumliche, für die Punkte des Weltstückes (B) stets zeitliche Koinzidenz (Gleichzeitigkeit) mit dem Ursprung erzielt werden kann. Und was im wesentlichen das gleiche ist: Durch geeignete Koordinatenwahl können stets die zeitliche Komponente eines raumartigen oder alle räumlichen Komponenten eines zeitartigen Vektors zum Verschwinden gebracht werden. Nach den Ergebnissen der Nr. 6 können überdies nur die Weltpunkte (A) mit dem Ursprung kausal verknüpft sein. Für die durch das Linienelement

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^4)^2$$

bestimmte Geometrie, die hier besprochen wurde, möge mit *Klein* und *Hilbert* der Terminus *pseudoeuklidisch* eingeführt werden.

Ganz analoge Unterschiede zwischen der Geometrie des positiv definiten und des indefiniten Linienelementes gelten im Fall der allgemeinen *Riemann*schen Geometrie. Man konstruiere alle vom Punkt P_0 ausgehenden geodätischen Linien, welche in P_0 den Bedingungen genügen:

(A) $$g_{ik}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt} < 0$$

oder

(B) $$g_{ik}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt} > 0$$

oder

(C) $$g_{ik}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0$$

(t = Kurvenparameter). Sie füllen gewisse Weltstücke bzw. den diese trennenden Kegelmantel (C) stetig aus. Die entsprechenden Richtungen (Vektoren) in P_0 heißen wieder zeitartig, raumartig bzw. Nullrichtungen (Nullvektoren).

Diese Einteilung der Raum-Zeitwelt hat, wie *Hilbert*[99]) betont hat, eine Einschränkung der zulässigen Punkttransformationen zur Folge. Es müssen nämlich in zulässigen Koordinatensystemen die drei ersten Koordinatenachsen stets raumartige, die vierte stets zeitartige Richtung haben. Dies ist erfüllt, wenn erstens die aus ds^2 durch Nullsetzen von dx^4 entstehende quadratische Form positiv definit ist, wofür die Bedingungen lauten:

$$g_{11} > 0, \qquad \begin{vmatrix} g_{11}, g_{12} \\ g_{21}, g_{22} \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0$$

99) *D. Hilbert,* Grundlagen d. Phys., 2. Mitt., Gött. Nachr., math.-phys. Kl., 1917, p. 53.

und wenn zweitens gilt
$$g_{44} < 0.$$
Diese Ungleichungen dürfen durch zulässige Koordinatentransformationen nicht verletzt werden. Da die Determinante g der g_{ik} zufolge dieser Ungleichungen stets negativ ist, muß in den für den definiten Fall entwickelten Tensorformeln stets $\sqrt{g}$ durch $\sqrt{-g}$ ersetzt werden.[99a])

Nach (B) kann die Bogenlänge einer Weltlinie auch imaginär werden, und zwar ist dies immer der Fall bei der Weltlinie eines materiellen Körpers. Es ist deshalb in diesem Falle praktisch, statt der Bogenlänge s die *Eigenzeit* τ einzuführen, die bestimmt ist durch

$$s = ic\tau. \tag{157}$$

Sie gibt die Zeit an, die eine auf dieser Weltlinie bewegte Uhr anzeigt. Denn in einem Koordinatensystem, in welchem die Uhr momentan ruht, wird $d\tau = dt$. Auch führen wir statt
$$u^i = \frac{dx^i}{ds}$$
den Vektor
$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} \tag{158}$$
ein, für welchen
$$g_{ik} u^i u^k = u_i u^i = -c^2 \tag{159}$$
gilt.

Unter den geodätischen Linien spielen die geodätischen *Nullinien*, die auf dem Kegelmantel (C) liegen, eine Ausnahmerolle. Für sie gilt nämlich zwar das Variationsprinzip (83) und die Differentialgleichungen (80), aber nicht das Variationsprinzip (81). Denn erstens können die Koordinaten hier nicht als Funktionen der Bogenlänge dargestellt werden, weil diese verschwindet, so daß auch in (80) ein anderer Kurvenparameter, der nur bis auf eine willkürliche multiplikative Konstante bestimmt ist, stehen muß. Und zweitens kann wegen des Verschwindens der $\sqrt{g_{ik} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda}}$, die bei der Ableitung von (83) aus (81) in den Nenner

99a) *Minkowski* (l. c. Anm. 55), Abh. II) und *Klein* (Phys. Ztschr., l. c. Anm. 56a) stellen an die zulässigen Punkttransformationen noch eine weitere einschränkende Bedingung: Es soll stets $\frac{\partial x'^4}{\partial x^4} > 0$, Vertauschung von Vergangenheit und Zukunft also ausgeschlossen sein, damit man es mit einer wirklich kontinuierlichen Gruppe zu tun hat. Es folgt jedoch aus der Kovarianz gegenüber dieser engeren Gruppe schon rein formal bereits die Kovarianz gegenüber der Umkehr der Zeit, sofern die Gleichungen nicht ganz künstliche Irrationalitäten enthalten (über diesen letzteren Punkt vgl. Abschn. V). Außerdem scheint die Kovarianz aller Naturgesetze gegenüber der Umkehr der Zeit nach unserer heutigen Auffassung auch aus physikalischen Gründen geboten. Wir werden deshalb die hier erwähnte Einschränkung nicht annehmen.

kommt, der Schluß von (81) auf (83) nicht mehr gezogen werden. Man muß die geodätischen Nullinien vielmehr so definieren: Die geodätischen Nullinien sind vor den anderen auf dem durch (C) bestimmten Kegel liegenden Kurven dadurch ausgezeichnet, daß ein Kurvenparameter λ existiert, für welchen die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} + \Gamma^i_{rs} \frac{dx^r}{d\lambda} \frac{dx^s}{d\lambda} = 0$$

und somit auch das Variationsprinzip (83) befriedigt sind. Für die geodätischen Linien, welche keine Nullinien sind, bleiben dagegen die Entwicklungen der Nr. **15** bestehen.

Auch das Ergebnis von *Vermeil* betreffend den Zusammenhang des Volumens einer Kugel im *Riemann*schen Raum mit der Krümmungsinvariante (Nr. **17**) läßt sich nicht unmittelbar auf den indefiniten Fall übertragen, weil hier der Kugel das unendlich ausgedehnte Hyperboloid entspricht.

Schließlich sei noch erwähnt, daß gewöhnlich in der speziellen Relativitätstheorie die Normalform des Linienelementes definitionsgemäß mit drei positiven und einem negativen Vorzeichen angenommen wird, während in der allgemeinen Relativitätstheorie drei negative und ein positives Vorzeichen angenommen werden. *Hier soll einheitlich an der ersten Bezeichnungsart festgehalten werden.*

23. Infinitesimale Koordinatentransformation und Variationssätze. Ist eine Größe invariant gegenüber Koordinatentransformationen überhaupt, so ist sie insbesondere auch invariant gegenüber *infinitesimalen* Koordinatentransformationen. Der Nutzen, den die Betrachtung der letzteren gewährt, rührt daher, daß aus der Invarianz einer Größe ihnen gegenüber gewisse Differentialgleichungen hergeleitet werden können, denen die Größe genügen muß. Wir definieren nun eine solche infinitesimale Koordinatentransformation durch

$$\bar{x}^i = x^i + \varepsilon \xi^i(x), \tag{160}$$

wo ε eine unendlich kleine Größe ist. Die ξ^i können in ganz beliebiger Weise von den Koordinaten abhängen. Alle Differenzen zwischen gestrichenen und ungestrichenen Funktionen hat man sich im folgenden nach Potenzen von ε entwickelt zu denken. Dabei kommt es uns schließlich allein auf das Glied erster Ordnung an, welches die Variation der betreffenden Funktion heißt. Um die Variation irgendeines Tensors beim Übergang vom ungestrichenen zum gestrichenen Koordinatensystem zu erhalten, hat man in die allgemeine Transformationsformel (25) die Werte

$$\alpha_k^{\ i} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} = \delta_k^{\ i} + \varepsilon \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}; \quad \bar{\alpha}_i^{\ k} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} = \delta_k^{\ i} - \varepsilon \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \tag{161}$$

einzusetzen. Letztere folgen aus $\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^\alpha} = \delta_\alpha^{\ i}$ und sind natürlich nur bis auf Größen höherer Ordnung in ε richtig. Wir merken noch den Wert für die Transformationsdeterminante an:

$$\left|\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\right| = 1 + \varepsilon\frac{\partial \xi^i}{\partial x^i}, \quad \left|\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right| = 1 - \varepsilon\frac{\partial \xi^i}{\partial x^i}. \tag{162}$$

Auf diese Weise erhält man für die Variation des Vektors

$$\delta a^i = \varepsilon\frac{\partial \xi^i}{\partial x^r}a^r, \quad \delta a_i = -\varepsilon\frac{\partial \xi^r}{\partial x^i}a_r \tag{163}$$

und für die des Tensors zweiten Ranges:

$$\begin{aligned} \delta a^{ik} &= \varepsilon\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^r}a^{rk} + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^r}a^{ir}\right),\\ \delta a_k^{\ i} &= \varepsilon\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^r}a_k^{\ r} - \frac{\partial \xi^r}{\partial x^k}a_r^{\ i}\right),\\ \delta a_{ik} &= -\varepsilon\left(\frac{\partial \xi^r}{\partial x^i}a_{rk} + \frac{\partial \xi^r}{\partial x^k}a_{ir}\right). \end{aligned} \tag{164}$$

Entsprechende Formeln gelten insbesondere für die Variation von g_{ik}. Es sei noch angemerkt, daß aus (72) für ein beliebiges symmetrisches System t_{ik} von Zahlen

$$t_{ik}\delta g^{ik} = -t^{ik}\delta g_{ik} \tag{165}$$

folgt. (Hierin ist wie üblich $t^{ik} = g^{i\alpha}g^{k\beta}t_{\alpha\beta}$ gesetzt.) Ebenso folgt aus (73):

$$\delta\sqrt{g} = \tfrac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{ik}\delta g_{ik} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{ik}\delta g^{ik}. \tag{73b}$$

In (163) und (164) handelt es sich immer um die Varation

$$\delta a^i = \bar{a}^i(\bar{x}) - a^i(x), \ \ldots \quad \delta a^{ik} = \bar{a}^{ik}(\bar{x}) - a^{ik}(x), \ \ldots \text{ usw.} \tag{166}$$

Wesentlich hiervon verschieden ist die Variation

$$\delta^* a^i = \bar{a}^i(x) - a^i(x), \ \ldots \quad \delta^* a^{ik} = \bar{a}^{ik}(x) - a^{ik}(x), \ \ldots \text{ usw.} \tag{167}$$

Sie hängt mit jener offenbar zusammen durch die symbolische Relation

$$\delta^* = \delta - \varepsilon\frac{\partial}{\partial x^r}\xi^r, \tag{168}$$

woraus sich unmittelbar die Ausdrücke $\delta^* a^i$, $\delta^* a_i$, usw. ergeben. Aus (164) und (167) folgt die wichtige Formel

$$\frac{1}{2}\int \mathfrak{T}^{ik}\delta^* g_{ik}\,dx = \varepsilon\int\left[-\mathfrak{T}_i^{\ k}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i}\mathfrak{T}^{rs}\xi^i\right]dx$$

oder nach (150a):

$$\frac{1}{2}\int \mathfrak{T}^{ik}\delta^* g_{ik}\,dx = \varepsilon\left[\int \mathfrak{Div}_i\mathfrak{T}\cdot\xi^i dx - \int\frac{\partial}{\partial x^k}(\mathfrak{T}_i^{\ k}\xi^i)\,dx\right]. \tag{169}$$

Schließlich betrachten wir noch die Variation des Integrals

$$J = \int \mathfrak{W}(x)\,dx.$$

Es ist

$$\delta J = \int\limits_{\bar{X}} \overline{\mathfrak{W}}(\bar{x})\, d\bar{x} - \int\limits_{X} \mathfrak{W}(x)\, dx = \int\limits_{X} \overline{\mathfrak{W}}(\bar{x}) \left| \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \right| dx - \int\limits_{X} \mathfrak{W}(x)\, dx,$$

also mit Rücksicht auf (162) und wegen $\overline{\mathfrak{W}}(\bar{x}) = \overline{\mathfrak{W}}(x) + \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x^i} \xi^i$:

$$\delta \int \mathfrak{W}\, dx = \int \delta^* \mathfrak{W}\, dx + \varepsilon \int \frac{\partial (\mathfrak{W} \xi^i)}{\partial x^i}\, dx. \tag{170}$$

Hierin ist $\delta^* \mathfrak{W} = \overline{\mathfrak{W}}(x) - \mathfrak{W}(x)$. Wenn ξ^i an der Grenze des Integrationsgebietes verschwindet, liefert der zweite Term der rechten Seite von (170) keinen Beitrag zu $\delta \int \mathfrak{W}\, dx$, da er nach (139a) in ein Integral über die Grenze verwandelt werden kann. *Ist nun J eine Invariante, also $\mathfrak{W}$ eine skalare Dichte, so muß die Variation* (170) *für beliebige ξ^i verschwinden.* Indem man zuerst den allgemeinen Ausdruck für $\delta \mathfrak{W}$ bei irgendeiner Variation der Feldtensoren, aus denen sich $\mathfrak{W}$ aufbaut, aufstellt und dann die letztere Variation speziell nach (164) durch eine infinitesimale Änderung des Koordinatensystems erzeugt, erhält man aus (170) gewisse Identitäten. Dabei kann in gewissen Fällen noch ξ^i als an der Grenze des Integrationsgebietes verschwindend angenommen werden, was die Rechnungen vereinfacht. Dies wird durch die folgenden Beispiele erläutert, die mit Rücksicht auf die späteren physikalischen Anwendungen durchgerechnet werden.

a) Aus dem Vektor φ_i werde durch Rot der Flächentensor

$$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} \tag{171}$$

und aus diesem die Invariante

$$L = \tfrac{1}{2} F_{ik} F^{ik} \tag{172}$$

abgeleitet. Ist $\mathfrak{L}$ die zu L gehörige skalare Dichte

$$\mathfrak{L} = L \sqrt{-g},$$

so kann aus der Integralinvariante

$$\int \mathfrak{L}\, dx$$

eine für die ponderomotorische Kraft der Elektrodynamik wichtige Transformation abgeleitet werden. Wir beschränken uns dabei auf solche Variationen der Felder und Koordinaten, die an der Grenze des Integrationsgebietes verschwinden. Zunächst seien φ_i und g_{ik} als unabhängige Variable betrachtet. Bei einer Variation derselben (von der genannten Art) wird zunächst nach einfacher Rechnung mit Rücksicht auf (165):

$$\delta \mathfrak{L} = \mathfrak{F}^{ik} \delta F_{ik} - \mathfrak{S}^{ik} \delta g_{ik},$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$S_{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \mathfrak{S}_{ik} = F_{ri} F_{sk} g^{rs} - \tfrac{1}{4} F_{rs} F^{rs} g_{ik}. \tag{173}$$

Durch partielle Integration folgt dann:

$$\delta \int \mathfrak{L}\, dx = \int (2 \mathfrak{s}^i \delta \varphi_i - \mathfrak{S}^{ik} \delta g_{ik})\, dx, \tag{174}$$

mit

$$\mathfrak{s}^i = \frac{\partial \mathfrak{F}^{ik}}{\partial x^k}, \tag{175}$$

woraus noch folgt:

$$\frac{\partial \mathfrak{s}^i}{\partial x^i} = 0. \tag{175a}$$

Nun erzeugen wir speziell die Variationen $\delta \varphi_i$ und δg_{ik} durch eine infinitesimale Koordinatentransformation, was infolge des Verschwindens derselben an der Gebietsgrenze nach (170) erzielt wird, wenn man in (174) für $\delta \varphi_i$ und δg_{ik}, $\delta^* \varphi_i$ und $\delta^* g_{ik}$ substituiert. Mit Rücksicht auf (163), (168) erhält man zunächst:

$$\mathfrak{s}^i \delta^* \varphi_i = -\varepsilon \left(\mathfrak{s}^k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} \xi^i + \mathfrak{s}^k \varphi_i \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} \right)$$

und nach partieller Integration wegen (169) und (175a):

$$0 = \int (2 \mathfrak{s}^i \delta^* \varphi_i - \mathfrak{S}^{ik} \delta^* g_{ik}) = -2\varepsilon \int (F_{ik} \mathfrak{s}^k + \mathfrak{Div}_i \mathfrak{S}) \xi^i dx.$$

Da der letzte Ausdruck für beliebige ξ^i verschwinden muß, folgt

$$F_{ik} \mathfrak{s}^k = -\mathfrak{Div}_i \mathfrak{S}$$

oder ausgeschrieben

$$F_{ik} \mathfrak{s}^k = -\left(\frac{\partial \mathfrak{S}_i^k}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i} \mathfrak{S}^{rs} \right). \tag{176}$$

Diese Identität werden wir in Nr. **30** und **54** benützen.

b) Durch die Untersuchungen von *Lorentz*[100]), *Hilbert*[101]), *Einstein*[102]), *Weyl*[103]) und *Klein*[104]) über das *Hamilton*sche Prinzip in

100) *H. A. Lorentz,* Amst. Versl. 23 (1915), p. 1073; 24 (1916), p. 1389 u. 1759; 25 (1916), p. 468 u. 1380.

101) *D. Hilbert,* Grundlagen d. Physik, 1. Mitt., Gött. Nachr., math.-phys. Kl., 1915, p. 395.

102) *A. Einstein,* Berl. Ber. 1916, p. 1115 (auch abgedruckt in der Sammlung, *Lorentz, Einstein, Minkowski* „Das Relativitätsprinzip", 3. Aufl., Leipzig 1920).

103) *H. Weyl,* Ann. d. Phys. 54 (1917), p. 117; Raum—Zeit—Materie, 1. Aufl. 1918, 3. Aufl. 1920.

104) *F. Klein,* Zu *Hilberts* erster Note über die Grundlagen der Physik, Gött. Nachr., math.-phys. Kl, 1917, p. 469; Über die Differentialgesetze von Impuls und Energie in der *Einstein*schen Gravitationstheorie, ebenda 1918, p. 235. — Die von *Klein* gegenüber *Hilbert* erzielte Vereinfachung wird dadurch ermöglicht, daß er auch solche Variationen der Koordinaten benützt, die am Rand des Integrationsgebietes *nicht* verschwinden (wie es übrigens in der klassischen

der allgemeinen Relativitätstheorie, deren physikalische Bedeutung im Abschnitt IV besprochen werden soll, gewinnt die Variation der zur Krümmungsinvariante R gehörigen Integralinvariante

$$\int \mathfrak{R} d x$$

ein besonderes Interesse.

Man zerlegt zunächst diese Invariante $\int \mathfrak{R} dx$ in ein Volumintegral, welches nur die *ersten* Ableitungen der g_{ik} enthält und ein Oberflächenintegral:

$$\int \mathfrak{R}\, dx = -\int \mathfrak{G}\, dx + \int_{\text{Oberfläche}} (\ldots), \tag{177}$$

worin

$$\mathfrak{G} = \sqrt{-g}\, G, \qquad G = g^{ik}(\Gamma^r_{is}\Gamma^s_{kr} - \Gamma^r_{ik}\Gamma^s_{rs}). \tag{178}$$

G ist offensichtlich nur gegenüber linearen Transformationen eine Invariante (Affinskalar). Das Integral $\int \mathfrak{G} dx$ ist aber nach (177) darüber hinausgehend invariant gegenüber allen Transformationen, welche sich nur auf das Innere des Integrationsgebietes erstrecken und die Randwerte der Koordinaten sowie der g_{ik} und ihrer Ableitungen unverändert lassen. Diese beiden Invarianzeigenschaften des $\int \mathfrak{G} dx$ werden nun dazu benutzt, um einige für die Theorie wichtige mathematische Identitäten nachzuweisen. Der Umstand, daß im Integrand des zu variierenden Integrals die zweiten Ableitungen der g_{ik} nun nicht mehr auftreten, wirkt dabei sehr vereinfachend, obzwar er für die Möglichkeit, das im folgenden eingeschlagene Verfahren anzuwenden, nicht grundsätzlich erforderlich ist.

Wir erhalten zunächst bei einer beliebigen Variation des g_{ik}-Feldes, wenn wir zur Abkürzung $g_\sigma^{ik} = \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^\sigma}$ setzen:

$$-\int \delta \mathfrak{G}\, dx = -\int \left(\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial g^{ik}} \delta g^{ik} + \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial g_\sigma^{ik}} \delta g_\sigma^{ik}\right) dx$$

$$= \int \left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial g_\sigma^{ik}} - \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial g^{ik}}\right) \delta g^{ik} dx - \int \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left(\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial g_\sigma^{ik}} \delta g^{ik}\right) dx.$$

Die Ausrechnung zeigt nun[105]), daß

$$\frac{\partial}{\partial x^\sigma} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial g_\sigma^{ik}} - \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial g^{ik}} = \mathfrak{G}_{ik} = \sqrt{-g}\; G_{ik}$$

wird, wo G_{ik} der in (109) definierte Tensor ist. Also ergibt sich

$$-\int \delta \mathfrak{G}\, dx = \int \mathfrak{G}_{ik} \delta g^{ik} dx - \int \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left(\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial g_\sigma^{ik}} \delta g^{ik}\right) dx. \tag{179}$$

Mechanik seit *Lagrange* vielfach geschieht). Hierdurch werden manche Beziehungen übersichtlicher. Ein ähnliches, wenn auch nicht so systematisch durchgeführtes Rechenverfahren findet sich schon bei *Lorentz* (l. c. Anm. 100).

Da das letztere Integral offensichtlich als Oberflächenintegral geschrieben werden kann, gilt nach (177) auch

$$(180)\qquad \delta\int \mathfrak{R}\,dx = \int \mathfrak{G}_{ik}\,\delta g^{ik}\,dx + \int\limits_{\text{Oberfläche}} (\ldots).$$

Wir erzeugen jetzt speziell die Variation der g_{ik} durch eine Variation δ^* des Koordinatensystems. Dann ergibt sich aus (179) zufolge (169) und (170):

$$(181)\qquad \delta^*\int \mathfrak{G}\,dx = 2\varepsilon\int \mathfrak{Div}_i\mathfrak{G}\cdot\xi^i dx + \varepsilon\int\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial g^{rs}_k}\,\delta^* g^{rs} - 2\mathfrak{G}_i^k\xi^i + \mathfrak{G}\xi^k\right)dx.$$

Nun spezialisieren wir weiter die infinitesimale Koordinatentransformation so, daß sie $\int\mathfrak{G}\,dx$ invariant läßt.

1. *Die ξ^i sollen am Rand verschwinden.* Dann folgt:

$$(182\text{a})\qquad \mathfrak{Div}_i\mathfrak{G} = \frac{\partial\mathfrak{G}_i^k}{\partial x^k} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i}\mathfrak{G}^{rs} \equiv 0,$$

$$(182\text{b})\qquad \mathfrak{Div}^i\mathfrak{G} = \frac{\partial\mathfrak{G}^{ik}}{\partial x^k} + \mathfrak{G}^{rs}\Gamma^i_{rs} \equiv 0.$$

Hätten wir bloß diese Identität ableiten wollen, so hätte sich die Rechnung sehr abkürzen lassen. *Herglotz*[82a]) hat darauf aufmerksam gemacht, daß sich als einfache Konsequenz dieser Identität ein interessanter Satz ergibt, der schon früher auf anderem Wege von *Schur*[105a]) bewiesen worden war. Ist analog zu (116)

$$R_{hijk} = -\alpha(g_{hi}g_{ik} - g_{ij}g_{hk}),$$

wobei aber α zunächst noch eine Funktion der Koordinaten sein kann, so folgt durch Substitution von (119) in (182a) für $n > 2$ sofort

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x^i} = 0, \quad \alpha = \text{konst.}$$

Das heißt: *Ist das Krümmungsmaß eines Riemannschen Raumes R_n ($n > 2$) in jedem seiner Punkte von der Flächenrichtung unabhängig, so ist es auch vom Ort unabhängig.*

2. *Die ξ^i sollen konstant sein.* Wir könnten sogar die ξ^i allgemeiner als lineare Funktionen der Koordinaten ansetzen, jedoch sind die weiteren Identitäten, die daraus resultieren, für uns nicht von Wichtigkeit. Da nunmehr das erste Integral in (181) zufolge (182) fortgelassen werden kann, muß für konstante ξ^i das zweite Integral

105) Wegen ihrer Durchführung vgl. man *H. Weyl*, Raum—Zeit—Materie, 1. Aufl. 1918, p. 191, 3. Aufl. 1920, p. 205, 206, sowie auch *A. Palatini*, Rend. Pal. 43 (1919), p. 203.

82a) *G. Herglotz*, l. c. Anm. 82).

105a) *F. Schur*, Math. Ann. 27 (1886), p. 537.

ebenfalls identisch verschwinden. Dies ist aber nur möglich, wenn für diesen Fall der Integrand identisch verschwindet, da das Integrationsgebiet beliebig klein angenommen werden kann. Da nun nach (164), (168) bei konstanten ξ^i $\delta^* g^{rs} = - g_i^{rs}\xi^i$ zu setzen ist, nimmt der Integrand die Form an:

$$\xi^i \frac{\partial}{\partial x^k}\left(-\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial g_k^{rs}} g_i^{rs} - 2\mathfrak{G}_i^k + \mathfrak{G}\delta_i^k\right).$$

Setzen wir also noch

$$\mathfrak{U}_i^k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial g_k^{rs}} g_i^{rs} - \mathfrak{G}\delta_i^k\right), \tag{183}$$

so folgt:

$$\frac{\partial(\mathfrak{U}_i^k + \mathfrak{G}_i^k)}{\partial x^k} \equiv 0. \tag{184}$$

Die Auswertung des Ausdruckes (183) für $\mathfrak{U}_i^k$ aus dem Wert (178) von $\mathfrak{G}$ liefert

$$\mathfrak{U}_i^k = \frac{1}{2}\left\{\Gamma^r_{\alpha r}\frac{\partial(g^{\alpha k}\sqrt{-g})}{\partial x^i} - \Gamma^k_{rs}\frac{\partial(g^{rs}\sqrt{-g})}{\partial x^i} - \mathfrak{G}\delta_i^k\right\}, \tag{185}$$

wofür man im Fall $\sqrt{-g} = \text{const.}$ auch schreiben kann

$$\mathfrak{U}_i^k = \sqrt{-g}\,U_i^k, \quad U_i^k = \Gamma^k_{rs}\Gamma^r_{\alpha i}g^{\alpha s} - \tfrac{1}{2}G\delta_i^k.\text{[106]} \tag{185a}$$

Wir haben es hier offenbar mit einem Affintensor zu tun, wie er in Nr. 21 betrachtet wurde. Über seine physikalische Bedeutung vgl. Abschnitt IV, Nr. 57 und 61.

III. Weiterer Ausbau der speziellen Relativitätstheorie.

a) Kinematik.

24. Vierdimensionale Darstellung der Lorentz-Transformation. Die im Abschnitt I besprochenen kinematischen Folgerungen der Relativitätstheorie lassen sich viel übersichtlicher darstellen, wenn man die vierdimensionale Raum—Zeitwelt den Betrachtungen zugrunde legt. Man kann zwei verschiedene Darstellungen nebeneinander verwenden. Erstens die imaginäre:

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ict,$$

und zweitens die reelle

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ct.$$

Die erste ist die historisch ältere, schon von *Poincaré*[107]) verwendete, die zweite wird von *Minkowski* in seinem Vortrag „Raum und Zeit" benutzt. Die spezielle Lorentz-Transformation (I), bei der x^2 und x^3

106) Über die Durchführung der Rechnung vgl. *A. Einstein*, Ann. d. Phys. 49 (1916), p. 806, Gl. (50) im Fall $\sqrt{-g}$ = konst.; *W. Pauli jr.*, Phys. Ztschr. 20 (1919), p. 25, im allgemeinen Fall.

107) *H. Poincaré*, Rend. Pal. l. c. Anm. 11), p. 168.

unverändert bleiben, ist in vollständiger Analogie zur Drehung des Koordinatensystems im R_3 gegeben durch die Formeln

$$(186)\qquad \begin{aligned} x'^1 &= x^1 \cos\varphi + x^4 \sin\varphi \\ x'^4 &= -x^1 \sin\varphi + x^4 \cos\varphi \end{aligned} \quad\Bigg|\quad \text{bzw.}\quad \begin{aligned} x'^1 &= x^1 \operatorname{ch}\psi - x^4 \operatorname{sh}\psi \\ x'^4 &= -x^1 \operatorname{sh}\psi + x^4 \operatorname{ch}\psi \\ (\varphi &= i\psi). \end{aligned}$$

Erstere finden sich zuerst explizite bei *Minkowski* II, Gl. (1); (er schreibt $i\psi$ an Stelle von φ). Da für $x'^1 = 0$, $x = vt$ sein muß, sind φ und ψ bestimmt durch

$$(187)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{tg}\varphi = i\beta, \quad \operatorname{th}\psi = \beta, \\ &\text{woraus folgt} \\ &\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \operatorname{ch}\psi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ &\sin\varphi = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \operatorname{sh}\psi = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \right.$$

Fig. 2.

Im imaginären Koordinatensystem ist die spezielle Lorentz-Transformation eine Drehung, im reellen ein Übergang zu einem anderen Paar von konjugierten Durchmessern der invarianten Hyperbel

$$(x^1)^2 - (x^4)^2 = 1.$$

In jenem gibt es keinen Unterschied zwischen kovarianten und kontravarianten Komponenten eines Vektors. In diesem ist $a_4 = -a^4$, allgemein zieht bei einem beliebigen Tensor das Hinauf- oder Hinuntersetzen eines Index 4 einen Vorzeichenwechsel nach sich.

Die Lorentz-Kontraktion wird durch den rechten Teil der obenstehenden Figur 2, in der $x^1 = x$ als Abszisse und $x^4 = ict$ als Ordinate aufgetragen ist, unmittelbar in Evidenz gesetzt. Sie ist so gezeichnet, als ob x^4 reell wäre.

L_1 und L_2 sind die Weltlinien des im System K' ruhenden Stabes; ihr Abstand l_0 ist gleich seiner Ruhlänge. Im bewegten System K ist als Länge l des Stabes die auf einer zur x^1-Achse parallelen Geraden durch L_1 und L_2 abgeschnittene Strecke PQ auszusprechen. Offenbar ist

$$l = \frac{l_0}{\cos\varphi}, \tag{188}$$

was nach (187) mit (7) übereinstimmt.[108]) In analoger Weise veranschaulicht der linke Teil der Figur 2 die *Einstein*sche Zeitdilatation. Als Uhr, die im System K' ruhend angenommen werde, fungiere irgendein periodischer Vorgang. Die Weltpunkte des Ablaufs der Perioden liegen auf einer zur x'^4-Achse parallelen Geraden. Ihr Ab-

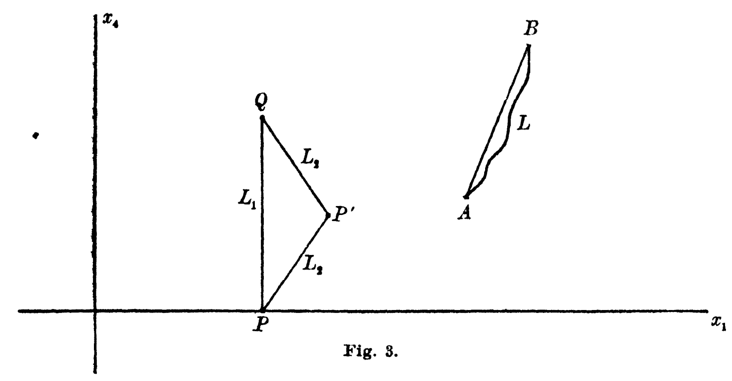


Fig. 3.

stand τ ist die normal gemessene Periodendauer. (Die Zeiteinheit ist hier der Einfachheit halber so angenommen, daß die Lichtgeschwindigkeit gleich eins wird.) Die in K gemessene Periodendauer t ist dann gegeben durch die Projektionen der Strecken τ auf die x^4-Achse. Folglich wird

$$\tau = \frac{t}{\cos\varphi}, \tag{189}$$

was infolge von (187) mit (8) identisch ist.

Eine einfache Verallgemeinerung dieser Betrachtung führt zu einer Veranschaulichung des Uhrenparadoxons (vgl. Nr. 5).[109]) In Figur 3 sind L_1 und L_2 die Weltlinien der Uhren U_1 und U_2, von denen in Nr. 5 die Rede war.

Die Zeit τ, welche die Uhr U_2 im Weltpunkt Q (der vom System K betrachtet mit P räumlich zusammenfällt) anzeigt, ist bis

108) Die analoge Figur für das reelle Koordinatensystem findet sich in *Minkowskis* Vortrag „Raum und Zeit".

109) Man vgl. hierzu Anm. 4) zu *Minkowskis* Vortrag „Raum und Zeit" in der Sammlung, Das Relativitätsprinzip, Leipzig 1913, sowie *M. v. Laue,* Phys. Ztschr. 13 (1912), p. 118.

auf den Faktor $\frac{1}{c}$ gleich der Länge s des gebrochenen Linienzuges L. Verallgemeinernd wird man für beliebig bewegte Uhren, wenn die Beschleunigung nicht allzu stark ist, annehmen dürfen, daß die Zeit τ, die sie anzeigen, gleich ist

$$\tau = \int \sqrt{1-\beta^2}\, dt = \frac{s}{ic}, \tag{157a}$$

wo s wieder die Länge der zugehörigen Weltlinie bedeutet. τ ist offenbar die durch (157) definierte *Eigenzeit* der betreffenden Uhr, das ist also die Zeit, wie sie von einem jeweils mit der Uhr mitbewegten Beobachter konstatiert wird. Von zwei Uhren, die vom Weltpunkt A zum Weltpunkt B bewegt werden, gibt also die gleichförmig bewegte die kleinste Zeit an (vgl. Fig. 3).

25. Das Additionstheorem der Geschwindigkeiten. Die Transformationsformeln der Geschwindigkeit beim Übergang zu einem bewegten Koordinatensystem K' lassen sich einfach und übersichtlich schreiben, wenn man statt des dreidimensionalen Vektors u den in (158), (159) definierten vierdimensionalen Vektor u^i einführt, dessen Komponenten in unserem Fall die Werte haben:

$$(u^1, u^2, u^3) = \frac{\mathfrak{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \qquad u^4 = \frac{ic}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \tag{190}$$

Die Transformationsformeln beim Übergang zum System K' lauten dann nach (186) und (187):

$$\left\{\begin{aligned} u'^1 &= \frac{u^1 + i\frac{v}{c}u^4}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ u'^4 &= \frac{-i\frac{v}{c}u^1 + u^4}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ u'^2 &= u^2, \quad u'^3 = u^3, \end{aligned}\right. \tag{191}$$

aus denen man leicht die Formeln (10) bis (12) der Nr. 6 gewinnt, insbesondere ist (11a) identisch mit der Transformationsformel für u^4. Die entsprechenden Formeln für reelle Koordinaten ergeben sich aus der Vorschrift vom Anfang der Nr. 24.

Eine andere Deutung für die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten, die zuerst *Sommerfeld*[110]) gegeben hat, folgt aus der Bemerkung, daß sich die Winkel φ_1, φ_2 bei zwei aufeinanderfolgenden Dre-

110) *A. Sommerfeld*, Phys. Ztschr. 10 (1909), p. 826.

hungen einfach addieren, wenn man zunächst das Additionstheorem zweier *gleichgerichteter* Geschwindigkeiten ins Auge faßt. Dieses ergibt sich dann aus (187) als eine Folge des Additionstheorems der Tangensfunktion:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2}{1 - \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2}.$$

Analoge Deutungen lassen sich für den allgemeineren Fall der Zusammensetzung beliebig gegeneinander geneigter Geschwindigkeiten aufstellen, insbesondere läßt sich die Formel (11a), die den *Betrag* der resultierenden Geschwindigkeit angibt und die Ungültigkeit des kommutativen Gesetzes für die Geschwindigkeits*richtungen* durch die sphärische Geometrie auf einer Kugel vom Radius i veranschaulichen.[110]) *V. Varičak*[111]) weist auf die Analogie der Zusammensetzung der Geschwindigkeiten in der Relativitätstheorie mit der Streckenaddition in der *Bolyai-Lobatschefsky*schen Ebene hin.

26. Transformation der Beschleunigung. Hyperbelbewegung. Ähnlich wie bei der Geschwindigkeit führt man in der Relativitätstheorie statt des dreidimensionalen Vektors $\dot{\mathfrak{u}}$ den durch (147) definierten, jetzt für das Linienelement der speziellen Relativitätstheorie zu spezialisierenden vierdimensionalen Vektor B mit den Komponenten

$$B^i = \frac{du^i}{d\tau} = \frac{d^2x^i}{d\tau^2} \tag{147a}$$

ein. In der speziellen Relativitätstheorie ist

$$u_i\frac{du^i}{d\tau} = u^i\frac{du_i}{d\tau},$$

so daß aus $u_i u^i = -c^2$ durch Differentiation folgt:

$$u_i B^i = u_i\frac{du^i}{d\tau} = 0. \tag{192}$$

111) Auch die Lorentz-Transformation sowie die relativistischen Formeln für Dopplereffekt, Aberration und Reflexion am bewegten Spiegel werden von *Varičak* mit der *Bolyai-Lobatschefsky*schen Geometrie in formalen Zusammenhang gebracht. Man vgl. die Noten: *V. Varičak,* Phys. Ztschr. 11 (1910), p. 93, 287, 586; Belgrader Akademieber. 88 (1911); das zusammenfassende Referat im Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. 21 (1912), p. 103; sowie Agramer Akademieber. (1914), p. 46; (1915), p. 86 und 101; (1916), p. 79; (1918), p. 1; (1919), p. 100.

Der in Rede stehende Zusammenhang mit der *Bolyai-Lobatschefsky*schen Geometrie läßt sich (was von *Varičak* nicht bemerkt wird) kurz so charakterisieren: Deutet man dx^1, dx^2, dx^3, dx^4 als homogene Koordinaten in einem projektiven dreidimensionalen Raum, so bedeutet die Invarianz der Gleichung $(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^4)^2 = 0$ die Einführung einer *Cayley*schen Maßbestimmung und zwar unter Zugrundelegung eines *reellen* Kegelschnitts. Das weitere folgt auf Grund der bekannten Überlegungen von *Klein* [Math. Ann. 4 (1871), p. 112] von selbst.

Der Zusammenhang von B mit dem Vektor $\dot{\mathfrak{u}}$ des dreidimensionalen Raumes ist gegeben durch

$$(193)\quad \begin{cases} (B^1, B^2, B^3) = \dot{\mathfrak{u}}\frac{1}{(1-\beta^2)} + \mathfrak{u}\frac{(\mathfrak{u}\dot{\mathfrak{u}})}{c^2}\frac{1}{(1-\beta^2)^2}, \\ B^4 = i\frac{(\mathfrak{u}\dot{\mathfrak{u}})}{c}\frac{1}{(1-\beta^2)^2}. \end{cases}$$

Von besonderem Interesse sind die Transformationsformeln der Beschleunigung aus einem momentan mit der Materie mitbewegten System K' auf ein System K, relativ zu dem sich die Materie mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ bewegt. Legen wir die x-Achse in die Geschwindigkeitsrichtung, so wird in diesem Fall

$$(B'^1, B'^2, B'^3) = \dot{\mathfrak{u}}', \quad B'^4 = 0,$$

$$B^1 = \frac{\dot{u}_x}{1-\beta^2} + \frac{\beta}{i}B^4, \quad B^2 = \frac{\dot{u}_y}{1-\beta^2}, \quad B^3 = \frac{\dot{u}_z}{1-\beta^2}.$$

Aus den Transformationsformeln für die Komponenten von B:

$$B^1 = \frac{B'^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad B^2 = B'^2, \quad B^3 = B'^3, \quad B_4 = \frac{i\beta B'^1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

die man aus den zu (186) inversen Relationen erhält, folgt dann weiter

$$(194)\quad \dot{u}_x = \dot{u}_x'(1-\beta^2)^{3/2}, \quad \dot{u}_y = \dot{u}_y'(1-\beta^2), \quad \dot{u}_z = \dot{u}_z'(1-\beta^2).$$

Diese Relationen finden sich schon in der ersten Arbeit *Einsteins*.[112])

Als gleichförmig beschleunigt wird man in der relativistischen Kinematik naturgemäß eine solche Bewegung bezeichnen, für die in dem jeweils mit der Materie bzw. dem Massenpunkt mitbewegten System K' die Beschleunigung stets denselben Wert b hat. Das System K' ist für jeden Augenblick ein anderes; für ein und dasselbe Galileische System K ist die Beschleunigung einer solchen Bewegung zeitlich nicht konstant. So liegen die Verhältnisse bei der *geradlinigen* gleichförmig beschleunigten Bewegung. Da der allgemeinere Fall auf diesen durch eine Lorentz-Transformation zurückgeführt werden kann, können wir uns auf ihn beschränken. Aus (194) gewinnt man dann leicht durch Integration

$$(x-x_0)^2 - c^2(t-t_0)^2 = \frac{c^4}{b^2} = \text{konst.} = a^2$$

und wenn man noch den Koordinaten- und Zeitanfangspunkt so wählt, daß für

$$t = 0, \quad \dot{x} = 0, \quad x = \frac{c^2}{b}$$

wird, nimmt die Gleichung der Bahn die Form an

$$(195\text{a})\quad x^2 - c^2t^2 = \frac{c^4}{b^2} = \text{konst.} = a^2.$$

112) Eine sehr einfache, elementare Ableitung derselben findet sich bei *A. Sommerfeld*, Atombau und Spektrallinien, Braunschweig, 1. Aufl. 1919, p. 320 u. 321, 2. Aufl. 1920, p. 317 u. 318.

Die Geschwindigkeit wächst nicht unbegrenzt, sondern nähert sich asymptotisch der Lichtgeschwindigkeit. Die zugehörige Weltlinie ist eine Hyperbel, weshalb die gleichförmig beschleunigte Bewegung der Relativitätstheorie auch Hyperbelbewegung genannt wird, im Gegensatz zur „Parabelbewegung" der alten Mechanik. Im imaginären Koordinatensystem ist die Weltlinie ein Kreis mit dem Radius a:

$$(x^1)^2 + (x^4)^2 = a^2. \tag{195b}$$

Durch die imaginäre Bogenlänge s der Weltlinie drücken sich die Koordinaten x^1, x^4 so aus:

$$x^1 = a \cos \frac{s}{a}, \qquad x^4 = a \sin \frac{s}{a}, \tag{196a}$$

bzw. im reellen Koordinatensystem

$$x^1 = a \operatorname{ch} \frac{ct}{a}, \qquad x^4 = a \operatorname{sh} \frac{ct}{a}. \tag{196b}$$

Daraus geht hervor, daß der Vektor B die Richtung des Radius und den Betrag $\frac{c^2}{a} = b$ hat. Da man in der x, ict-Ebene zu einer beliebigen Bahnkurve in jedem ihrer Punkte einen Krümmungskreis konstruieren kann, gibt es zu jeder Bewegung eines Massenpunktes in jedem Augenblick eine oskulierende Hyperbelbewegung.

Die Hyperbelbewegung ist zuerst von *Minkowski*[113]) als besonders einfache Bewegung erkannt und hernach von *Born*[114]) und *Sommerfeld*[115]) genauer diskutiert worden. Über ihre dynamische und elektrodynamische Bedeutung vgl. Nr. **37**, **32** γ).

b) Elektrodynamik.

27. Invarianz der Ladung. Viererstrom. In der *Lorentz*schen Elektronentheorie genügen Dichte ϱ und Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ einer elektrischen Ladung der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho \mathfrak{u} = 0. \tag{A}$$[115a])

Es liegt nahe, diese Gleichung als vierdimensionale Div zu schreiben:

$$\frac{\partial s^i}{\partial x^i} = 0 \qquad (\operatorname{Div} s = 0), \tag{197}$$

worin die Größen s^i definiert sind durch

$$(s^1, s^2, s^3) = \varrho \frac{\mathfrak{u}}{c}, \qquad s^4 = i\varrho \tag{198}$$

113) *H. Minkowski*, III, l. c. Anm. 54).
114) *M. Born*, Ann. d. Phys. 30 (1909), p. 1.
115) *A. Sommerfeld*, Ann. d. Phys. 33 (1910), p. 670, l. c. Anm. 55).
115a) *H. A. Lorentz*, Art. V 14 dieser Encykl. Nr. 2, Gl. (II).

Wir müssen nun verlangen, daß (A) und somit auch (197) für jedes Galileische Bezugssystem gelten soll, und daraus kann man schließen, daß die s^i die Komponenten eines Vierervektors sind. Man nennt ihn den Viererstrom. Er findet sich im wesentlichen schon bei *Poincaré*. Zwar bleibt in den Transformationsformeln für die Größen s^i, die aus der Invarianz von (197) entnommen werden können, zunächst ein Faktor unbestimmt, der noch irgendwie von der in die Lorentz-Transformation eingehenden Geschwindigkeit abhängen könnte; man kann aber durch eine Betrachtung, die zu der in Nr. 5 beim Faktor $\varkappa$ der Transformationsformeln für die Koordinaten verwendeten völlig analog ist, zeigen, daß er gleich Eins sein muß. Der Vektorcharakter von s^i liefert außer den mehrfach erwähnten Transformationsformeln für die Geschwindigkeit folgende Transformationsformel für die Ladungsdichte:

(199) $$\varrho' = \frac{\varrho\left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Ihre physikalische Bedeutung erhellt, wenn man das Koordinatensystem K' speziell so wählt, daß die Ladungsdichte in K' ruht. Dann ist $u_x = u = v$ und indem wir für diesen Fall noch ϱ_0 statt ϱ' schreiben, ergibt sich

(199a) $$\varrho_0 = \varrho\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}, \qquad \varrho = \frac{\varrho_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Umgekehrt folgt (199) mit Rücksicht auf das Additionstheorem der Geschwindigkeiten aus (199a) zurück. Nun gilt aber wegen der Lorentz-Kontraktion für ein materielles Volumelement dV nach (7a):

$$dV = dV_0\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}},$$

also wird

(200a) $$\varrho\, dV = \varrho_0\, dV_0,$$

das heißt

(200b) $$de = de_0.$$

Die in einem bestimmten materiellen Volumelement enthaltene Ladung ist eine Invariante. Daß der Betrag der *Gesamt*ladung eines Teilchens sich nicht ändert, wenn man ihm eine Bewegung erteilt, folgt natürlich direkt aus (A) und kann erfahrungsgemäß als weitgehend gesichert bezeichnet werden, da sonst die elektrische Neutralität eines Atoms durch bloße Änderung der Bewegung der in ihm enthaltenen Elektronen aufgehoben werden könnte. Die Relation (200b) besagt darüber hinausgehend, daß die Ladung eines jeden materiellen Volumelementes invariant bleibt.

Sommerfeld[116]) geht umgekehrt aus von (200a) und schließt daraus in folgender Weise auf den Vektorcharakter von s. Das vom räumlichen Volumelement dV während der Zeit dt überstrichene vierdimensionale Volumen

$$dV \cdot dx^4 \qquad (x^4 = ict)$$

ist als solches eine Invariante. Das gleiche gilt nach Voraussetzung (200a) vom Produkt

$$i\varrho dV.$$

Der gleichfalls invariante Quotient $\frac{i\varrho}{dx^4}$ dieser Größen liefert aber mit den Vektorkomponenten $dx^1, \dots dx^4$ multipliziert, das in (198) angegebene System der Größen s^i, welches folglich ebenfalls einen Vierervektor bildet.

Mit Hilfe des Vektors u^i läßt sich zufolge (190), (199a) s^i einfach schreiben:

$$s^i = \frac{1}{c}\varrho_0 u^i, \tag{201}$$

und die Kontinuitätsgleichung wird

$$\frac{\partial(\varrho_0 u^i)}{\partial x^i} = 0. \tag{197a}$$

Über den Beweis für den Vektorcharakter von s^i aus den *Maxwell*schen Gleichungen siehe die folgende Nummer, über die Deutung, welche der Erhaltungssatz (197) in der Theorie von *Weyl* erfährt, vgl. Abschn. V, Nr. **65** d).

28. Die Kovarianz der Grundgleichungen der Elektronentheorie. In Nr. **1** wurde bereits hervorgehoben, daß die Nichtkovarianz der *Lorentz*schen Grundgleichungen für das elektromagnetische Feld gegenüber der Galilei-Transformation einer der Hauptantriebe zur Begründung der Relativitätstheorie geworden ist. In seiner Arbeit von 1904[117]) war *Lorentz* sehr nahe daran, die Kovarianz dieser Gleichungen gegenüber der Gruppe der Relativitätstheorie zu beweisen. Vollständig erbracht wurde der Beweis von *Poincaré*[118]) und *Einstein*[119]) unabhängig voneinander. Die vierdimensionale Formulierung rührt von *Minkowski*[120]) her, der hierzu den Begriff des Flächentensors, wie wir heute sagen, zuerst aufgestellt hat.

Um die Feldgleichungen in vierdimensional-invarianter Weise darzustellen, wird man zuerst diejenigen vier Gleichungen zusammen-

116) *A. Sommerfeld,* Ann. d. Phys. **32** (1910), p. 752, l. c. Anm. 55).
117) *H. A. Lorentz,* l. c. Anm. 10).
118) *H. Poincaré,* l. c. Anm. 11).
119) *A. Einstein,* l. c. Anm. 12).
120) *H. Minkowski,* I, l. c. Anm. 54).

fassen, welche die Ladungsdichte nicht enthalten, das sind die Gleichungen

(B)
$$\operatorname{rot}\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{H}} = 0\,^{120a)},\qquad \operatorname{div}\mathfrak{H} = 0.$$

Setzt man

(202)
$$\begin{cases} (F_{41}, F_{42}, F_{43}) = i\mathfrak{E}, \quad (F_{23}, F_{31}, F_{12}) = \mathfrak{H} \\ \text{bzw. im reellen System } (F_{ik} = -F_{ki}), \end{cases}$$

so kann man (B) schreiben

(203)
$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0 \qquad (\operatorname{Rot} F = 0)$$

[vgl. (140b)].

Aus der Invarianz von (203) gegenüber Lorentz-Transformationen folgt dann, daß das Größensystem F_{ik} einen Flächentensor bildet. Der in den Transformationsformeln zunächst unbestimmt bleibende Faktor wird wieder in der bereits mehrfach erwähnten Weise eliminiert. Führt man statt F_{ik} den durch (461) definierten dualen Tensor F^{*ik} ein:

(202a)
$$(F^{*41}, F^{*42}, F^{*43}) = -\mathfrak{H}, \quad (F^{*23}, F^{*31}, F^{*12}) = -i\mathfrak{E},$$

so kann nach (142), (141b) das Gleichungssystem (203) auch geschrieben werden

(203a)
$$\frac{\partial F^{*ik}}{\partial x^k} = 0 \qquad (\operatorname{Div} F^* = 0).$$

Es ist jedoch bekannt, daß im gewöhnlichen Raum $\mathfrak{E}$ ein polarer (eigentlicher), $\mathfrak{H}$ ein axialer Vektor (Flächentensor) ist und nicht umgekehrt. Wir halten deshalb den Flächentensor (202) für die *naturgemäße* Darstellung des elektromagnetischen Feldes, den zu ihm dualen Flächentensor (202a) für eine künstliche Bildung. Bei *Minkowski*[121]) finden sich beide Schreibweisen der Feldgleichungen. Die erstere, die in vielen Fällen, insbesondere in der allgemeinen Relativitätstheorie, übersichtlicher und bequemer ist, geriet jedoch später in Vergessenheit, insbesondere wird sie von *Sommerfeld*[122]) nicht erwähnt. Erst im Jahr 1916 hat *Einstein*[123]) wieder die Aufmerksamkeit auf sie gelenkt.

Aus dem Tensorcharakter von F_{ik} folgen die Transformationsformeln für die Feldstärken beim Übergang zu einem bewegten Bezugssystem. Es möge hier die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ der Lorentz-Trans-

---

120a) *H. A. Lorentz*, Art. V 14 dieser Encykl. Gl. (IV), (V).

121) *H. Minkowski*, I, l. c. Anm. 54).

122) *A. Sommerfeld*, l. c. Anm. 55).

123) *A. Einstein*, Eine neue formale Deutung der *Maxwell*schen Gleichungen, Berl. Ber. (1916), p. 184.

formation beliebig gegen die x-Achse des Koordinatensystems orientiert sein. Dann ergibt sich

$$
(204) \quad \left\{
\begin{aligned}
\mathfrak{E}_{\parallel}' &= \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{E}_{\perp}' = \frac{\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}]\right)_{\perp}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\
\mathfrak{H}_{\parallel}' &= \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{H}_{\perp}' = \frac{\left(\mathfrak{H} - \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{E}]\right)_{\perp}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Die Aufspaltung des Feldes in elektrisches und magnetisches hat also nur relative Bedeutung. Ist z. B. im System K bloß ein elektrisches Feld vorhanden, so ist in einem relativ zu K bewegten System K' auch ein magnetisches Feld vorhanden. Diese Bemerkung beseitigt gewisse Härten der Auffassung der Vorgänge bei der Induktion durch Bewegung eines Magneten einerseits, durch Bewegung des Leiters, in dem der Strom induziert wird, andrerseits.[12a])

Auch die elektromagnetischen Potentiale: skalares Potential φ, Vektorpotential $\mathfrak{A}$ der *Lorentz*schen Theorie gestatten eine einfache vierdimensionale Deutung. Wie zuerst *Minkowski*[54a]) bemerkt hat, lassen sie sich zu einem Vektor der vierdimensionalen Welt, dem Viererpotential, zusammenfassen:

$$
(205) \qquad (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \mathfrak{A}, \quad \varphi_4 = i\varphi.
$$

Die Ausdrücke

$$
\mathfrak{E} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{H} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{A}}
$$
[124])

für die Feldstärken lauten dann

$$
(206) \qquad F_{ik} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} \qquad (F = \operatorname{Rot} \varphi)
$$

[vgl. (140a)].

Das Viererpotential ist eine mathematische Hilfsgröße, die sich in vielen Fällen als nützlich erweist, unmittelbare physikalische Bedeutung hat es in der *Lorentz*schen Theorie keine. Das erste System (203) der Feldgleichungen ist eine Folge von (206) und umgekehrt, wenn (203) gilt, kann das Vektorfeld φ_i immer so bestimmt werden, daß (206) befriedigt ist. Durch diese Relation ist aber φ_i nicht eindeutig bestimmt; ist vielmehr φ_i eine Lösung von (206) bei gegebenem F_{ik}, so wird durch $\varphi_i + \frac{\partial \psi}{\partial x^i}$ (ψ beliebige skalare Funktion der Raum-Zeit-Koordinaten) (206) gleichfalls befriedigt. Zur eindeutigen Defi-

---

12a) *A. Einstein*, l. c. Anm. 12).

54a) *H. Minkowski*, I, l. c. Anm. 54).

124) *H. A. Lorentz*, Art. V 14 dieser Encykl., Nr. 4, Gl. (IX), (X).

nition von φ_i wird deshalb in der *Lorentz*schen Theorie die Bedingung

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0\text{[125]}$$

hinzugefügt, welche sich vierdimensional übersichtlich in der Form

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^i} = 0 \qquad (\operatorname{Div} \varphi = 0) \tag{207}$$

schreiben läßt. Eine vierdimensionale Deutung des *Hertz*schen Vektors $\mathfrak{Z}$ ist bisher nicht gegeben worden.

In analoger Weise wie (B) läßt sich das zweite System

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} - \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{E}} = \varrho\frac{\mathfrak{u}}{c} \quad \operatorname{div} \mathfrak{E} = \varrho \tag{C}$$

der *Lorentz*schen Gleichungen[125a]), welches die Ladungsdichte enthält, behandeln. Aus (198) und (202) folgt sofort

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = s^i \qquad (\operatorname{Div} F = s) \tag{208}$$

[vgl. (141b)]. Definiert man die Ladungsdichte durch (C), so folgt unmittelbar der Vektorcharakter des Größensystems s^i, der früher schon auf andere Weise begründet wurde. Drückt man in (208) die Feldstärken gemäß (206) durch das Vektorpotential aus, so kommt (vgl. 145):

$$\operatorname{Div}_i \operatorname{Rot} \varphi = \operatorname{Grad}_i \operatorname{Div} \varphi - \square \varphi_i = s_i$$

und infolge (207)

$$\square \varphi_i = - s_i. \tag{209}$$

Die Kovarianz der elektromagnetischen Feldgleichungen gegenüber der Lorentz-Gruppe legt die Frage nahe, ob es noch umfassendere Gruppen gibt, bei denen diese Kovarianz stattfindet. Diese Frage wird durch *Cunningham* und *Bateman*[126]) beantwortet. Die allgemeinste derartige Gruppe ist die der konformen Abbildungen (Nr. 8, B′), welche die Gleichung des Lichtkegels

$$s^2 = 0$$

in sich überführt. Neben den Transformationen der Lorentz-Gruppe enthält sie noch Transformationen durch reziproke Radien an einer vierdimensionalen Kugel bzw. einem Hyperboloid im reellen Koordinatensystem. Durch die Theorie von *Weyl* erscheint *Batemans* Theorem in einem neuen Licht (vgl. darüber Abschn. V). Einen einfachen Beweis dafür, daß die Lorentz-Gruppe verknüpft mit der Gruppe der gewöhnlichen Ähnlichkeitstransformationen die einzige

125) *H. A. Lorentz*, Art. V 14 dieser Encykl., Nr. 4, Gl. (2).

125a) *H. A. Lorentz*, Art. V 14 dieser Encykl., Nr. 2, Gl. (I), (Ia) und (IV).

126) *E. Cunningham*, Proc. London math. Soc. 8 (1910), p. 77; *H. Bateman*, Proc. London math. Soc. 8 (1910), p. 223.

lineare Gruppe ist, gegenüber der die *Lorentz*schen Differentialgleichungen kovariant sind, gibt *Ph. Frank*.[127])

29. Ponderomotorische Kraft und Dynamik des Elektrons. Schon in seiner ersten Arbeit hat *Einstein* gezeigt, daß die Relativitätstheorie es ermöglicht, über die Bewegungsgesetze einer beliebig rasch sich bewegenden Punktladung im elektromagnetischen Feld völlig bestimmte Aussagen zu machen, wenn diese für unendlich kleine Geschwindigkeiten derselben bekannt sind. Unter Punktladung ist hier irgendeine Ladung verstanden, deren Dimensionen so klein sind, daß das äußere Feld in dem Gebiet, das die Ladung erfüllt, als homogen angesehen werden kann. Die „Punktladung" braucht also nicht ein Elektron zu sein. Ist $\mathfrak{E}$ die Feldstärke des äußeren elektrischen Feldes, e, m Ladung und Masse unserer „Punktladung" in einem Koordinatensystem K', in dem die Punktladung in dem betreffenden Augenblick ruht, so gilt in diesem System:

$$m_0 \frac{d^2 \mathfrak{r}'}{dt'^2} = e\mathfrak{E}'. \tag{210}$$

Mit Hilfe der Formeln (197) und (207) läßt sich daraus sofort das Bewegungsgesetz in einem System K ableiten, relativ zu welchem sich die Ladung (und das System K') mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ in der positiven x-Richtung bewegt. Es ergibt sich

$$\begin{gathered}\frac{m_0}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{d^2 x}{dt^2} = e\mathfrak{E}_x = e\left\{\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{u}\mathfrak{H}]\right\}_x \\ \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d^2 y}{dt^2} = e\left\{\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{u}\mathfrak{H}]\right\}_y, \quad \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d^2 z}{dt^2} = e\left\{\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{u}\mathfrak{H}]\right\}_z.\end{gathered} \tag{211}$$

Zunächst sieht man, daß auf der rechten Seite genau die *Lorentz*sche Kraft[128]) steht. *Während sie in den älteren Darstellungen als neues Axiom eingeführt wird, ist sie hier eine Folge des Relativitätsprinzips.* Hierzu ist allerdings zu bemerken, daß in dieser Aussage, was Glieder von zweiter und höherer Ordnung in $\frac{u}{c}$ anlangt, kein physikalisches Gesetz, sondern eine Definition der Kraft enthalten ist. In der Tat scheint es zunächst willkürlich zu sein, was man auf die linken und was man auf die rechten Seiten der Gleichungen (211) bringt. Man könnte z. B. auch mit $(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}$ bzw. mit $(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}$ herübermultiplizieren und dann die auf der rechten Seite stehenden Ausdrücke als Komponenten der Kraft bezeichnen. *Einstein* hat anfangs $e\mathfrak{E}'$ auch im bewegten System K als Kraft bezeichnet. In der relativistischen

---

127) *Ph. Frank*, Ann. d. Phys. 35 (1911), p. 599.

128) *H. A. Lorentz*, Art. V 14 dieser Encykl., Nr. 3, Gl. (VI).

Mechanik wird jedoch gezeigt, daß die oben formulierte von *Planck*[129]) herrührende Definition der Kraft, nämlich den *Lorentz*schen Ausdruck

$$\mathfrak{K} = e\left\{\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{u}\,\mathfrak{H}]\right\} \tag{212}$$

bei einer beliebig bewegten Ladung als Kraft zu bezeichnen, die zweckmäßigste, ja einzig naturgemäße ist. Es zeigt sich nämlich, daß nur bei dieser Kraftdefinition die Kraft sich als zeitliche Änderung eines Impulses auffassen läßt, der in abgeschlossenen Systemen konstant bleibt (vgl. Nr. **37**). Aus (212) und (207) folgen für die Kraft die Transformationsformeln

$$\mathfrak{K}_x = \mathfrak{K}'_x,\ \mathfrak{K}_y = \mathfrak{K}'_y\sqrt{1-\beta^2},\ \mathfrak{K}_z = \mathfrak{K}'_z\sqrt{1-\beta^2}, \tag{213}$$

wobei angenommen ist, daß im Koordinatensystem K' die Materie, auf welche die Kraft wirkt, im betreffenden Moment ruht.

In der älteren Literatur hat man vielfach auf Grund von (211) $\frac{m_0}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}$ als longitudinale, $\frac{m_0}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}$ als transversale Masse bezeichnet; es ist jedoch zweckmäßiger, (211) in der Form

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\mathfrak{r}}) = \mathfrak{K}, \tag{214}$$

zu schreiben, wobei jetzt durchweg

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{215}$$

als Masse erscheint.[130]) Dieser Ausdruck für die Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit wurde speziell für die Masse des Elektrons zum erstenmal von *Lorentz*[131]) abgeleitet, unter der Annahme, daß auch die Elektronen bei der Bewegung die „Lorentz-Kontraktion" erleiden. Die Theorie des starren Elektrons von *Abraham* hatte eine kompliziertere Formel für die Massenveränderlichkeit ergeben.[132]) Es bedeutete einen Fortschritt, daß die Relativitätstheorie das *Lorentz*sche Gesetz der Massenveränderlichkeit ohne eine besondere Annahme über Gestalt und Ladungsverteilung des Elektrons be-

129) *M. Planck,* Verhandl. d. deutschen phys. Ges. 4 (1906), p. 136.

130) Dieses Ergebnis ist bereits in den Entwicklungen von *Planck* [l. c. Anm. 129)] implizite enthalten und wurde hernach insbesondere von *C. Tolman,* Phil. Mag. 21 (1911), p. 296 betont.

131) *H. A. Lorentz,* Amst. Proc., l. c. Anm. 10).

132) Siehe darüber *H. A. Lorentz,* Art. V 14 dieser Encykl., Nr. **21**, Gl. (77), (78). Das (deformierbare) Elektron konstanten Volumens von *Bucherer* sei seines historischen Interesses noch erwähnt: *A. H. Bucherer,* Mathematische Einleitung in die Elektronentheorie 1904, p. 58. Siehe auch *M. Abraham,* Theorie d. Elektrizität, 2, 3. Aufl., Leipzig 1914, p. 188.

gründen konnte. Auch braucht über die Natur der Masse nichts vorausgesetzt zu werden, vielmehr gilt (215), wie hier für elektromagnetische Kräfte gezeigt wurde und wie in der relativistischen Mechanik für beliebige Kräfte verallgemeinert wird (vgl. Nr. 37), für jede ponderable Masse. Die alte Auffassung, man könne durch Ablenkungsversuche an Kathodenstrahlen die konstante „wahre" von der „scheinbaren" elektromagnetischen Masse unterscheiden[133]), läßt sich also nicht aufrechterhalten.

Die Formel (215) für die Massenveränderlichkeit oder richtiger das Bewegungsgesetz (211) bietet die Möglichkeit, die Relativitätstheorie durch Versuche über die Ablenkung von raschen Kathodenstrahlen oder β-Strahlen in elektrischen und magnetischen Feldern zu prüfen. Die älteren Messungen von *Kaufmann*[134]) schienen für die *Abraham*sche Formel zu sprechen, doch hat *Kaufmann* die Genauigkeit seiner Messungen überschätzt. Durch die Versuche von *Bucherer*[135]), *Hupka*[136]) und *Ratnowski*[137]) neigte sich die Entscheidung bereits mehr der relativistischen Formel zu, und die neueren Messungen von *Neumann*[138]) [mit einer Ergänzung von *Schäfer*[139])] sowie von *Guye* und *Lavanchy*[140]) sprechen eindeutig für die letztere. Die Theorie der Spektren gibt uns jedoch heute in der Feinstruktur der Wasserstofflinien ein viel genaueres Mittel, die Art der Abhängigkeit der Masse des Elektrons von seiner Geschwindigkeit zu finden[141]), und führte zu einer vollen Bestätigung

---

133) Siehe z. B. *H. A. Lorentz*, Art. V 14 dieser Encykl., Nr. 65.

134) *W. Kaufmann*, Gött. Nachr., math.-nat. Kl. 1901, p. 143; 1902, p. 291; 1903, p. 90. Ann. d. Phys. 19 (1906), p. 487 und 20 (1906), p. 639.

135) *A. H. Bucherer*, Verh. d. deutschen phys. Ges. 6 (1908), p. 688. Phys. Ztschr. 9 (1908), p. 755. Ann. d. Phys. 28 (1909), p. 513 und 29 (1909), p. 1063. Siehe auch die anschließenden Versuche von *K. Wolz*, Ann. d. Phys. 30 (1909), p. 373; sowie die Diskussion zwischen *Bucherer* und *Bestelmeyer*: *A. Bestelmeyer*, Ann. d. Phys. 30 (1909), p. 166; *A. H. Bucherer*, Ann. d. Phys. 30 (1909), p. 974; *A. Bestelmeyer*, Ann. d. Phys. 32 (1910), p. 231.

136) *E. Hupka*, Ann. d. Phys. 31 (1910), p. 169; vgl. dazu auch die Diskussion von *W. Heil*, Ann. d. Phys. 31 (1910), p. 519.

137) *S. Ratnowsky*, Dissertation Genf 1911.

138) *G. Neumann*, Breslauer Dissertation 1914. Auszug in den Ann. d. Phys. 45 (1914), p. 529; Referat von *C. Schäfer* über diese *Neumann*schen Versuche in Verh. d. deutschen phys. Ges. 15 (1913), p. 935; Phys. Ztschr. 14 (1913), p. 1117.

139) *C. Schäfer*, Ann. d. Phys. 49 (1916), p. 934.

140) *Ch. E. Guye* u. *Ch. Lavanchy*, Arch. de Genève 41 (1916), p. 286, 353, 441.

141) *K. Glitscher*, Dissertation München 1917, Auszug in den Ann. d. Phys. 52 (1917), p. 608. Vgl. auch *A. Sommerfeld*, Atombau und Spektrallinien, Braunschweig, 1. Aufl. 1919, p. 373ff., 2. Aufl. 1920, p. 370, der auf *W. Lenz* als ersten Urheber dieser Prüfung der Massenveränderlichkeit hinweist.

der relativistischen Formel, die deshalb jetzt als empirisch vollständig gesichert betrachtet werden kann. Die Massenveränderlichkeit bei anderen Massen als dem Elektron experimentell zu konstatieren, ist bisher wegen der Kleinheit der Effekte nicht gelungen, nicht einmal bei den schnellen α-Strahlen.

Die Gleichung (211) läßt sich in eine vierdimensional invariante Form bringen, wenn man von der Kraft auf die Gesamtladung zur Kraft

$$\mathfrak{f} = \varrho \left\{ \mathfrak{E} + \frac{1}{c} [\mathfrak{u} \mathfrak{H}] \right\} \tag{215}$$

auf die Volumeneinheit (Kraftdichte) übergeht. Dieser Ausdruck legt nämlich nahe, das Produkt des Flächentensors F_{ik} mit dem Viererstrom-Vektor s^k zu bilden

$$f_i = F_{ik} s^k. \tag{216}$$

Der resultierende Vektor f_i hat die Komponenten

$$(f_1 f_2 f_3) = \mathfrak{f}, \quad f_4 = i \varrho \left(\mathfrak{E} \frac{\mathfrak{u}}{c} \right). \tag{217}$$

Die Kraft auf die Volumeneinheit (Kraftdichte) liefert die drei räumlichen Komponenten eines Vierervektors, dessen zeitliche Komponente die (durch c dividierte) pro Zeit- und Volumeneinheit geleistete Arbeit (Leistungsdichte) ist. Dieser wichtige Umstand wurde im wesentlichen schon von *Poincaré*[11a]) erkannt und hernach von *Minkowski*[54a]) klar formuliert. Aus (201) und (216) geht hervor, daß der Vierervektor f_i der elektromagnetischen Kraftdichte auf dem Geschwindigkeitsvektor u^i senkrecht steht:

$$f_i u^i = 0. \tag{218}$$

Nun kann auch das Bewegungsgesetz (214) in vierdimensional invarianter Schreibweise formuliert werden, und zwar kann dies auf zweierlei Weise geschehen. Einmal können wir den Vierervektor K_i mit den Komponenten

$$(K_1, K_2, K_3) = \frac{\mathfrak{K}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad K_4 = i \left(\mathfrak{K} \frac{\mathfrak{u}}{c} \right) \tag{219}$$

einführen. Daß diese Größen tatsächlich einen Vierervektor bilden, folgt aus den Transformationsformeln (213) für die Kraft. Man nennt $\frac{\mathfrak{K}}{\sqrt{1-\beta^2}}$ die *Minkowski*sche Kraft im Gegensatz zur *Newton*schen Kraft $\mathfrak{K}$. Die Bewegungsgleichungen lauten dann einfach

$$m_0 \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = K^i \quad \text{oder} \quad m_0 \frac{d u_i}{d\tau} = K_i. \tag{220}$$

11a) *H. Poincaré*, l. c. Anm. 11).

54a) *H. Minkowski*, I, l. c. Anm. 54).

Zweitens kann man die Bewegungsgleichungen auf die Volumeneinheit beziehen. Bedeutet μ_0 die Ruhmassendichte $\frac{m_0}{V_0}$, so wird

$$(221)\qquad \mu_0 \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = f^i, \quad \mu_0 \frac{d u_i}{d\tau} = f_i.$$

Es muß jedoch bemerkt werden, daß der physikalische Sinn dieser letzteren Gleichungen, wenn sie auf das Elektron angewandt werden, nicht ganz durchsichtig ist (vgl. Abschn. V, Nr. **63**), wenigstens solange man auch hier dem Vektor f_i die durch (216) angegebene Bedeutung beilegt; sie gelten dann zunächst nur, wenn das Eigenfeld des betreffenden Teilchens auf der rechten Seite nicht miteinbezogen wird.

Für $i = 4$ liefern die Gleichungen (220), (221) den Energiesatz, der eine Folge der Bewegungsgleichungen ist. In der Tat sind die 4 Gleichungen (219) bzw. (221) nicht unabhängig voneinander, denn durch skalare Multiplikation mit u^i erhält man nach (192) und (218) die Identität $0 = 0$.

Über die Verallgemeinerung der Definition des Kraftvektors und der Bewegungsgleichungen siehe Nr. **37**.

30. Impuls und Energie des elektromagnetischen Feldes. Differential- und Integralform der Erhaltungssätze. In der Elektrodynamik wird gezeigt, daß sich die *Lorentz*sche Kraftdichte $\mathfrak{f}$ darstellen läßt als Resultierende der durch die *Maxwell*schen Spannungen erzeugten Flächenkräfte und der (negativ genommenen) zeitlichen Änderung der Impulsdichte des Äthers.[142]) Jene sind definiert durch

$$T_{ik} = (\mathfrak{E}_i \mathfrak{E}_k - \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}^2 \delta_{ik}) + (\mathfrak{H}_i \mathfrak{H}_k - \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}^2 \delta_{ik}), \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

diese durch

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{c^2}\mathfrak{S}, \quad \mathfrak{S} = c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]^{142})$$

und es gilt dann

$$(\mathrm{D})\qquad \mathfrak{f} = \operatorname{div} T - \dot{\mathfrak{g}}.$$

Es zeigt sich nun, daß sich diese Vektorgleichung mit der (skalaren) Energiegleichung

$$(\mathrm{E})\qquad \frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div}\mathfrak{S} = -(\mathfrak{f}\mathfrak{u}), \quad W = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)^{143})$$

zu einer vierdimensionalen Vektorgleichung zusammenfassen läßt. Man bilde zunächst aus dem Flächentensor F_{ik} den symmetrischen Tensor 2. Ranges

$$(222)\qquad S_i^k = \tfrac{1}{2}(F_{ir}F^{kr} - F^*_{ir}F^{*kr}) = F_{ir}F^{kr} - \tfrac{1}{4}F_{rs}F^{rs}\cdot\delta_i^k.$$

142) *H. A. Lorentz*, Art. V 14 dieser Encykl., Nr. **7**.
143) *H. A. Lorentz*, Art. V 14 dieser Encykl., Nr. **6**.

Es sei gleich hier bemerkt, daß sein Skalar verschwindet

$$S_i^i = 0. \tag{223}$$

Seine Komponenten sind

$$\left\{\begin{aligned} S_i^k &= -T_{ik} \text{ für } i, k = 1, 2, 3 \\ (S_1^4, S_2^4, S_3^4) &= (S_{14}, S_{24}, S_{34}) = \frac{i}{c}\mathfrak{S} = ic\mathfrak{g} \\ S_4^4 &= S_{44} = S^{44} = -W. \end{aligned}\right. \tag{224}$$

Die räumlichen Komponenten des Tensors S sind also (im wesentlichen) gleich den *Maxwell*schen Spannungskomponenten, die räumlich-zeitlichen gleich dem *Poynting*schen Vektor und der Impulsdichte, die zeitliche gleich der Energiedichte. Die Gleichungen (D) und (E) lassen sich dann, wie zuerst von *Minkowski*[144]) bemerkt wurde, durch Einführung des durch (216) definierten Vierervektors f zusammenfassen in das Gleichungssystem:

$$f_i = -\frac{\partial S_i^k}{\partial x^k} \qquad (f = -\operatorname{Div} S). \tag{225}$$

Für $i = 1, 2, 3$ stellt es den Impulssatz, für $i = 4$ den Energiesatz dar. Man pflegt es deshalb als Impuls-Energiesatz und den Tensor S als *Impuls-Energietensor* des elektromagnetischen Feldes zu bezeichnen.

Es zeigt sich ferner, daß sich die Ableitung der Gleichung (C), (D) aus den Feldgleichungen (A), (B) durch die vierdimensionale Schreibweise erheblich vereinfacht: Die Formel (176) ist identisch mit (225), wenn man φ_i mit dem Viererpotential, F_{ik} mit dem Flächentensor der Feldstärken und s^i mit dem Viererstrom identifiziert. Man braucht deshalb nur die in Nr. 23 unter a) gegebene Ableitung für den Fall konstanter g_{ik} zu spezialisieren, wobei sie sich noch erheblich vereinfacht, um (225) zu erhalten. Doch ist auch die direkte Rechnung leicht auszuführen.

Nicht nur in formaler, sondern auch in physikalischer Hinsicht bringt die relativistische Deutung des Impuls-Energiesatzes neue Gesichtspunkte. Wenn in jedem Koordinatensystem der Energiesatz [4. Komponente von (225)] gilt, folgt der Impulssatz von selbst. Beide Sätze gehen vollständig gleichwertig in die Beschreibung der Naturvorgänge ein. Entsprechend der Deutung des Vektors $\mathfrak{S}$ in (E) als Energiestrom sind konsequenterweise die Größen T_{ik} als Komponenten des Impulsstromes anzusprechen. Da der Impuls selbst schon ein Vektor ist, bilden sie (im gewöhnlichen Raum) einen *Tensor*, im Gegensatz zum Vektor $\mathfrak{S}$ der Energieströmung. Die *Maxwell*schen

144) *H. Minkowski,* II, l. c. Anm. 54).

Spannungen, die früher als reine Rechengrößen betrachtet wurden[145]), erhalten hierdurch eine greifbare physikalische Deutung. Sie rührt von *Planck*[146]) her. (Über die Verallgemeinerung dieser Deutung und der Gleichungen (225) für nicht elektromagnetischen Impuls vgl. Nr. 42.) An den Stellen, wo ponderomotorische Kräfte auf die Materie wirken, wird nach (225) elektromagnetischer Impuls aus mechanischem erzeugt oder in solchen verwandelt, und Analoges gilt von der Energie. (Über die Versuche, jeden Impuls und jede Energie als elektromagnetisch aufzufassen, vgl. Abschn. V.) An allen anderen Stellen strömen jedoch der Impuls und die Energie des elektromagnetischen Feldes wie eine im allgemeinen kompressible, im Spezialfall stationärer Felder sogar inkompressible Flüssigkeit mit unzerstörbarer Substanzmenge.

Der Tensor S_{ik} bezieht sich auf die Impuls- und Energie*dichte*, und es fragt sich, wie sich Gesamtenergie und Gesamtimpuls eines Systems beim Übergang zu einem bewegten Koordinatensystem verhalten. Indem wir die Besprechung des allgemeinen Falles der Nr. 42 vorbehalten, möge hier nur der Fall behandelt werden, wo Impuls und Energie rein elektromagnetisch sind, wo also die Kraftdichte f_i und die elektrische Ladungsdichte überall verschwinden, so daß hier nach (225)

$$\frac{\partial S_i^k}{\partial x^k} = 0 \qquad (\text{Div } S = 0) \tag{225a}$$

gilt. Dies trifft zu für das Feld einer beliebig gestalteten Lichtwelle, die frei durch den Raum hineilt. Sie möge einen endlichen Raum erfüllen, damit auch ihre Gesamtenergie und ihr Gesamtimpuls endlich sind. In der Welt entspricht ihm eine Röhre von endlichem Querschnitt. Es sind hier also genau diejenigen Verhältnisse vorhanden, die in Nr. 21 vorausgesetzt wurden, und aus den dortigen Entwicklungen folgt, daß aus den Größen S_k^4 durch Integration über das Volumen die Komponenten eines Vierervektors hervorgehen:

$$J_k = \frac{1}{i}\iiint S_k^4 dV. \tag{226}$$

Nach (224) hängen sie in einfachster Weise mit dem Gesamtimpuls

145) *H. A. Lorentz*, Art. V 14 dieser Encykl., Nr. 7, p. 163.

146) *M. Planck*, Verh. d. deutschen phys. Ges. 6 (1908), p. 728; Phys. Ztschr. 9 (1908), p. 828.

Akzeptiert man diese Deutung, so darf man sich allerdings nicht an dem paradoxen Umstand stoßen, daß eine Impuls*strömung* auch dann vorhanden sein kann, wenn die Impuls*dichte* überall verschwindet (wie es z. B. im rein elektrostatischen Feld der Fall ist). Bei der Energieströmung besteht keine derartige Möglichkeit.

G und der Gesamtenergie E des Systems (der Lichtwelle) zusammen:

$$(J_1, J_2, J_3) = c\mathfrak{G}, \; J_4 = iE. \tag{227}$$

Wir können also sagen: *Gesamtenergie und Gesamtimpuls bilden in unserem Fall einen Vierervektor.* Daraus folgen nach (186), (187) sofort die Transformationsformeln

$$\left\{\begin{aligned} G_x' &= \frac{G_x - \frac{v}{c^2} E}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad G_y' = G_y, \quad G_z' = G_z, \\ E' &= \frac{E - v G_x}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned}\right. \tag{228}$$

Wir bemerken noch, daß der Vektor J_k nicht raumartig sein kann. Wäre dem so, so gäbe es nämlich ein Koordinatensystem, in welchem $G \neq 0$, aber $E = 0$ wäre. Dies ist aber unmöglich, da E nur verschwinden kann, wenn überhaupt kein Feld vorhanden ist. Man hat also

$$|J| < 0, \quad G \leqq \frac{E}{c}. \tag{229}$$

G kann also nur ein Nullvektor oder zeitartig sein. Ein Beispiel für die erste Möglichkeit ist ein seitlich begrenzter ebener Wellenzug von endlicher Länge. Denn für diesen ist bekanntlich $G = \frac{E}{c}$. Da man diese Beziehung $J_i J^i = 0$ schreiben kann, muß sie für jedes Bezugssystem gültig sein. Ist α der in K gemessene Winkel zwischen Strahlrichtung und Geschwindigkeit des Systems K' relativ zu K, so folgt ferner aus (228) die *Einstein*sche Transformationsformel für die Energie einer endlichen ebenen Welle[147]):

$$E' = \frac{1 - \beta \cos \alpha}{\sqrt{1-\beta^2}} E. \tag{228a}$$

Ist dagegen J zeitartig, so gibt es stets ein Koordinatensystem K_0, in welchem der Gesamtimpuls verschwindet. Ist E_0 der Wert der Gesamtenergie in diesem System, so folgt aus (228) für ein System K, relativ zu dem sich K_0 mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegt:

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathfrak{G} = \frac{\frac{\mathfrak{v}}{c^2} E_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\mathfrak{v}}{c^2} E. \tag{228b}$$

Ein Beispiel dafür ist die Kugelwelle von endlicher Breite oder ein System von zwei entgegengesetzt gerichteten, sonst vollkommen gleichen ebenen Wellenzügen. Wegen der Verallgemeinerung dieser Relationen für nicht elektromagnetischen Impuls (bzw. Energie) siehe Nr. 42.

---

147) *A. Einstein,* l. c. Anm. 12), § 8.

31. Das invariante Wirkungsprinzip der Elektrodynamik. Nachdem bereits *Poincaré*[148]) sich von der Invarianz des *Schwarzschild*schen Wirkungsintegrals[149]) gegenüber der Lorentzgruppe überzeugt hat, hat *Born*[150]) die vierdimensionale Vektorschreibweise auf das Wirkungsprinzip angewandt und dasselbe auf diese Weise sehr übersichtlich gestaltet.

Schwarzschild[149]) bildet zuerst durch Integration über den dreidimensionalen Raum die *Lagrange*sche Funktion

$$\frac{1}{2}\int(\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2)\,dV + \int \varrho\left\{\varphi - \frac{1}{c}(\mathfrak{A}\mathfrak{u})\right\}dV$$

und erhält hiernach durch Integration über die Zeit die Wirkungsfunktion. Naturgemäß wird man die Integration über Raum und Zeit in ein vierfaches Integral vereinen.[148]) Bezeichnen wir mit L die Invariante

$$L = \tfrac{1}{2}F_{ik}F^{ik} = \mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2, \tag{230}$$

so läßt sich die (doppelte) Wirkungsfunktion einfach schreiben

$$W = \int(L - 2\varphi_i s^i)\,d\Sigma. \tag{231}$$

Das in Frage kommende Wirkungsprinzip besagt nun, daß die Variation von W unter gewissen Bedingungen verschwindet:

$$\delta W = 0. \tag{232}$$

Diese Bedingungen sind:

1. Das Integral W werde über ein bestimmtes Weltstück integriert, unabhängige Variable seien die Komponenten φ_i des Viererpotentials, die an der Grenze des Integrationsgebietes vorgegebene Werte haben sollen. Der Viererstrom s^i, d. h. die Weltlinien der elektrischen Ladungen und ihr Betrag werde nicht variiert. Nach Nr. **23**, (174), (175) ist dann

$$\delta W = 2\int\left(\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} - s^i\right)\delta\varphi_i \tag{233}$$

und (232) liefert das zweite System der *Maxwell*schen Gleichungen (208). Das erste System ist schon durch die Existenz des Viererpotentials erfüllt und wurde von vornherein vorausgesetzt.

2. Das Feld φ^i ist eine bestimmte Funktion der Weltkoordinaten und wird nicht variiert; dagegen sollen die Weltlinien der Materie variiert werden. Das Integral über L liefert dann keinen Beitrag zur Variation, das zweite muß erst umgeformt werden. Ist de das Ladungs-

---

148) *H. Poincaré,* Rend. Pal., l. c. Anm. 11).

149) *K. Schwarzschild,* Gött. Nachr, math.-naturw. Kl., 1903, p. 125. Siehe auch *H. A. Lorentz,* Art. V 14 dieser Encykl., Nr. 9.

150) *M. Born,* Ann. d. Phys. 28 (1909), p. 571.

element, welches einem bestimmten Substanzelement zugeordnet ist, und τ die Eigenzeit der zugehörigen Weltlinie (von einem irgendwie fixierten Nullpunkt an gerechnet), so kann man nach der Bedeutung (201) von s^i schreiben

$$\int \varrho_0 d\sum = ic\int de\int d\tau, \quad \int \varphi_i s^i d\sum = i\int de\int \varphi_i \frac{dx^i}{d\tau} d\tau.$$

Wir integrieren über den Weltzylinder, der erhalten wird, wenn man auf jeder Weltlinie der Substanz die gleiche Länge abträgt. Anfangs- und Endpunkte der Weltlinien sollen nicht variiert werden. Dann ergibt sich durch partielle Integration zunächst

$$\tfrac{1}{2}\delta W = i\int de\int\left(\frac{d\varphi_i}{d\tau}\delta x^i - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i}\delta x^i \frac{dx^k}{d\tau}\right)d\tau$$

$$= -i\int de\int F_{ik}u^k\delta x^i d\tau,$$

oder auch

$$\tfrac{1}{2}\delta W = -\int F_{ik}s^k\delta x^i d\sum = -\int f_i\delta x^i d\sum. \tag{234}$$

Born verfährt so, daß er der Variation der Substanz-Weltlinien noch die Nebenbedingung

$$\delta\int ds = 0 \tag{235}$$

hinzufügt. Nach Nr. **15** ist für eine Weltlinie mit stets zeitartiger Richtung, wie sie hier vorliegt, bei fixen Endpunkten und konstanten g_{ik}:

$$\delta\int d\tau = \frac{1}{c^2}\int \frac{du_i}{d\tau}\delta x^i d\tau, \tag{236}$$

also folgt aus (232) diesmal

$$\mu_0 \frac{du_i}{d\tau} = f_i,$$

wo μ_0 ein konstanter *Lagrange*scher Multiplikator ist. Diese Relationen stimmen mit (221) überein, wenn man μ_0 als Ruhmassendichte deutet. Wie in Nr. **29** ist hier vom Eigenfeld des betreffenden Teilchens abgesehen.

Weyl[151]) dagegen legt der Variation die Nebenbedingung (235) nicht auf, fügt aber zur Wirkungsfunktion noch ein Glied

$$2\int \mu_0 c^2 d\sum = 2ic\int dm \cdot c^2\int d\tau$$

hinzu:

$$W_1 = 2\int \mu_0 c^2 d\sum + W, \quad \delta W_1 = 0. \tag{231a}$$

Zufolge (234) und (236) folgt daraus ebenfalls (221).

---

151) *H. Weyl*, Raum—Zeit—Materie, 1. Aufl., § 32, p. 215.

32. Anwendungen auf spezielle Fälle. *α) Die Integration der Potentialgleichungen.* Bekanntlich werden die Differentialgleichungen (207) und (209), wenn s^i als Funktion von Ort und Zeit gegeben ist, integriert durch

$$(237)\qquad \varphi_{P,t} = \int \frac{\varrho_{Q,\,t-\frac{r_{PQ}}{c}}\, dV_Q}{4\pi r_{PQ}}, \quad \mathfrak{A}_{P,t} = \int \frac{\left(\varrho\frac{\mathfrak{u}}{c}\right)_{Q,\,t-\frac{r_{PQ}}{c}}\, dV_Q}{4\pi r_{PQ}}\ {}^{152)}.$$

In diesen Ausdrücken für die Potentiale wird die Symmetrie der Differentialgleichungen in Raum und Zeit nicht voll ausgenutzt. Dies geschieht dagegen bei einem von *Herglotz*[153]) schon vor Aufstellung der Relativitätstheorie gefundenen Verfahren, welches von der partikularen Lösung

$$\frac{1}{R^2_{PQ}}$$

der Gleichungen (209) ausgeht, in der jetzt PQ zwei Weltpunkte und R ihren vierdimensionalen Abstand bedeuten. Durch Multiplikation mit einer passenden Funktion $s(Q)$ und Integration über eine den Strahl $t_P \ldots \infty$ positiv umfahrende Schleife in der komplexen t_Q-Ebene erhält *Herglotz* daraus den üblichen Ausdruck für das Potential. Der Vorteil dieses Verfahrens besteht darin, daß man bei der Berechnung der Feldstärke erst differenzieren und hernach erst die komplexe Integration ausführen kann, wodurch die Rechnung übersichtlicher wird. Unter dem Einfluß der Relativitätstheorie hat später *Sommerfeld*[154]) das *Herglotz*sche Verfahren modifiziert und ergänzt.

Für Punktladungen geht (237) über in das *Wiechert*sche Elementargesetz

$$(238)\qquad 4\pi\varphi_{P,t} = \left.\frac{e}{r_P - \frac{(\mathfrak{u}\mathfrak{r}_P)}{c}}\right|_{t-\frac{r}{c}}, \quad 4\pi\mathfrak{A}_{P,t} = \left.\frac{e\frac{\mathfrak{u}}{c}}{r_P - \frac{(\mathfrak{u}\mathfrak{r}_P)}{c}}\right|_{t-\frac{r}{c}} {}^{155)}.$$

$\mathfrak{r}_P$ bedeutet den von dem Ort der Ladung zur Zeit $t - \frac{r_P}{c}$ zum Aufpunkt gezogenen Vektor. Es gestattet nach *Minkowski*[156]) eine einfache vierdimensional-vektorielle Deutung. Es sei

$$(239)\qquad \xi^i = \xi^i(\tau)$$

---

152) *H. A. Lorentz,* Art. V 14 dieser Encykl., Nr. 5, Gl. (XI), (XII). Von der seit *Ritz* [l. c. Anm. 21)] vielfach diskutierten Möglichkeit der Lösung durch vorauseilende Potentiale $\left(\text{in den Formeln } t + \frac{r}{c} \text{ statt } t - \frac{r}{c}\right)$ ist hier abgesehen.

153) *G. Herglotz,* Gött. Nachr., math.-naturw. Kl., 1904, p. 549

154) *A. Sommerfeld,* Ann. d. Phys. 33 (1910), l. c. Anm. 55), § 7, p. 665 ff.

155) *H. A. Lorentz,* Art. V 14 dieser Encykl., Nr. 17, Gl. (70).

156) *H. Minkowski,* III, l. c. Anm. 54).

die Weltlinie der Ladung als Funktion ihrer Eigenzeit, P wie oben der Auf-Weltpunkt. Durch diesen lege man einen „Nullkegel“ in die Vergangenheit. Er schneidet die Weltlinie der Ladung in einem bestimmten Punkt Q, und zwar in einem einzigen Punkt, wenn die Richtung der Weltlinie stets zeitartig ist. Sind x^i die Koordinaten des Aufpunktes P und

$$X^i = x^i - \xi^i_Q, \tag{240}$$

so wird also durch die Forderung

$$X_i X^i = 0 \tag{241}$$

der Punkt Q, und somit auch der zugehörige Wert von τ als eindeutige Funktion der x^i bestimmt:

$$\tau_Q = f(x^i). \tag{242}$$

Die Ausdrücke (238) für die Potentiale lassen sich nun auf Grund von (205) und (190) sofort zusammenfassen zu

$$4\pi\varphi_i = -\frac{e u_i}{(u_r X^r)}. \tag{238a}$$

Die Berechnung der Feldstärken wird durch Einführung der Eigenzeit erheblich vereinfacht. Aus (241) findet man zunächst für die Ableitungen der Funktion (242) nach den Koordinaten x^k von P:

$$X_i\left(\delta_k^i - u^i \frac{\partial\tau}{\partial x^k}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial x^k} = \frac{X_k}{(X_r u^r)}. \tag{243}$$

Die weitere Rechnung ist ganz elementar und ergibt für die Feldstärken:

$$\begin{aligned} 4\pi F_{ik} = &-\frac{e}{(X_r u^r)^3}\left\{c^2 + \left(X_r \frac{du_r}{d\tau}\right)\right\}(u_i X_k - u_r X_i) \\ &+ \frac{e}{(X_r u^r)^2}\left(\frac{du_i}{d\tau} X_k - \frac{du_k}{d\tau} X_i\right). \end{aligned} \tag{244}$$

Setzt man in den Aufpunkt eine zweite Ladung $\bar{e}$ mit dem Geschwindigkeitsvektor $\bar{u}^i$, so ergibt sich aus (216) die von der ersten auf die zweite Ladung ausgeübte Kraft $\mathfrak{K}$: Für den durch (219) definierten Vierervektor K_i der *Minkowski*schen Kraft folgt

$$\left\{\begin{aligned} 4\pi K_i = 4\pi\bar{e} F_{ik}\bar{u}^k = &\frac{e\bar{e}}{(X_r u^r)^3}\left[\left\{c^2 + \left(X_r \frac{du_r}{d\tau}\right)\right\}(u_k \bar{u}^k) \right. \\ &\left. - (X_r u^r)\left(\frac{du_k}{d\tau}\bar{u}^k\right)\right] X_i \\ &- \frac{e\bar{e}}{(X_r u^r)^3}\left\{c^2 + \left(X_r \frac{du_r}{d\tau}\right)\right\}(X_k \bar{u}^k) u_i \\ &+ \frac{e\bar{e}}{(X_r u^r)^3}(X_k \bar{u}^k)\frac{du_i}{d\tau}. \end{aligned}\right. \tag{245}$$

Sommerfeld leitet sowohl das *Wiechert*sche Elementargesetz (238a) als auch die Ausdrücke (244), (245) durch komplexe Integration mittels des oben erwähnten Verfahrens ab. (245) ist in Übereinstimmung mit der von *Schwarzschild*[157]) angegebenen „elementaren elektrodynamischen Kraft".

β) *Das Feld der gleichförmig bewegten Punktladung.* Da die Elektronentheorie mit der Relativitätstheorie im Einklang ist, kann letztere, was die Ermittlung des elektromagnetischen Feldes bei gegebener Elektronenbewegung anlangt, zu keinen anderen Ergebnissen führen als denen, welche bereits die vorrelativistische *Lorentz*sche Theorie erhalten hatte. Die Regeln für die Transformation der Feldstärken ersparen einem aber oft, auf die Differentialgleichungen oder auf die allgemeine Formel (244) zurückzugreifen, wenn das Feld für ein bestimmtes Koordinatensystem bekannt ist. Handelt es sich z. B. darum, das Feld einer im System K gleichförmig bewegten Punktladung zu finden, so ermittle man zuerst das Feld im System K', in welchem die Ladung ruht:

$$\mathfrak{E}' = \frac{e}{r'^3}\mathfrak{r}'.$$

Aus (207) folgt dann sofort

$$\mathfrak{E}_x = \frac{e}{r'^3}x', \quad \mathfrak{E}_y = \frac{e}{r'^3}\frac{y'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathfrak{E}_z \ldots$$

$$\mathfrak{H} = \frac{e}{r'^3}\frac{\left[\mathfrak{r}'\frac{\mathfrak{v}}{c}\right]}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Bezeichnet $\mathfrak{r} = (x, y, z)$ den Vektor, dessen Endpunkt der Aufpunkt, dessen Anfangspunkt der mit jenem *in K gemessen gleichzeitige* Ort der Ladung ist, so wird

$$(246)\quad \begin{cases} \mathfrak{r}' = \left(\frac{x}{\sqrt{1-\beta^2}}, y, z\right), \quad r' = \sqrt{\frac{x^2}{1-\beta^2} + y^2 + z^2} \\ \mathfrak{E} = \frac{e}{r'^3}\frac{\mathfrak{r}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \mathfrak{H} = \frac{e}{r'^3}\frac{\left[\mathfrak{r}\frac{\mathfrak{v}}{c}\right]}{\sqrt{1-\beta^2}}.^{158)} \end{cases}$$

Die elektrische Feldstärke ist also auch hier radial gerichtet, die magnetische steht senkrecht auf dem Radiusvektor und auf der Bewegungsrichtung. Der Fläche gleicher absoluter Größe der elektrischen Feldstärke ist im bewegten System nicht die Kugel, sondern

---

157) *K. Schwarzschild,* Gött. Nachr., math.-phys. Kl. 1903, p. 132; vgl. auch *H. A. Lorentz,* Art. V 14 dieser Encykl., Nr. 25.

158) Diese Ableitung findet sich zuerst bei *Poincaré,* Rend. Pal., l. c. Anm. 11), § 5.

das *Heaviside*-Ellipsoid, welches schon 1889 von *Heaviside*[159]) in die Elektrodynamik eingeführt wurde. Es erweist sich einfach als das Gebilde, in welches die Kugel durch eine Lorentz-Transformation übergeführt wird.

Das Feld (246) kann auch durch Spezialisieren aus der allgemeinen Formel (244) gewonnen werden. Man führe den Vektor X' ein, der von der in unserem Fall geraden Weltlinie der Ladung ausgeht, *auf ihr normal steht* und im Auf-Weltpunkt endet. Im Ruhsystem K' sind seine Komponenten $(\mathfrak{r}', 0)$. Man findet leicht

$$X_i' = X_i + \frac{1}{c^2} u_i \cdot (X_r u^r), \quad X_i' X'^i = |X'|^2 = \frac{1}{c^2}(X_r u^r),$$

$$|X'| = -\frac{1}{c}(X_r u^r)$$

also

(246 a) $$4\pi F_{ik} = \frac{e}{c|X'|^3}(u_i X_k' - u_k X_i').$$

γ) *Das Feld der Hyperbelbewegung.* Nach der gleichförmigen Bewegung ist der einfachste Fall die „gleichförmig“ beschleunigte, das ist in der Relativitätstheorie die Hyperbelbewegung (s. Nr. **26**). Das Feld einer Punktladung, welche eine Hyperbelbewegung beschreibt, wurde zum erstenmal von *Born*[160]) ermittelt. *Sommerfeld*[161]) bedient sich bei dessen Berechnung der Integration in der komplexen Ebene. Eine elementare Darstellung gibt auch *Laue.*[162]) Legt man den Ursprung des Koordinatensystems in den Mittelpunkt der Hyperbel und läßt die x^1x^4-Ebene mit der Ebene der Hyperbel zusammenfallen, so ist der Punkt

$$\xi^1 = a \cos \frac{s}{a}, \quad \xi^4 = a \sin \frac{s}{a}, \quad \xi^2 = \xi^3 = 0$$

der Weltlinie (196a) der Ladung, welcher durch (241) dem Aufpunkt $x^1, \dots x^4$ zugeordnet ist, bestimmt durch

(247) $$\cos(\psi - \varphi) = \frac{R^2 + a^2}{2\xi\varrho}, \qquad \psi = \frac{s}{a}.$$

Hierin ist gesetzt

(248) $$R = \sqrt{x_i x^i}, \quad x^1 = \varrho \cos\varphi, \quad x^4 = \varrho \sin\varphi.$$

Die Komponenten des Viererpotentials werden

(249) $$\varphi_1 = \frac{e}{4\pi\varrho} \frac{\sin\psi}{\sin(\psi - \varphi)}, \quad \varphi_2 = \varphi_3 = 0, \quad \varphi_4 = -\frac{e}{4\pi\varrho} \frac{\cos\psi}{\sin(\psi - \varphi)}.$$

159) Vgl. *H. A. Lorentz*, Art. V 14 dieser Encykl., Nr. **11** b, daselbst ältere Literatur.

160) *M. Born*, l. c. Anm. 114).

161) *A. Sommerfeld*, l. c. Anm. 115).

162) *M. v. Laue*, Das Relativitätsprinzip, 1. Aufl., Braunschweig 1911, p. 108, § 18 d).

In dem Koordinatensystem, in welchem die Ladung zur Zeit $t - \frac{r}{c}$ gerade ruht, verschwindet φ_1 im Zeitmoment t. Im System, in welchem der Aufpunkt mit dem Mittelpunkt der Hyperbel gleichzeitig ist, ergibt sich für die Feldstärken

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{E}_x &= -\frac{ie}{4\pi\varrho\sin^2(\psi-\varphi)}\frac{\partial\psi}{\partial\varrho} = -\frac{ie[a\cos(\psi-\varphi)-\varrho]}{4\pi a\varrho^2\sin^3(\psi-\varphi)} \\
&= -\frac{e}{\pi}\frac{a^2[R^2+a^2-2\varrho^2]}{[(R^2+a^2)^2-4a^2\varrho^2]^{3/2}}, \\
\mathfrak{E}_y &= -\frac{ie}{4\pi\varrho\sin^2(\psi-\varphi)}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x^{(2)}} = \frac{iey}{4\pi a\varrho^2\sin^3(\psi-\varphi)} = \\
&= \frac{2e}{\pi}\frac{a^2\varrho}{[(R^2+a^2)^2-4a^2\varrho^2]^{3/2}}
\end{aligned} \tag{250}
$$

(worin jetzt y statt $x^{(2)}$ geschrieben ist).

$$\mathfrak{H} = 0.$$

Die Hyperbelbewegung ist also auch dadurch ausgezeichnet, daß sie nicht mit Bildung einer Wellenzone und entsprechender Ausstrahlung verknüpft ist. (Dagegen ist Ausstrahlung vorhanden, wenn zwei geradlinig-gleichförmige Bewegungen durch ein Stück Hyperbelbewegung in einander übergeführt werden.)

Es liegt nahe, zur Berechnung des Feldes der Hyperbelbewegung ein mit der Ladung mitbewegtes, also nicht Galileisches Bezugssystem einzuführen. Als x-Koordinate kann in demselben die oben mit ϱ bezeichnete Größe, als Zeit am besten der Winkel φ eingeführt werden, der bis auf einen Faktor mit der Eigenzeit der bewegten Ladung übereinstimmt. Das Linienelement in diesem Koordinatensystem wird

$$
ds^2 = (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 + (d\xi^3)^2 + (\xi^1)^2(d\xi^4)^2 \tag{251}
$$
$$
(\xi^{(1)} = \varrho,\quad \xi^{(2)} = x^{(2)},\quad \xi^{(3)} = x^{(3)},\quad \xi^{(4)} = \varphi).
$$

Die Feldgleichungen in diesen Koordinaten können mit Hilfe der in Abschnitt II aufgestellten Hilfsmittel sofort hingeschrieben werden. Das Problem wird dann statisch, aber nicht eindimensional, die Rechnungen vereinfachen sich nicht wesentlich. Es ist historisch interessant, daß schon *Born*[163]) das Problem durch Einführung eines mitbewegten Systems behandelt hat. Der von ihm verwendete Zeitparameter ist ein anderer als der oben benutzte, die Differentialgleichungen erhielt er durch Zurückgreifen auf das von ihm bereits früher in invarianter Weise formulierte Variationsprinzip (Nr. **31**).

δ) Invarianz der Lichtphase. Reflexion am bewegten Spiegel. Strahlungsdruck. In Nr. **6** wurden die relativistischen Formeln für

163) *M. Born,* l. c. Anm. 114).

Dopplereffekt und Aberration aus der Invarianz der Lichtphase hergeleitet. Die Begründung für die letztere ergibt sich unmittelbar aus den Transformationsformeln für die Feldstärken. Da die Phase einer *ebenen* Welle überdies eine lineare Funktion der Raum-Zeitkoordinaten ist, kann sie als skalares Produkt aus dem Koordinatenvektor und aus einem Wellen-Vierervektor l_i geschrieben werden

$$-\nu t + (\mathfrak{k}\mathfrak{r}) = l_i x^i. \tag{252}$$

$\mathfrak{k}$ ist der dreidimensionale Ausbreitungsvektor, dessen Richtung mit der der Wellennormale übereinstimmt und dessen Betrag gleich der reziproken Wellenlänge (Wellenzahl) ist. Ist speziell die Wellennormale parallel der xy-Ebene, so wird

$$l_i = \left(\frac{\nu}{c}\cos\alpha,\quad \frac{\nu}{c}\sin\alpha,\quad 0,\quad \frac{i\nu}{c}\right). \tag{252a}$$

Im Vakuum ist l_i ein Nullvektor. Die Transformationsformeln (15), (16) der Nr. 6 folgen unmittelbar. Auf Grund von (204) lassen sie sich leicht durch die Transformationsformeln für die Amplitude A ergänzen. Es ergibt sich

$$A' = A\frac{1-\beta\cos\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{253}$$ [164]

Nimmt man noch die Transformation des Volumens V eines seitlich begrenzten, endlichen Wellenzuges hinzu:

$$V' = V\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\alpha}, \tag{254}$$

so folgt für die Gesamtenergie $E = \frac{1}{2}A^2 V$ desselben wieder die Formel (229a).[164] Der Vergleich mit (15) lehrt, daß sich Energie und Amplitude genau so transformieren wie die Frequenz, das Volumen dagegen umgekehrt:

$$\frac{E'}{\nu'} = \frac{E}{\nu}, \quad \frac{A'}{\nu'} = \frac{A}{\nu}, \quad V'\nu' = V\nu. \tag{255}$$

Die erste dieser Relationen hebt *Einstein*[164] als besonders bemerkenswert hervor; das *Wien*sche Verschiebungsgesetz ist damit verknüpft.

In engem Zusammenhange mit den Transformationsformeln für Frequenz und Richtung einer ebenen Welle beim Übergang zu einem bewegten Bezugssystem stehen die Gesetze der Reflexion am bewegten Spiegel (der als vollkommen leitend und eben vorausgesetzt werden möge). Diese Gesetze lassen sich nämlich offensichtlich durch Einführung eines mit dem Spiegel mitbewegten Koordinatensystems K' auf die für einen ruhenden Spiegel gültigen zurückführen.[165] Die

164) *A. Einstein,* l. c. Anm. 12), § 8.
165) *A. Einstein,* l. c. Anm. 12), § 7.

Relativitätstheorie kann auch hier nur in der Form der Herleitung, nicht im Ergebnis etwas Neues bringen.[166]) Die Formeln der älteren Theorie sind hier sogar *exakt* richtig, da alle vorkommenden Größen mit den Maßstäben und Uhren *desselben* Systems gemessen werden, Lorentz-Kontraktion und Zeitdilatation das Ergebnis somit nicht beeinflussen können.

Seien α_1, α_2 die in K gemessenen Winkel der Normale der einfallenden und reflektierten Welle mit der Richtung der Geschwindigkeit des Spiegels, α_2', α_2' die entsprechenden Winkel in K', ν_1, ν_2 die Frequenzen der einfallenden und reflektierten Welle in K, $\nu_1' = \nu_2' = \nu'$ die entsprechenden Frequenzen in K'. Bewegt sich der Spiegel parallel seiner eigenen Ebene, so wird $\alpha_2' = 2\pi - \alpha_1'$, und aus (15), (16) folgt daraus auch $\alpha_2 = 2\pi - \alpha_1$, $\nu_2 = \nu_1$. D. h. das Reflexionsgesetz unterscheidet sich in diesem Fall nicht von dem des ruhenden Spiegels. Daraus ergibt sich weiter, daß es immer nur auf die Geschwindigkeitskomponente in der Richtung der Spiegelnormale ankommt. Wir können deshalb annehmen, daß der Spiegel sich normal zu seiner eigenen Ebene bewegt; seine Geschwindigkeit v sei positiv gezählt in der Richtung der Normale nach innen, α_1, α_2 sowie α_1', α_2' sind jetzt Einfalls- und Reflexionswinkel und es gilt

$$\alpha_2' = \pi - \alpha_1'.$$

Aus (15), (16) folgt dann

$$\nu_2(1 - \beta \cos \alpha_2) = \nu_1(1 - \beta \cos \alpha_1) \tag{255}$$

$$\nu_2 \sin \alpha_2 = \nu_1 \sin \alpha_1 \tag{256}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi - \alpha_2}{2} = \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}. \tag{257}$$

Ferner

$$\frac{\cos \alpha_1 - \beta}{1 - \beta \cos \alpha_1} = - \frac{\cos \alpha_2 - \beta}{1 - \beta \cos \alpha_2},$$

woraus sich ergibt

$$\cos \alpha_2 = - \frac{(1 + \beta^2) \cos \alpha_1 - 2\beta}{1 - 2\beta \cos \alpha_1 + \beta^2} \tag{257 a}$$

und

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{1 - 2\beta \cos \alpha_1 + \beta^2}{1 - \beta^2}. \tag{258}$$

Eine sehr elegante Methode, um diese Formeln abzuleiten, gibt *Bateman*.[167]) Um in K' die Phase der reflektierten aus der der ein-

166) Vgl. die vor Aufstellung der Relativitätstheorie erschienenen, ausführlichen Diskussionen der Reflexionsgesetze am bewegten Spiegel bei *W. Hicks*, Phil. Mag. 3 (1902), p. 9; *M. Abraham*, Boltzmann-Festschrift 1904, p. 85; Ann. d. Phys 14 (1904), p. 236; Theorie der Elektrizität (2), 1. Aufl., Leipzig 1905, p. 343, § 40; ferner auch *E. Kohl*, Ann. d. Phys. 28 (1909), p. 28.

167) *H. Bateman*, Phil. Mag. 18 (1909), p. 890.

fallenden Welle zu erhalten, hat man einfach x' durch $-x'$ zu ersetzen. Dies ist zugleich der Übergang zum Spiegelbild. Um die entsprechende Transformation in K zu erhalten, hat man zuerst durch eine imaginäre Drehung um den Winkel $+\varphi$, der bestimmt ist durch (187), zu K' überzugehen, dann die x-Achse umzuklappen und dann durch Drehung um $-\varphi$ wieder zu K überzugehen. *Diese Operationen sind aber äquivalent mit einer Drehung um 2φ und nachfolgender Umklappung der x-Achse.*

Setzt man also

$$(259)\quad \begin{cases} \operatorname{tg} 2\varphi = \dfrac{iU}{c} \\ \text{so wird nach (187):} \\ U = \dfrac{2c^2 v}{c^2 + v^2}, \\ \cos 2\varphi = \dfrac{1+\beta^2}{1-\beta^2}, \quad \sin 2\varphi = i \cdot \dfrac{1-\beta^2}{2\beta} \end{cases}$$

und die Transformationen

$$(260)\quad \begin{cases} \bar{x} = -\dfrac{x - Ut}{\sqrt{1 - \dfrac{U^2}{c^2}}} = -\dfrac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2} x + \dfrac{2c^2 v}{c^2 - v^2} t, \\ \bar{t} = \dfrac{t - \dfrac{U}{c^2} x}{\sqrt{1 - \dfrac{U^2}{c^2}}} = \dfrac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2} t - \dfrac{2v}{c^2 - v^2} \end{cases}$$

vermitteln den Übergang zwischen Gegenstand (x, t) und Bild $(\bar{x}, \bar{t})$ im bewegten Spiegel. Ein Punkt des bewegten Spiegels, für den $x = vt$ ist, wird in sich selbst transformiert $(\bar{x} = x, \bar{t} = t)$, bewegt sich der Gegenstand mit derselben Geschwindigkeit wie der Spiegel $(x = vt + a)$, so gilt das gleiche vom Bild $(\bar{x} = v\bar{t} + \bar{a})$, wie es sein muß. Das Bild eines in K ruhenden Punktes bewegt sich mit der Geschwindigkeit U, die man auch aus dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten durch Zusammensetzen von v mit v erhält. Die Phase der am bewegten Spiegel reflektierten Welle geht aus der der einfallenden unmittelbar durch die Substitution (260) hervor, und die Relationen (257), (257a), (258) können, wenn man noch wegen der Umklappung der x-Achse überall $\pi - \alpha_2$ statt α_2 einführt, völlig analog zu (16a), (16) und (15) geschrieben werden:

$$(257')\quad \operatorname{tg} \frac{\pi - \alpha_2}{2} = \sqrt{\frac{1 + \dfrac{U}{c}}{1 - \dfrac{U}{c}}} \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}$$

$$(257'a)\quad \cos(\pi - \alpha_2) = \frac{\cos \alpha_1 - \dfrac{U}{c}}{1 - \dfrac{U}{c} \cos \alpha_1}$$

(258′) $$v_2 = v_1 \frac{1 - \frac{U}{c}\cos\alpha_1}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}$$

Varičak[168]) interpretiert diese Formeln durch die *Bolyai-Lobatschewsky*sche Geometrie.

Die Relationen (255) gestatten sofort, auch die Änderung der Amplitude bei Reflexion am bewegten Spiegel anzugeben.[168a])

(261) $$\frac{A_2}{v_2} = \frac{A_1}{v_1}, \quad A_2 = A_1 \cdot \frac{1 - 2\beta\cos\alpha_1 + \beta^2}{1 - \beta^2}.$$

Die Differenz der pro Zeit- und Flächeneinheit austretenden Energie
$$\tfrac{1}{2} A_2^2 (c\cos\alpha_2 - v)$$
und der eintretenden
$$\tfrac{1}{2} A_1^2 (-c\cos\alpha_1 + v)$$
muß gleich sein der pro Zeiteinheit vom Strahlungsdruck p geleisteten Arbeit pv.[168a]) Daraus bestimmt sich p in Übereinstimmung mit dem Ergebnis der vorrelativistischen Theorie zu:

(262) $$p = A_1^2 \frac{(\cos\alpha_1 - \beta)^2}{1 - \beta^2} = A_1'^2 \cos^2\alpha' = p'.$$

Der Lichtdruck ist eine Invariante. In Nr. **45** wird gezeigt, daß dies von jedem Druck gilt.

ε) *Das Strahlungsfeld eines bewegten Dipols.* Das Feld des *Hertz*schen Resonators ist in (243) als Spezialfall enthalten. Handelt es sich überdies nur um das Feld in der Wellenzone (große Entfernung), so kann nicht nur X_i vom Mittelpunkt des Dipols gezählt werden, sondern auch für u_i statt des Geschwingkeitsvektors der Einzelladungen der des Doppelmittelpunktes genommen werden. Bedeuteten $\mathfrak{v}, \dot{\mathfrak{v}}$ Geschwindigkeit des Dipols, Beschleunigung der schwingenden Ladung *zur Zeit* $t - \frac{r}{c}$, $\mathfrak{r}$ den von der *retardierten*, $\mathfrak{R} = \mathfrak{r} - r\frac{\mathfrak{v}}{c}$ den von *der gleichzeitigen* Lage des Dipols zum Aufpunkt gezogenen Vektor, $\mathfrak{r}_1$ den Einheitsvektor $\frac{\mathfrak{r}}{r}$, $\mathfrak{R}_1$ den entsprechenden Vektor $\mathfrak{R}_1 = \frac{\mathfrak{R}}{r} = \mathfrak{r}_1 - \frac{\mathfrak{v}}{c}$, ϑ den Winkel zwischen $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{r}$, so erhält man mit Rücksicht auf (241):

(263) $$\begin{cases} \mathfrak{E} = \dfrac{e}{4\pi c^2 r(1-\beta\cos\vartheta)^3} \cdot \{(\mathfrak{r}_1\dot{\mathfrak{v}})\mathfrak{R}_1 - \dot{\mathfrak{v}}(\mathfrak{R}_1\mathfrak{r}_1)\} \\ \quad = \dfrac{e}{4\pi c^2 r} \dfrac{1}{(1-\beta\cos\vartheta)^3} \cdot [\mathfrak{r}_1[\mathfrak{R}_1\dot{\mathfrak{v}}]] \\ \mathfrak{H} = \dfrac{e}{4\pi c^2 r(1-\beta\cos\vartheta)^3} \left\{(\mathfrak{r}_1\dot{\mathfrak{v}})\dfrac{[\mathfrak{v}\mathfrak{r}_1]}{c} + [\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r}_1]\right\} = [\mathfrak{r}_1\mathfrak{E}]. \end{cases}$$

168) *V. Varičak,* l. c. Anm. 111).

168a) *A. Einstein,* l. c. Anm. 12), § 7.

Die Relativitätstheorie gestattet ohne weiteres diese zuerst von *Heaviside*[169]) und dann genauer von *Abraham*[170]) abgeleiteten Ausdrücke aus den *Hertz*schen Formeln für das Feld des ruhenden Dipols abzuleiten. Das einfachste Verfahren besteht darin, daß man sich zunächst nach dem Vorgang von *Poincaré*[171]) davon überzeugt, daß auch im bewegten System $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ aufeinander und auf $\mathfrak{r}_1$ senkrecht stehen und den gleichen Betrag haben. Man kann nämlich diesen Sachverhalt durch die invarianten Vektorgleichungen

$$F_{ik}X^k = 0, \quad F^*_{ik}X^k = 0$$

ausdrücken. Sodann braucht man nur noch die Energiedichte aus der Transformationsformel für den Tensor S_{ik} zu berechnen.

Mit der vom bewegten Dipol ausgestrahlten Impuls- und Energiemenge beschäftigt sich vom Standpunkt der Relativitätstheorie *M. v. Laue*.[172]) Die Gleichungen (228b) müssen hier zu recht bestehen, da die *Existenz* des Wellenfeldes vom Vorhandensein der elektrischen Ladungen unabhängig ist. Mit Rücksicht auf die Zeitdilatation folgt daraus für die pro Zeiteinheit ausgestrahlte Energie

$$-\frac{dE}{dt} = -\frac{dE'}{dt'}.$$

Im Ruhsystem ist aber

$$-\frac{dE'}{dt'} = \frac{e^2}{6\pi c^3}\dot{\mathfrak{v}}'^2,$$

und die Transformationsformeln (193) für die Beschleunigung ergeben daraus sofort

$$(264)\quad \begin{cases} -\dfrac{dE}{dt} = \dfrac{e^2}{6\pi c^3}\left\{\dfrac{\dot{\mathfrak{v}}_x^2}{(1-\beta^2)^3} + \dfrac{\dot{\mathfrak{v}}_y^2 + \dot{\mathfrak{v}}_z^2}{(1-\beta^2)^2}\right\} = \dfrac{e^2}{6\pi c^3}\dfrac{1}{(1-\beta^2)^2}\left\{\dot{\mathfrak{v}}^2 + \dfrac{(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})^2}{1-\beta^2}\right\} \\ \qquad -\dfrac{d\mathfrak{G}}{dt} = -\dfrac{\mathfrak{v}}{c^2}\dfrac{dE}{dt}. \end{cases}$$

in Übereinstimmung mit der *Abraham*schen Berechnung aus dem Feld (263). Die ausgestrahlte Energie setzt sich additiv zusammen aus den Anteilen, die von der longitudinalen und der transversalen Komponente von $\mathfrak{v}$ allein hervorgebracht würden.

Betrachtet man den Vorgang vom System K' aus, so erhellt, daß die Geschwindigkeit des Dipols durch die Ausstrahlung nicht geändert

169) *O. Heaviside*, Nature 67 (1902), p 6; vgl. auch *H. A. Lorentz*, Art V 14 dieser Encykl., Nr. 14, p. 180 und die dort zitierte Literatur.

170) *M. Abraham*, Ann. d. Phys. 14 (1904), p. 236; Theorie der Elektrizität 2, 1. Aufl. (1905), § 13—15.

171) *H. Poincaré*, Rend. Pal., l. c. Anm. 11), § 5.

172) *M. v. Laue*, Verh. d. deutschen phys. Ges. 10 (1908), p. 888; Ann. d. Phys. 28 (1909), p. 436.

wird (in K' gleich Null bleibt). Infolge der Trägheit der Energie ist jedoch der Satz von der Erhaltung des Impulses trotz der Impulsausstrahlung (264) nicht verletzt (vgl. Nr. **41**).

ζ) *Die Reaktionskraft der Strahlung.* Wenn in dem betreffenden Moment $\mathfrak{v} = 0$ ist, so ist die Größe der Reaktionskraft der Strahlung bestimmt durch

$$\mathfrak{K} = \frac{e^2}{6\pi c^3}\ddot{\mathfrak{v}}.$$ [173]

Hieraus haben unabhängig voneinander *Laue*[174] und *Abraham*[175] durch eine Lorentz-Transformation den Ausdruck für die Reaktionskraft auf eine bewegte Ladung abgeleitet. Hierzu genügt es nach (219) einen Vektor K_i zu finden, dessen 3 räumliche Komponenten für $\mathfrak{v} = 0$ mit obigem Ausdruck für $\mathfrak{K}$ übereinstimmen und dessen zeitliche Komponente in diesem Fall verschwindet. Zu diesem Zweck mache man den Ansatz

$$K_i = \frac{e^2}{6\pi c^3}\left\{\frac{d^2 u_i}{d\tau^2} + \alpha u_i\right\} \tag{265}$$

und bestimme α aus der Bedingung $K_i u^i = 0$. Mit Rücksicht auf (159) und (192) findet man

$$\alpha = \frac{1}{c^2} u^k \frac{d^2 u_k}{d\tau^2} = -\frac{1}{c^2}\frac{du_k}{d\tau}\frac{du^k}{d\tau}, \tag{266}$$

und für $\mathfrak{K}$ ergibt sich:

$$\mathfrak{K} = \frac{e^2}{6\pi c^3}\frac{1}{1-\beta^2}\left\{\ddot{\mathfrak{v}} + \dot{\mathfrak{v}}\frac{3(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})}{c(1-\beta^2)} + \frac{\mathfrak{v}}{c^2(1-\beta^2)}\left[(\mathfrak{v}\ddot{\mathfrak{v}}) + \frac{3(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}}^2)}{c^2(1-\beta^2)}\right]\right\}. \tag{265a}$$

Abraham[175] bringt auch den Nachweis, daß das Zeitintegral von $\mathfrak{K}$, erstreckt über die Dauer der Ausstrahlung, gleich dem ausgestrahlten Impuls, und ebenso das Zeitintegral von $(\mathfrak{v}\mathfrak{K})$ gleich der ausgestrahlten Energie ist. Bei der Hyperbelbewegung verschwindet $\mathfrak{K}$, wie es sein muß, da hier keine Ausstrahlung erfolgt (s. oben unter γ).

33. Minkowskis phänomenologische Elektrodynamik bewegter Körper. Durch die Feldgleichungen (203) und (208) der Elektronentheorie sind alle Fragen der Elektrodynamik bewegter Körper prinzipiell beantwortet. Wegen unserer noch unvollständigen Kenntnis des Aufbaues der Materie ist es jedoch berechtigt, die Frage zu stellen, was das Relativitätsprinzip über die (makroskopischen) Vorgänge in bewegten Körpern auszusagen gestattet, wenn man die Vorgänge in ruhenden Körpern als durch die Erfahrung gegeben annimmt. Diese

---

173) Vgl. *H. A. Lorentz*, Art. V 14 dieser Encykl., Nr. **20**, p. 190, Gl. (74).

174) *M. v. Laue*, l. c. Anm 172).

175) *M. Abraham*, Theorie d. Elektrizität 2, 2. Aufl. (1908), p. 387.

Frage hat *Minkowski*[176]) beantwortet, indem er zeigte, daß aus den *Maxwell*schen Gleichungen

$$\text{(F)} \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div}\mathfrak{B} = 0$$

$$\text{(G)} \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \mathfrak{J}, \quad \operatorname{div}\mathfrak{D} = \varrho$$

$$\text{(H)} \qquad \mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}, \quad \mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}, \quad \mathfrak{J} = \sigma\mathfrak{E}$$

für ruhende Körper und dem Relativitätsprinzip die Gleichungen für bewegte Körper eindeutig folgen. Analog wie bei der vierdimensionalen Formulierung der Gleichungen der Elektronentheorie faßt man zuerst die Gleichungen, welche Ladungsdichte und Strom nicht enthalten, zusammen und dann die übrigen. Dies gibt Anlaß zur Einführung der beiden Flächentensoren

$$(267) \qquad (F_{41}, F_{42}, F_{43}) = i\mathfrak{E}, \quad (F_{23}, F_{31}, F_{12}) = \mathfrak{B}$$

$$(268) \qquad (H_{41}, H_{42}, H_{43}) = i\mathfrak{D}, \quad (H_{23}, H_{31}, H_{12}) = \mathfrak{H}$$

und des Vierervektors

$$(269) \qquad (J^1, J^2, J^3) = \mathfrak{J}, \quad J^4 = i\varrho$$

mit den zugehörigen Transformationsformeln

$$(267\text{a}) \qquad \begin{cases} \mathfrak{E}'_{\parallel} = \mathfrak{E}_{\parallel}, \quad \mathfrak{E}'_{\perp} = \dfrac{\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]\right)_{\perp}}{\sqrt{1-\beta^2}} \\[2ex] \mathfrak{B}'_{\parallel} = \mathfrak{B}_{\parallel}, \quad \mathfrak{B}'_{\perp} = \dfrac{\left(\mathfrak{B} - \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{E}]\right)_{\perp}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

$$(268\text{a}) \qquad \begin{cases} \mathfrak{D}'_{\parallel} = \mathfrak{D}_{\parallel}, \quad \mathfrak{D}'_{\perp} = \dfrac{\left(\mathfrak{D} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}]\right)_{\perp}}{\sqrt{1-\beta^2}} \\[2ex] \mathfrak{H}'_{\parallel} = \mathfrak{H}_{\parallel}, \quad \mathfrak{H}'_{\perp} = \dfrac{\left(\mathfrak{H} - \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{D}]\right)_{\perp}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

$$(269\text{a}) \qquad \mathfrak{J}'_{\parallel} = \frac{\mathfrak{J}_{\parallel} - \beta\varrho}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathfrak{J}'_{\perp} = \mathfrak{J}_{\perp}, \quad \varrho' = \frac{\varrho - \frac{1}{c}(\mathfrak{v}\mathfrak{J})}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Wenn in K' die Materie ruht, ist $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit der Materie in K (im Gegensatz zur Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ der Elektronen) und $\beta = \frac{v}{c}$. Die Gleichungen (F), (G) bleiben auch für bewegte

176) *H. Minkowski,* II, l. c. Anm. 54; siehe auch die Ableitung von *A. Einstein* und *J. Laub,* Ann. d. Phys. 26 (1908), p. 532, in der vom Tensorkalkül kein Gebrauch gemacht wird.

Körper bestehen und schreiben sich

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0 \quad \left(\text{resp. } \frac{\partial F^{*ik}}{\partial x^k} = 0\right). \tag{270}$$

$$\frac{\partial H^{ik}}{\partial x^k} = J^i. \tag{271}$$

Streng gelten sie nur für gleichförmig bewegte Körper und wegen der Additivität der Felder auch bei Vorhandensein von mehreren Körpern, die sich mit *verschiedenen* Geschwindigkeiten gleichförmig bewegen und durch Vakuumzwischenräume getrennt sind. Die Annäherung, mit der die Gleichungen (270), (271) gelten, wird allgemein um so größer sein, je kleiner die Beschleunigung der Materie ist.

Über die physikalische Bedeutung der in ihnen vorkommenden Größen ist zu sagen, daß $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$ bzw. $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{H}$ im Vakuum die Kraft auf einen in K ruhenden elektrischen bzw. magnetischen Einheitspol sind; in ponderablen Körpern haben sie keine unmittelbar anschauliche Bedeutung. Ferner ist $\mathfrak{J}$, ϱ auch im System K als Strom und Ladungsdichte zu bezeichnen. Die Berechtigung hierzu ergibt sich im Nichtleiter, wo $\mathfrak{J}' = 0$ ist, direkt aus (269a), denn hier wird $\varrho = \frac{\varrho'}{\sqrt{1-\beta^2}}$, also $de = \varrho\, dV$ invariant, und $\mathfrak{J} = \varrho \frac{\mathfrak{v}}{c}$ stimmt mit dem Konvektionsstrom überein. Ferner befriedigt J^i allgemein die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial J^i}{\partial x^i} = 0. \tag{272}$$

Deshalb ist $\mathfrak{J}$ allgemein Leitungs- + Konvektionsstrom und ϱ die Ladungsdichte.

Es ist ferner von Vorteil, statt $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ die *in K gemessenen* Kräfte $\mathfrak{E}^*$, $\mathfrak{H}^*$ auf einen mit der Materie mitbewegten elektrischen bzw. magnetischen Einheitspol einzuführen. Nach (213) und (267a), (268a) ist

$$\mathfrak{E}^* = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}], \quad \mathfrak{H}^* = \mathfrak{H} - \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{D}]. \tag{273}$$

Im Gegensatz zu $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ haben diese Vektoren auch im Innern der ponderablen Körper eine unmittelbare physikalische Bedeutung. Auch die Feldgleichungen (270), (271) nehmen durch Einführung von $\mathfrak{E}^*$, $\mathfrak{H}^*$ an Stelle von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ eine einfache und anschauliche Form an. Ist $\mathfrak{A}$ ein beliebiger Vektor, so möge die Operation $\dot{\underline{\mathfrak{A}}}$ definiert werden durch

$$\frac{d}{dt}\int \mathfrak{A}_n\, d\sigma = \int \dot{\underline{\mathfrak{A}}}_n\, d\sigma\,^{177)},$$

wobei über eine mit der Materie mitbewegte Fläche zu integrieren ist. Dann wird

$$\dot{\underline{\mathfrak{A}}} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \mathfrak{v}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{A} - \mathrm{rot}\,[\mathfrak{v}\mathfrak{A}]\,^{177)}$$

177) Vgl. *H. A. Lorentz*, Art. V 13 dieser Encykl., Nr. 4, p. 78, Gl. (12), (13).

und die Feldgleichungen lassen sich schreiben

$$(274)\quad \begin{cases} \operatorname{rot}\mathfrak{E}^* = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{B}}, & \operatorname{div}\mathfrak{B} = 0 \\ \operatorname{rot}\mathfrak{H}^* = \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{J}_l, & \operatorname{div}\mathfrak{D} = \varrho. \end{cases}$$

$\mathfrak{J}_l$ bedeutet den Leitungsstrom:

$$(275)\qquad \mathfrak{J} = \varrho\frac{\mathfrak{v}}{c} + \mathfrak{J}_l.$$

Die Gleichungen (274) gestatten auch ohne weiteres den Übergang zur Integralform.[178]) Aus den Transformationsformeln (269a) folgt, daß *die Trennung des Stromes in Leitungs- und Konvektionsstrom nicht vom Bezugssystem unabhängig ist. Auch wenn in K' keine Ladungsdichte und bloß Leitungsstrom vorhanden ist, tritt in K eine Ladungsdichte und somit auch Konvektionsstrom auf.*[178a]) Die betreffenden Transformationsformeln erhält man aus (269a) und (275):

$$(276)\qquad \mathfrak{J}'_{l_{\parallel}} = \frac{\mathfrak{J}'_{l_{\parallel}}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathfrak{J}'_{l_{\perp}} = \mathfrak{J}_{l_{\perp}},$$

$$(277)\qquad \varrho' = \varrho\sqrt{1-\beta^2} - \frac{\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}\mathfrak{J}_l\right)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \varrho = \frac{\varrho' + \left(\frac{\mathfrak{v}}{c}\mathfrak{J}'_l\right)}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

(Über die elektronentheoretische Begründung dafür siehe die folgende Nr.)

Die Gleichungen (F), (G) bzw. (274) bilden nur ein inhaltsloses Schema, solange nicht die Verknüpfungsgleichungen, die den Zusammenhang zwischen $\mathfrak{E}^*$, $\mathfrak{H}^*$ und $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ angeben, hinzugefügt werden. Man findet sie, indem man die bisher noch nicht verwendeten Gleichungen (H) heranzieht. Aus (267a), (268a), (273) folgt sofort:

$$(278)\quad \begin{cases} \mathfrak{D} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}] = \varepsilon\left\{\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]\right\} = \varepsilon\mathfrak{E}^*, \\ \mathfrak{B} - \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{E}] = \mu\left\{\mathfrak{H} - \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{D}]\right\} = \mu\mathfrak{H}^*. \end{cases}$$

178) Vgl. *H. A. Lorentz,* Art. V 13, Nr. 6 und Art. V 14, Nr. 33. Die dort verwendeten Größen $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{H}'$ sind mit unseren $\mathfrak{E}^*$, $\mathfrak{H}^*$ identisch, und die Gleichungen (III′ a), (IV′ a) l. c. stimmen mit (274) überein. Die Gleichungen (III″), (IV″) sind zwar ebenfalls gleichlautend mit (F), (G), doch ist der Zusammenhang zwischen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ bei *Lorentz* ein anderer als der durch die zweite Beziehung (273) gegebene. Dagegen ist seine Größe $\mathfrak{E}$ mit der unseren identisch [vgl. (106) l. c. mit der ersten Gl. (273)]. Siehe auch *Minkowskis* eigenen Vergleich seiner Formeln mit denen von *Lorentz* [*H. Minkowski,* II, l. c. Anm. 54), § 9].

178a) *H. A. Lorentz,* Alte und neue Fragen der Physik, Phys. Ztschr. 11 (1910), p. 1234; insbesondere p. 1242. *M. v. Laue,* Das Relativitätsprinzip, 1. Aufl., Braunschweig 1911, p. 119.

Nach $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$ aufgelöst geben diese Gleichungen bei Elimination von $\mathfrak{E}^*, \mathfrak{H}^*$:

$$
(278\text{a})\quad \left\{\begin{aligned}
\mathfrak{D} &= \frac{\varepsilon(1-\beta^2)\mathfrak{E} + (\varepsilon\mu - 1)\left\{\left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\mathfrak{H}\right] - \varepsilon\frac{\mathfrak{v}}{c}\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}\mathfrak{E}\right)\right\}}{1-\varepsilon\mu\beta^2},\\
\mathfrak{B} &= \frac{\mu(1-\beta^2)\mathfrak{H} - (\varepsilon\mu - 1)\left\{\left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\mathfrak{E}\right] - \mu\frac{\mathfrak{v}}{c}\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}\mathfrak{H}\right)\right\}}{1-\varepsilon\mu\beta^2}.
\end{aligned}\right.
$$

und bei Elimination von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ mittels (273):

$$
(278\text{b})\quad \left\{\begin{aligned}
\mathfrak{D} &= \frac{\varepsilon\left\{\mathfrak{E}^* - \frac{\mathfrak{v}}{c}\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}\mathfrak{E}^*\right)\right\} - \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}^*]}{1-\beta^2},\\
\mathfrak{B} &= \frac{\mu\left\{\mathfrak{H}^* - \frac{\mathfrak{v}}{c}\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}\mathfrak{H}^*\right)\right\} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{E}^*]}{1-\beta^2}.
\end{aligned}\right.
$$

Für *unmagnetisierbare* Körper ($\mu = 1$) stimmen diese Gleichungen *in den Gliedern erster Ordnung* mit dem von *Lorentz* angegebenen Zusammenhang von $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ mit seinen Größen $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{H}'$, die unserm $\mathfrak{E}^*$, $\mathfrak{H}^*$ entsprechen, überein.[179])

Analog wie (278) aus den zwei ersten Relationen (H), geht die Differentialform des *Ohm*schen Gesetzes für bewegte Körper aus der letzten Gleichung (H) hervor. Nach (276), (267a), (273) ergibt sich

$$
(279)\qquad \mathfrak{J}_{l\parallel} = \sigma\sqrt{1-\beta^2}\,\mathfrak{E}^*_{\parallel},\quad \mathfrak{J}_{l\perp} = \frac{\sigma}{\sqrt{1-\beta^2}}\mathfrak{E}^*_{\perp},
$$

was man auch schreiben kann

$$
(279\text{a})\qquad \mathfrak{J}_l = \frac{\sigma}{\sqrt{1-\beta^2}}\left\{\mathfrak{E}^* - \frac{\mathfrak{v}}{c}\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}\mathfrak{E}^*\right)\right\}.
$$

Die Transformationsformel (277) für die Ladungsdichte kann jetzt auch geschrieben werden

$$
(277\text{a})\qquad \varrho = \frac{\varrho' + \sigma\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}\mathfrak{E}'\right)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\varrho' + \sigma\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}\mathfrak{E}^*\right)}{\sqrt{1-\beta^2}}.
$$

Für die Gleichungen (278), (279) hat *Minkowski* auch eine vierdimensional-invariante Schreibweise angegeben:

$$
(280)\quad \left\{\begin{aligned}
& H_{ik}v^k = \varepsilon F_{ik}v^k,\\
& F^*_{ik}v^k = \mu H^*_{ik}v^k \qquad\qquad \text{oder}\\
& F_{ik}v_l + F_{kl}v_i + F_{li}v_k = \mu(H_{ik}v_l + H_{kl}v_i + H_{li}v_k)^{180)}
\end{aligned}\right.
$$

179) *H. A. Lorentz*, Art. V 14 dieser Encykl., Nr. 45, p. 227, Gl. (XXXIV''). Für unmagnetisierbare Körper ist nach *Lorentz*

$$
\mathfrak{B} = \mathfrak{H} = \mathfrak{H}' + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{E}],
$$

vgl. l. c. (XXX'), sowie Nr. 42.

180) *H. Weyl*, Raum — Zeit — Materie, 1. Aufl. 1918, p. 153, Gl. (46).

und

(281) $$J_i + (v_k J^k) v_i = -\sigma F_{ik} v^k.$$

Hierbei bedeuten v^k die Komponenten der Vierergeschwindigkeit der Materie. Um die Richtigkeit dieser Gleichungen darzutun, braucht offenbar bloß der Nachweis erbracht zu werden, daß sie für das mit der Materie mitbewegte Koordinatensystem K' in die Beziehungen (H) übergehen; von letzterem kann man sich unmittelbar überzeugen.

Jede der drei Relationen (280), (282) stellt ein System von vier Gleichungen dar. Die vierte Gleichung ist jedoch eine Folge der übrigen, denn wenn man (280), (281) skalar mit v^i multipliziert, so verschwinden beide Seiten identisch.

Die *Grenzbedingungen* ergeben sich durch Lorentz-Transformation aus den Grenzbedingungen für ruhende Körper. An den Grenzflächen bewegter Körper müssen die Tangentialkomponenten von $\mathfrak{E}^*$ und $\mathfrak{H}^*$, sowie die Normalkomponenten von $\mathfrak{B}$ stetig sein. Dabei ist jedoch angenommen, daß $\mathfrak{v}$ stetig ist. Bei einem an das Vakuum grenzenden Körper gelten die gleichen Bedingungen, wenn man in dem Ausdruck (273) für $\mathfrak{E}^*$, $\mathfrak{H}^*$, $\mathfrak{v}$ auf *beiden* Seiten der Geschwindigkeit des Körpers gleichsetzt. Es gilt auch für die Flächendichte ω der elektrischen Ladung $\mathfrak{D}_{n1} - \mathfrak{D}_{n2} = 4\pi\omega$. Diese Bedingungen folgen auch direkt aus (274), wenn man verlangt, daß die zeitlichen Änderungen der Feldgrößen für einen mit der Materie mitbewegten Punkt, die man durch Anwendung des Operators $\frac{\partial}{\partial t} + (\mathfrak{v}\,\mathrm{grad})$ erhält, stets endlich bleiben müssen.[181])

Ebenso wie die *Minkowski*schen Feld- und Verknüpfungsgleichungen aus den entsprechenden Gesetzen für ruhende Körper durch eine Lorentz-Transformation hervorgehen, führt nach *Ph. Frank*[182]) eine Galilei-Transformation zu den Gleichungen der *Hertz*schen Theorie.[183])

34. Elektronentheoretische Ableitungen. Da die Feldgleichungen der Elektronentheorie gegenüber der Lorentz-Gruppe kovariant sind und für ruhende Körper durch Mittelwertsbildung die *Maxwell*schen Gleichungen ergeben, müssen sie für bewegte Körper notwendig auf

181) Die Grenzbedingungen in der *Minkowski*schen Elektrodynamik werden diskutiert bei *A. Einstein* und *J. Laub,* Ann. d. Phys. 28 (1909), p. 445 und *M. v. Laue,* Das Relativitätsprinzip, 1. Aufl. 1911, p. 128 und 129.

182) *Ph. Frank*, Ann. d. Phys. 27 (1908), p. 897.

183) *E. Henschke,* Berl. Dissert. 1912; Ann. d. Phys. 40 (1913), p. 887 und *I. Ishiwara*, Jahrbuch f. Rad. u. Elektr. 9 (1912), p. 560; Ann. d. Phys. 42 (1913), p. 986 leiten die Feldgleichungen aus einer Verallgemeinerung des Variationsprinzips (232) her.

die *Minkowski*schen Feldgleichungen führen. *Born*[184]) konnte dies nach hinterlassenen Aufzeichnungen von *Minkowski* in der Tat zeigen, indem er die Bewegung der Elektronen als eine variierte Bewegung der Materie auffaßte. Aus der ersten Variation ergibt sich die elektrische Polarisation, aus der zweiten ein weiterer Anteil derselben sowie die Magnetisierung.

Es blieb ferner aufzuklären, wieso *Lorentz*[185]) auf Grund der Elektronentheorie zu Gleichungen gelangt ist, welche von den *Minkowski*schen verschieden sind. Für unmagnetisierbare Körper konnte bereits *Ph. Frank*[186]) nachweisen, daß dies an der Nichtberücksichtigung von Lorentz-Kontraktion und Zeitdilatation lag. Die naturgemäße Übertragung des *Lorentz*schen Gedankenganges ins Vierdimensionale und zwar für beliebig beschaffene bewegte Körper gibt *Dällenbach*[187]). Der Tensor F_{ik} wird definiert als der Mittelwert des mikroskopischen Feldtensors $\overline{F_{ik}}$, der Stromvektor J^i als der Mittelwert des Anteiles $\overline{\frac{1}{c}\varrho_0 u_L^i + \frac{1}{c}\varrho_0 u_K^i}$ der Leitungselektronen und der konvektiven Ladungen. Die Mittelwerte sind zu erstrecken über „physikalisch unendlich kleine" Weltgebiete. Nach (208) handelt es sich nun wesentlich darum, den Mittelwert des Stromvektors $\varrho_0 u_P^i$ der Polarisationselektronen zu finden. Durch eine der *Lorentz*schen völlig analoge Betrachtung, wobei nur an die Stelle der Raumgebiete überall Weltgebiete treten, ergibt sich

$$\overline{\varrho_0 u_P^i} = \frac{\partial M^{ik}}{\partial x^k}, \tag{282}$$

wobei M^{ik} zunächst definiert ist durch

$$M^{ik} = \overline{\varrho_0 x^i u^k}.$$

Da aber der Mittelwert von

$$\varrho_0 x^i u^k + \varrho_0 x^k u^i = \varrho_0 \frac{d}{d\tau} x^i x^k$$

verschwindet, kann man setzen

$$M^{ik} = \frac{1}{2}\overline{\varrho_0 (x^i u^k - x^k u^i)_P}. \tag{283}$$

Definiert man dann H^{ik} durch

$$H^{ik} = F^{ik} - M^{ik}, \tag{284}$$

so folgt (271) aus (208) durch Mittelwertsbildung. Ist die Geschwin-

184) *Minkowski-Born*, Math. Ann. 68 (1910), p. 526; auch separat, Leipzig 1910; siehe dazu auch *A. D. Fokker*, Phil. Mag. 39 (1920), p. 404.

185) *H. A. Lorentz*, Art. V 14 dieser Encykl., Kap. IV.

186) *Ph. Frank*, Ann. d. Phys. 27 (1908), p. 1059.

187) *W. Dällenbach*, Dissert. Zürich 1918; Ann. d. Phys. 58 (1919), p. 523.

digkeit der Polarisationselektronen relativ zum Molekülschwerpunkt klein gegen die Lichtgeschwindigkeit, so hängt der Flächentensor M_{ik} mit der in üblicher Weise definierten elektrischen Polarisation

$$\mathfrak{P} = N \overline{\sum e\mathfrak{r}}$$

und der Magnetisierung

$$\mathfrak{M} = N \frac{1}{2} \overline{\sum e [\mathfrak{r}, \mathfrak{u}]}$$

(zeitliche Mittelwerte, N = Zahl der Moleküle pro Volumeneinheit, $\mathfrak{u}$ = Elektronengeschwindigkeit, Σ erstreckt über alle Elektronen eines Moleküls) in einfacher Weise zusammen:

$$(285)\quad \begin{cases} (M^{41}, M^{42}, M^{43}) = \dfrac{-i\mathfrak{P}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ (M^{23}, M^{31}, M^{12}) = \dfrac{\mathfrak{M}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

(v = Geschwindigkeit der *Materie*).

Die Definition (284) von H^{ik} wird dann mit Rücksicht auf (267), (268):

$$(284\text{a})\qquad \mathfrak{D} = \mathfrak{E} + \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{B} - \mathfrak{M}.$$

Aus (285) folgen die Transformationsformeln:

$$(285\text{a})\quad \begin{cases} \mathfrak{P}'_{\parallel} = \mathfrak{P}_{\parallel}, \quad \mathfrak{P}'_{\perp} = \dfrac{\left(\mathfrak{P} - \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{M}]\right)_{\perp}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ \mathfrak{M}'_{\parallel} = \mathfrak{M}_{\parallel}, \quad \mathfrak{M}'_{\perp} = \dfrac{\left(\mathfrak{M} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{P}]\right)_{\perp}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \end{cases}$$

Ist ein im System K' elektrisch unpolarisiertes Teilchen magnetisiert, so ist es in K auch elektrisch polarisiert; ist ein in K' unmagnetisches Teilchen elektrisch polarisiert, so ist es in K auch magnetisch.[187a]) Aus diesem Grunde ist es nicht sachgemäß, Magnetisierungselektronen von (elektrischen) Polarisationselektronen zu unterscheiden, und wir haben deshalb oben beiden denselben Namen Polarisationselektronen gegeben, wobei an elektrische und magnetische Polarisation zu denken ist. Man kann sich von den Formeln (285a) natürlich auch ohne Benützung des Tensorkalküls auf Grund der Definition von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$ Rechenschaft geben. Ist die Substanz speziell so beschaffen, daß im mitbewegten System K' $\quad \mathfrak{P}' = (\varepsilon - 1)\mathfrak{E}', \quad \mathfrak{M}' = (\mu - 1)\mathfrak{H}',$

187a) *H. A. Lorentz,* l. c. Anm. 178a).

so folgen wegen der Kovarianz dieser Beziehungen gegenüber Lorentz-Transformationen unmittelbar die Tensorrelationen

$$(286)\quad \begin{cases} M_{ik}v^k = -(\varepsilon - 1) F_{ik}v^k \\ M_{ik}v_l + M_{kl}v_i + M_{li}v_k = (\mu - 1)\{H_{ik}v_l + H_{kl}v_i + H_{li}v_k\}, \end{cases}$$

die mit Hilfe von (284) in (280) übergehen. Man kann (286) auch schreiben

$$(286\,\mathrm{a})\quad \begin{cases} \mathfrak{P} - \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{M}] = (\varepsilon - 1)\mathfrak{E}^* \\ \mathfrak{M} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{P}] = (\mu - 1)\mathfrak{H}^*. \end{cases}$$

Es bleibt noch übrig, die Transformationsformeln für Ladungsdichte und Leitungsstrom theoretisch zu begründen. Sind N'_+, N'_-, u'_+, u'_- die Anzahl der positiven bzw. negativen Teilchen pro Volumeneinheit und ihre Geschwindigkeiten, so gilt definitionsgemäß

$$\varrho' = e'_+ N'_+ - e'_- N'_-$$

$$\mathfrak{J}'_l = e'_+ N'_+ \mathfrak{u}'_+ - e'_- N'_- \mathfrak{u}'_- \quad \text{und im System } K:$$

$$\varrho = e_+ N_+ - e_- N_-,$$

$$\mathfrak{J}_l = e_+ N_+ (\mathfrak{u}_+ - \mathfrak{v}) - e_- N_- (\mathfrak{u}_- - \mathfrak{v}).$$

Durch intermediäre Einführung der Koordinatensysteme K^0_+ und K^0_-, in denen positive bzw. negative Teilchen ruhen, findet man nun aus dem Additionstheoren der Geschwindigkeiten die Beziehungen

$$N = N' \frac{1 + \left(\frac{\mathfrak{v}}{c^2}\mathfrak{u}'\right)}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$(\mathfrak{u} - \mathfrak{v})_{\parallel} = \frac{(1-\beta^2)\mathfrak{u}'_{\parallel}}{1 + \left(\frac{\mathfrak{v}}{c^2}\mathfrak{u}'\right)}, \quad (\mathfrak{u} - \mathfrak{v})_{\perp} = \mathfrak{u}_{\perp} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\,\mathfrak{u}'_{\perp}}{1 + \left(\frac{\mathfrak{v}}{c^2}\mathfrak{u}'\right)},$$

(wobei die Indizes + und — weggelassen wurden, weil die Formeln für beide Indizes vollkommen gleichlautend sind). Hieraus und aus der Invarianz der Ladung ($e = e'$) folgt dann sogleich (276) und (277). Insbesondere ist also eine elektronentheoretische Erklärung für das merkwürdige Auftreten von Ladung in bewegten, stromdurchflossenen Leitern gewonnen.[187b])

35. Impuls-Energietensor und ponderomotorische Kraft der phänomenologischen Elektrodynamik. Joulesche Wärme. Das Relativitätsprinzip gestattet, aus den Ausdrücken für den Impuls-Energietensor und die ponderomotorische Kraft bei ruhenden Körpern *eindeutig* auf die in bewegten Körpern zu schließen. Für die ersteren wurden jedoch von verschiedenen Autoren verschiedene Ansätze ge-

187b) *H. A. Lorentz,* l. c. Ann. 187a).

macht, und die Frage, welcher von ihnen vorzuziehen ist, kann noch nicht als endgültig geklärt gelten. Es mögen zuerst diejenigen Ergebnisse der Relativitätstheorie besprochen werden, die von der speziellen Wahl des Ansatzes für den Energietensor unabhängig sind.

Energiedichte W, Energiestrom $\mathfrak{S}$, Impulsdichte $\mathfrak{g}$ und die Spannungskomponenten T_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ wird man wie für die Felder im Vakuum zu einen Tensor S_{ik} zusammenfassen:

$$(287)\qquad \begin{cases} S_{ik} = -T_{ik} \quad \text{für} \quad i, k = 1, 2, 3 \\ (S_{14}, S_{24}, S_{34}) = ic\mathfrak{g}, \; (S_{41}, S_{42}, S_{43}) = \frac{i}{c}\mathfrak{S} \\ S_{44} = -W. \end{cases}$$

Über die Symmetrieverhältnisse dieses Tensors ist zunächst noch nichts ausgesagt. Die Gleichungen

$$(288)\qquad \mathfrak{f} = \operatorname{div} T - \dot{\mathfrak{g}}$$

$$(289)\qquad \frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div}\mathfrak{S} + Q + A = 0$$

geben die ponderomotorische Kraft und den Energiesatz ähnlich wie in (D), (E), Nr. **30**. In letzterem bedeutet Q die pro Zeit- und Volumeneinheit entwickelte *Joule*sche Wärme, A die pro Zeit- und Volumeneinheit geleistete Arbeit

$$(289\text{a})\qquad A = (\mathfrak{f}\mathfrak{v}).$$

Im Koordinatensystem K', in welchem die Materie im betreffenden Augenblick gerade ruht, verschwindet A. Naturgemäß wird man (288), (289) zur vierdimensionalen Vektorgleichung

$$(290)\qquad f_i = -\frac{\partial S_i^k}{\partial x^k}$$

zusammenfassen. Die Komponenten f_i haben dann die Bedeutung:

$$(291)\qquad (f_1, f_2, f_3) = \mathfrak{f}, \quad f_4 = \frac{i}{c}(Q + A).$$

Daraus folgt, daß f_i hier nicht auf v^i senkrecht steht, vielmehr ist

$$(292)\qquad f_i v^i = -\frac{Q}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Da die rechte Seite von (292) ebenso wie die linke invariant sein muß, folgt die Transformationsformel

$$(293)\qquad Q = Q'\sqrt{1-\beta^2}.$$

Sie gilt wegen der Invarianz des vierdimensionalen Volumens auch für die *gesamte* bei einem bestimmten Vorgang entwickelte Wärme in Übereinstimmung mit der relativistischen Thermodynamik (vgl. Nr. **46**) und erscheint hier als eine Konsequenz der Forderung, daß die Kraftdichte in der durch (288) angegebenen Weise aus Spannungs-

tensor und Impulsdichte abgeleitet werden kann, im Verein mit dem Tensorcharakter von S_{ik}.

Die Tatsache, daß $f_i v^i$ von Null verschieden ist, führt zu einem eigentümlichen Dilemma. Die Bewegungsgleichungen können nämlich nur dann die Form (221) haben:

$$\mu_0 \frac{d v_i}{d\tau} = f_i,$$

wenn $(f_i v^i) = 0$ ist, da die linke Seite, skalar mit v^i multipliziert, identisch verschwindet. Man steht also vor der Alternative, entweder die Gleichungen (290) für die Viererkraft oder die Bewegungsgleichungen (221) fallen zu lassen. *Minkowski*[188]) beschritt den erstgenannten Weg. Er führt jedoch zu einer von (293) verschiedenen Transformationsformel für die *Joule*sche Wärme und somit zu einem Widerspruch mit den Forderungen der relativistischen Thermodynamik. Die richtige, von *Abraham*[189]) herrührende Formulierung ist folgende: In der allgemeinen relativistischen Dynamik wird gezeigt, daß jeder Energie träge Masse zugeschrieben werden muß (siehe Nr. **41** u. **42**). Wird also Wärme entwickelt, so bleibt die Ruhmassendichte nicht konstant und die Bewegungsgleichungen müssen geschrieben werden

$$\frac{d}{d\tau}(\mu_0 v_i) = f_i. \tag{294}$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf (292) durch skalare Multiplikation mit v_i

$$\frac{d\mu_0}{d\tau} = -\frac{1}{c^2}(f_i v^i) = +\frac{Q}{c^2}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{295}$$

also

$$\frac{d\mu_0}{dt} = \frac{Q}{c^2} \tag{295a}$$

im Einklang mit dem Satz von der Trägheit der Energie (Nr. **41**).

Aus (294) ergibt sich die bemerkenswerte Tatsache, daß die Geschwindigkeit eines Körpers sich nicht immer zu ändern braucht, wenn auf ihn eine Kraft wirkt.[190]) Betrachten wir z. B. einen in K' ruhenden, stromdurchflossenen Leiter. Da der stationäre Strom (vom System K' beurteilt) im ganzen auf ihn keine Kraft ausübt, bleibt er in Ruhe.

---

188) *H. Minkowski,* I, l. c. Anm. 54).

189) *M. Abraham,* Rend. Pal. 28 (1909), p. 1; vgl. auch die Diskussion zwischen *Abraham* und *Nordström*: *G. Nordström*, Phys. Ztschr. 10 (1909), p. 681; *M. Abraham,* Phys. Ztschr. 10 (1909), p. 737; *G. Nordström*, Phys. Ztschr. 11 (1910), p. 440; *M. Abraham,* Phys. Ztschr. 11 (1910), p. 527. Die *Nordström*schen Einwände lassen sich nicht aufrechthalten.

190) *M. v. Laue,* Das Relativitätsprinzip, 1. Aufl., Braunschweig 1911, p. 142.

Dennoch wirkt nach (294) im System K eine Kraft auf ihn. Ein analoger Fall begegnete uns bereits in Nr. **32** ε).

Wir kommen nun dazu, die verschiedenen Ansätze für den Impulsenergietensor S_{ik} zu diskutieren. Was zunächst *ruhende* Körper betrifft, so stimmen alle Autoren darin überein, daß für hysteresefreie Medien Energiedichte W und Energiestrom $\mathfrak{S}$ gegeben sind durch

$$(296) \qquad W = \tfrac{1}{2}\{(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + (\mathfrak{H}\mathfrak{B})\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{S} = c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}].$$

Während aber *Maxwell* und *Heaviside*[191]) für den Spannungstensor T (des dreidimensionalen Raumes) den Ansatz machten:

$$(297) \qquad T_{ik} = \mathfrak{E}_i\mathfrak{D}_k - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}\mathfrak{D})\delta_i^k + \mathfrak{H}_i\mathfrak{B}_k - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}\mathfrak{B})\delta_i^k, \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

akzeptiert *Hertz*[191]) den in i und k symmetrischen Ausdruck

$$(298) \qquad T_{ik} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}_i\mathfrak{D}_k + \mathfrak{E}_k\mathfrak{D}_i) - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}\mathfrak{D})\delta_i^k + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}_i\mathfrak{B}_k + \mathfrak{H}_k\mathfrak{B}_i) - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}\mathfrak{B})\delta_i^k,$$

der sich in anisotropen Medien (Kristallen) von (297) unterscheidet. Ebenso sind auch für die Impulsdichte $\mathfrak{g}$ zwei Ansätze möglich. *Entweder*

$$(299) \qquad \mathfrak{g} = \frac{1}{c}[\mathfrak{D}\mathfrak{B}],$$

was in homogenen, isotropen Medien nach (296) auch

$$(299\text{a}) \qquad \mathfrak{g} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\mathfrak{S}$$

geschrieben werden kann. *Oder*

$$(300) \qquad \mathfrak{g} = \frac{1}{c}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = \frac{1}{c^2}\mathfrak{S}.$$

Sind die Ausdrücke für W, $\mathfrak{S}$, T, $\mathfrak{g}$ in ruhenden Körpern vorgegeben, so sind die entsprechenden Ausdrücke für bewegte Körper eindeutig bestimmt, da die Komponenten eines Tensors in irgendeinem Koordinatensystem aus den Werten derselben in *einem* Koordinatensystem ableitbar sind. Entsprechend der vorangestellten Zweideutigkeit im Ansatz von T_{ik} und $\mathfrak{g}$ hat man bisher für den Tensor S_{ik} hauptsächlich die folgenden Ansätze diskutiert.

1. Der Ansatz von *Minkowski.*[192]) Er stützt sich auf die Ausdrücke (297), (299) für ruhende Körper. Wie leicht nachzuweisen ist, wird dann

$$(301) \qquad S_i^k = F_{ir}H^{kr} - \tfrac{1}{4}H_{rs}F^{rs}\delta_i^k,$$

191) Wegen der Literatur vgl. man *H. A. Lorentz,* Art. V 13 dieser Encykl., Nr. **23**.

192) *H. Minkowski,* Abh. II, l. c. Anm. 54). Zu den gleichen Ausdrücken für S_{ik} gelangten auch *G. Nordström,* Dissert. Helsingfors 1908 und auf Grund eines Variationsprinzips *J. Ishiwara,* Ann. d. Phys. 42 (1913), p. 986.

und die Ausdrücke (296), (297), (299) *bleiben auch in bewegten Körpern gültig.* Auch bleibt die im Vakuum gültige Relation (223)

$$(223) \qquad S_i^i = 0$$

bestehen.

Die Viererkraft f_i ergibt sich aus S_i^k gemäß (290). Im Ruhsystem K' haben ihre Komponenten die Werte

$$(302) \qquad (f_1', f_2', f_3') = \varrho' \mathfrak{E}' + [\mathfrak{J}_l' \mathfrak{B}'], \quad f_4' = i(\mathfrak{J}_l' \mathfrak{E}).$$

Es muß noch erwähnt werden, daß *Dällenbach*[193]) auf Grund einer allerdings nicht zwingenden elektronentheoretischen Überlegung gleichfalls den *Minkowski*schen Impulsenergietensor abgeleitet hat, und zwar gibt er ihn in einer auch für beliebig inhomogene und anisotrope Medien gültigen Form an. Auf eine zweite Weise leitet er ihn aus einem Wirkungsprinzip ab, das ihm auch die Feldgleichungen ergibt.[194])

2. Der Ansatz von *Abraham*.[195]) Die Unsymmetrie des *Minkowski*schen Ausdruckes (301) für den Impulsenergietensor führt zu sehr merkwürdigen, der Erfahrung allerdings nicht direkt widersprechenden Folgerungen. Z. B. treten Drehmomente auf, welche nicht durch eine Änderung des elektromagnetischen Drehimpulses kompensiert werden. *Abraham*[195]) hat deshalb einen symmetrischen Impulsenergietensor konstruiert, indem er für ruhende Körper die Ausdrücke (298), (300) annimmt. Dies führt in homogenen, isotropen Medien auf

$$(303) \quad \begin{cases} S_i^k = \frac{1}{2}(F_{ir} H^{kr} + H_{ir} F^{kr}) - \frac{1}{4} F_{rs} H^{rs} \delta_i^k \\ \qquad\qquad - \frac{1}{2}(\varepsilon\mu - 1)(v_i \Omega^k + v_k \Omega^r) \\ \quad = F_{ir} H^{kr} - \frac{1}{4} F_{rs} H^{rs} \delta_i^k - (\varepsilon\mu - 1)\Omega_i v^k \\ \quad = H_{ik} F^{kr} - \frac{1}{4} F_{rs} H^{rs} \delta_i^k - (\varepsilon\mu - 1) v_i \Omega^k. \end{cases}$$

Der schon bei *Minkowski* vorkommende „Ruhstrahlvektor“ Ω^i ist dabei definiert durch

$$(304) \quad F_i = F_{ik} v^k, \quad H_i = H_{ik} v^k, \quad \Omega^i = v_k F_l \{H^{ik} v^l + H^{kl} v^i + H^{li} v^k\}.$$

In dem mit der Materie mitbewegten Koordinatensystem K' haben die Komponenten der hier vorkommenden Vektoren die Werte

$$(304\text{a}) \quad \begin{cases} (F_1', F_2', F_3') = \mathfrak{E}', F_4' = 0; \quad (H_1', H_2', H_3') = \mathfrak{D}', H_4' = 0, \\ \qquad (\Omega_1' \Omega_2', \Omega_3') = c\mathfrak{S}', \Omega_4' = 0. \end{cases}$$

Die Identität der drei Ausdrücke (303) folgt aus ihrer Übereinstimmung im Ruhsystem K'. Die Relation (223) ist hier gleichfalls gültig.

---

193) *W. Dällenbach*, l. c. Anm. 187).

194) *W. Dällenbach*, Ann. d. Phys. 59 (1919), p. 28.

195) *M. Abraham*, Rend. Pal. 28 (1909), l. c. Anm. 189) und ebenda 30 (1910), p. 33, Theorie d. Elektrizität 2, 3. Aufl., Leipzig 1914, p. 298 ff., § 38, 39.

Für bewegte Körper gelten hier die Ausdrücke (296), (298), (300) für W, $\mathfrak{S}$, T_{ik}, $\mathfrak{g}$ nicht mehr, *Abraham*[195]) hat die betreffenden Ausdrücke sowie auch den für die ponderomotorische Kraft explizite ausgerechnet. Die hier verwendete vierdimensional invariante Formulierung rührt von *Grammel*[196]) her. In der ponderomotorischen Kraft in ruhenden Körpern tritt beim *Abraham*schen Impulsenergietensor zu (303) noch der Zusatzterm

$$\frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t}$$

hinzu. Wegen der Kleinheit dieses Terms dürfte es kaum gelingen, ein praktisch ausführbares experimentum crucis zwischen den beiden Ansätzen anzugeben. Es sei noch erwähnt, daß *Laue*[197]) sich den *Abraham*schen Annahmen anschließt.

Ein sehr gewichtiges Argument für die Symmetrie des phänomenologischen Impulsenergietensors scheinen uns folgende, gleichfalls von *Abraham*[198]) herrührende elektronentheoretischen Erwägungen zu sein. Die Viererkraft ist als Mittelwert der mikroskopischen Viererkraft aufzufassen, also nach (290) auch der Impulsenergietensor als Mittelwert des mikroskopischen.[199]) Bei der Mittelwertsbildung geht aber die Symmetrieeigenschaft eines Tensors nicht verloren [ebensowenig wie das Bestehen der Relation (223)].

3. Der Ansatz von *Einstein* und *Laub*.[200]) Zu einem sowohl von dem *Minkowski*schen als auch von dem *Abraham*schen Ansatz für die ponderomotorische Kraft in ruhenden Körpern (und somit auch für den Impulsenergietensor) vollkommen verschiedenen Ergebnis kommen *Einstein* und *Laub*. Sie finden nämlich, daß sich die beobachtete Kraftdichte

$$\mathfrak{f} = [\mathfrak{J}, \mathfrak{B}]$$

auf einen ruhenden, stromdurchflossenen Leiter zusammensetzt aus einer Oberflächenkraft $\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)[\mathfrak{J}, \mathfrak{H}_a]$ ($\mathfrak{H}_a$ = magnetische Feldstärke des äußeren Feldes) und der Kraft

$$\mathfrak{f} = [\mathfrak{J}, \mathfrak{H}_i],$$

die als die eigentliche Volumkraft anzusprechen ist, im Gegensatz zur Gleichung (303), nach der die Volumkraft $[\mathfrak{J}, \mathfrak{B}]$ ist. Der Impulsenergietensor, den die genannten Autoren angeben, ist ebenfalls dem-

196) *R. Grammel*, Ann. d. Phys. 41 (1913), p. 570.

197) *M. v. Laue*, Das Relativitätsprinzip, 1. Aufl., Braunschweig 1911, § 22, p. 135ff.

198) *M. Abraham*, Ann. d. Phys. 44 (1914), p. 537.

199) Die Einwendungen, die *Dällenbach* [l. c. Anm. 187)] dagegen erhebt, scheinen nicht stichhaltig.

200) *A. Einstein* und *J. Laub*, Ann. d. Phys. 26 (1908), p. 541.

entsprechend zu modifizieren. Die Überlegungen von *Einstein* und *Laub* wurden jedoch von *Gans*[201]) angefochten.[202])

36. Anwendungen der Theorie. *α) Die Versuche von Rowland, Röntgen, Eichenwald* und *Wilson.* Die Erklärung der genannten Versuche kann die Relativitätstheorie aus der Elektronentheorie[203]) vollkommen übernehmen, soweit es sich um unmagnetisierbare Körper handelt und soweit Größen höherer Ordnung in $\frac{v}{c}$ vernachlässigt werden können.[204]) Die letztere Vernachlässigung möge zunächst auch hier beibehalten werden, dagegen sollen beliebige Werte für die Permeabilität μ zugelassen werden. In der Ausdehnung der Theorie auf magnetisierbare Körper ist ein wesentlicher Fortschritt zu erblicken, den die Elektrodynamik von *Minkowski* hier gebracht hat.

Der Versuch von *Rowland* weist nach, daß der Konvektionsstrom dasselbe magnetische Feld erzeugt wie ein Leitungsstrom von der Stärke $\varrho \frac{\mathfrak{v}}{c}$. Seine Erklärung folgt unmittelbar aus den Feldgleichungen (G) und den Transformationsformeln (269a) für den Strom $\mathfrak{J}$. Wenn er früher als ein Argument für die Existenz des Äthers herangezogen wurde, so muß dem vom relativistischen Standpunkt entgegengehalten werden, daß er bloß die von der Relativitätstheorie geforderte Abhängigkeit der Zerlegung des elektromagnetischen Feldes in einen elektrischen und einen magnetischen Teil vom Bezugssystem beweist.

Röntgens[203]) Versuch besteht in dem Nachweis, daß bei der Bewegung eines Dielektrikums in einem elektrischen Feld an dessen Begrenzung ein Flächenstrom auftritt, der ein magnetisches Feld erzeugt. *Eichenwald* zeigte hernach, daß seine Größe

$$\mathfrak{j} = \beta\,|\mathfrak{P}| = \beta(\varepsilon - 1)\,|\mathfrak{E}| \tag{305a}$$

beträgt, wo $\mathfrak{P}$ die Polarisation des Dielektrikums bedeutet. Bei der praktischen Ausführung des Versuches rotiert das Dielektrikum zwischen den Platten eines Kondensators. Doch ist es jedenfalls mit weitgehender Näherung zulässig, die Theorie für gleichförmig bewegte Körper auf diesen Fall zu übertragen. Sei also ein Dielektrikum

---

201) *R. Gans*, Über das *Biot-Savart*sche Gesetz, Phys. Ztschr. 12 (1911), p. 806.

202) Die Angabe von *Grammel* [l. c. Anm. 196)], die Ausdrücke von *Einstein* und *Laub* für die ponderomotorische Kraft widersprächen dem Relativitätsprinzip, ist unrichtig, da diese Ausdrücke nur für das Ruhsystem K' Gültigkeit beanspruchen.

203) Vgl. *H. A. Lorentz*, Art. V 13 dieser Encykl., Nr. 17 und Art. V 14, Nr. 34. Daselbst ältere Literatur.

204) Vgl. dazu auch *A. Weber*, Phys. Ztschr. 11 (1910), p. 134.

parallel den Kondensatorplatten bewegt, $\mathfrak{E}_n = \omega$ die Flächendichte der (freien) Ladung auf denselben. Da $\mathfrak{B}$ quellenfrei ist und im Außenraum mit $\mathfrak{H}$ übereinstimmt, genügt es, die Wirbel von $\mathfrak{B}$ zu untersuchen. Da wir es hier ferner mit einem stationären Feld zu tun haben, sind nach (F), (G), $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ wirbelfrei. Wir wollen nun Größen von höherer Ordnung in $\frac{v}{c}$ konsequent vernachlässigen. Mit Rücksicht darauf, daß $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ selbst Größen erster Ordnung sind, folgt dann aus (278a)

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$$

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} - (\varepsilon\mu - 1)\left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\mathfrak{E}\right].$$

Der Wirbel von $\mathfrak{B}$ ist also bestimmt durch den Wirbel von $(\varepsilon\mu - 1)\left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\mathfrak{E}\right]$, der sich hier auf einen Flächenwirbel $\mathfrak{j}$ reduziert vom Betrag

$$(305b) \qquad |\mathfrak{j}| = \beta(\varepsilon\mu - 1)|\mathfrak{E}|,$$

wo $|\mathfrak{E}|$ der Wert von $\mathfrak{E}$ im *Innern* des Dielektrikums ist, und von der Richtung von $\mathfrak{v}$. Für $\mu = 1$ reduziert sich dies auf den Wert (305a) der Elektronentheorie. Für magnetisierbare Körper wurde der Effekt nicht untersucht.

Das Gegenstück zum Versuch von *Eichenwald* ist der von *H. A. Wilson.*[205]) Zwischen den Platten eines kurzgeschlossenen Kondensators rotierte ein dielektrischer Zylinder in einem parallel zu den Kondensatorplatten gerichteten Magnetfeld. Es zeigte sich eine Aufladung der Platten. Wir ersetzen wieder die Rotation durch eine geradlinige Bewegung, und zwar möge sie parallel zu den Platten, aber senkrecht auf dem Magnetfeld erfolgen. Nach (F) läßt sich $\mathfrak{E}$ zunächst aus einem Potential φ ableiten. Da nun die Platten kurzgeschlossen waren, folgt $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ und somit auch $\mathfrak{E} = 0$, und $\mathfrak{D}$ gibt direkt die gesuchte Ladungsdichte ω. Die Grenzbedingungen verlangen in diesem Fall, daß $\mathfrak{H}$ keinen Sprung erfährt. Nach (278a) wird also

$$(306a) \qquad \omega = \frac{(\varepsilon\mu - 1)\beta H}{1 - \varepsilon\mu\beta^2} \sim (\varepsilon\mu - 1)\beta H.$$

Für unmagnetisierbare Körper folgt das Ergebnis der Elektronentheorie

$$(306b) \qquad \omega = (\varepsilon - 1)\beta H.$$

205) *H. A. Wilson*, Phil. Trans. (A) 204 (1904), p. 121. Über einen älteren negativ verlaufenen Versuch von *Blondlot* mit Luft als Dielektrikum sowie über den Standpunkt der älteren Elektronentheorie vgl. *H. A. Lorentz*, Art. V 13 dieser Encykl., Nr. **20**; Art. V 14, Nr. **45**. Über die Diskussion des *Wilson*schen Versuches vom Standpunkt der Relativitätstheorie siehe *A. Einstein* und *J. Laub*, l. c. Anm. 176); *M. v. Laue*, Das Relativitätsprinzip, 1. Aufl., Braunschweig 1911, p. 129f.; *H. Weyl*, Raum—Zeit—Materie, 1. Aufl., Berlin 1918, p. 155.

H. A. und *M. Wilson*[206]) ist es gelungen, den Effekt auch an einem magnetisierbaren Isolator, den sie sich durch Einbetten von Stahlkugeln in Siegellack künstlich herstellten, zu messen. Das Ergebnis bestätigt den relativistischen Wert (306a) für die Ladungsdichte.

Die ältere *Hertz*sche Theorie gibt statt (305a) und (306a) die mit der Erfahrung unverträglichen Werte

$$|\mathfrak{j}| = \beta |\mathfrak{E}| \quad \text{und} \quad \omega = \beta H.$$

β) Widerstand und Induktion in bewegten Leitern.[207]) Auf Grund von (279) findet man, daß für ein endliches bewegtes Leiterstück

$$R_0 J = \int (\mathfrak{E}^* d\mathfrak{s}), \tag{307}$$

wo R_0 den *Ruh*widerstand des Leiters und $J = |\mathfrak{J}|\, q$ bedeutet. Die durch (280) gegebene Veränderung der Leitfähigkeit wird nämlich durch die Veränderung der Drahtlänge und des Drahtquerschnittes infolge der Lorentz-Kontraktion bei der Berechnung des Widerstandes gerade kompensiert. So stellt sich der Versuch von *Trouton* und *Rankine*[208]) von einem bewegten System K aus gesehen dar. Das Induktionsgesetz für bewegte Leiter folgt aus der ersten Gleichung (274) zu

$$\int (\mathfrak{E}^* d\mathfrak{s}) = \frac{d}{dt} \int \mathfrak{B}_n d\sigma, \tag{308}$$

dagegen ist

$$\int \mathfrak{E} d\mathfrak{s} \neq \frac{d}{dt} \int \mathfrak{B}_n d\sigma.$$

Aber (308) ist auch durchaus in Übereinstimmung mit der Erfahrung, da nach (279) nicht $\mathfrak{E}$, sondern $\mathfrak{E}^*$ den Leitungsstrom bestimmt.

γ) Die Ausbreitung des Lichtes in bewegten Medien. Mitführungskoeffizient. Versuch von Airy. Um die Gesetze der Lichtausbreitung in bewegten Medien zu finden, ist es nicht nötig, auf die Feldgleichungen zurückzugreifen. Vielmehr müssen sie sich direkt aus den Gesetzen für ruhende Körper durch Lorentz-Transformation ergeben. Wir betrachten zunächst ein nicht absorbierendes Medium. Die invariante Lichtphase ist wieder durch (252) gegeben, wobei jetzt l_i die Komponenten hat:

$$l_i = \left(\frac{v}{w}\cos\alpha,\ \frac{v}{w}\sin\alpha,\ 0,\ \frac{iv}{c}\right), \tag{309}$$

wenn die z-Achse senkrecht zur Körpergeschwindigkeit und zur

206) *H. A.* u. *M. Wilson,* Proc. Roy. Soc. (A), 89 (1913), p. 99.

207) Man vgl. hierzu *M. Abraham,* Theorie d. Elektrizität 2, 3. Aufl., Leipzig (1914), p 388; *M. v. Laue,* Das Relativitätsprinzip, 1. Aufl., Braunschweig (1911), p. 126f.; *H. Weyl,* Raum—Zeit—Materie, 1. Aufl., Berlin (1918), § 22.

208) *F. T. Trouton* und *A. O. Rankine,* l. c. Anm. 15).

Wellennormale gelegt wird. Im mitbewegten System K' ist speziell

$$w' = \frac{c}{n}. \tag{310}$$

Daraus folgen die Transformationsformeln

$$\nu = \nu' \frac{1 + \frac{v}{w'}\cos\alpha'}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{311a}$$

$$\frac{\nu}{w}\cos\alpha = \nu' \frac{\frac{1}{w'}\cos\alpha' + \beta/c}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \frac{\nu}{w}\sin\alpha = \frac{\nu'}{w'}\sin\alpha'$$

$$\frac{1}{w}\cos\alpha = \frac{\frac{1}{w'}\cos\alpha' + \beta/c}{1 + \frac{v}{w'}\cos\alpha'}, \quad \frac{1}{w}\sin\alpha = \frac{\frac{1}{w'}\sin\alpha'\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v}{w'}\cos\alpha'}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha'\sqrt{1-\beta^2}}{\cos\alpha' + \frac{\beta w'}{c}} \tag{311b}$$

$$w = c\frac{1 + \beta n\cos\alpha'}{\sqrt{(n\cos\alpha' + \beta)^2 + n^2\sin^2\alpha'(1-\beta^2)}}. \tag{311c}$$

Die Relation (311a) gibt den Dopplereffekt, (311b) die Aberration, (311c) den Mitführungskoeffizient. Sie stimmen in Gliedern erster Ordnung mit den Ausdrücken der älteren Theorie überein. Letztere gibt

$$w = \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\cos\alpha'. \tag{311d}$$

(Über den Einfluß der Abhängigkeit des Brechungsindex von der Wellenlänge siehe Nr. 6.) Das Brechungsgesetz an bewegten Grenzflächen läßt sich ebenfalls durch Lorentz-Transformation aus dem für ruhende Grenzflächen gewinnen, führt aber zu verwickelten Formeln.

Es ist hier auch das experimentelle Ergebnis von *Airy*[208]) zu besprechen, wonach der Aberrationswinkel sich nicht ändert, wenn man das Fernrohr mit Wasser füllt. Die ältere Theorie[209]) mußte, um ihn zu erklären, ziemlich umständliche Betrachtungen anstellen, da sie den Vorgang von einem Bezugssystem aus beschreiben mußte, relativ zu dem sich der Beobachter (die Erde) bewegt. Betrachtet man ihn jedoch von einem mitbewegten System aus, so ist das *Airy*sche Resultat vom relativistischen Standpunkt aus selbstverständlich. Richtet man nämlich das Fernrohr auf den scheinbaren Ort des Fixsterns, so fallen die von diesem entsandten Lichtwellen senkrecht auf dieses auf. Füllt man es nun mit Wasser, so müssen sich dann auch die Lichtwellen

208) *G. B. Airy*, Proc. Roy. Soc. 20 (1871), p. 35; 21 (1873), p. 121; Phil. Mag. 43 (1872), p. 310.

209) Vgl. *H. A. Lorentz*, Arch. néerl. 21 (1887), p. 103 [Ges. Abh. XIV, p. 341], daselbst ältere Literatur.

im Wasser senkrecht zur Grenzfläche ausbreiten. Der *Airy*sche Versuch vom mitbewegten System (Erde) aus gesehen, zeigt also vom relativistischen Standpunkt aus nur die triviale Tatsache, daß beim Einfallswinkel 0 (senkrechte Inzidenz) auch der Brechungswinkel 0 ist.

Man bemerkt, daß die Relationen (311 b, c) dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten *nicht* entsprechen. Bloß für $\alpha = 0$ ergibt sich Übereinstimmung mit demselben (vgl. Nr. 6a). *Laue*[210]) führt dies auf die Verschiedenheit der Richtung des Strahles und der Wellennormale zurück. Definiert man die Strahlgeschwindigkeit der Richtung und Größe nach durch

$$\mathfrak{w}_1 = \frac{\mathfrak{S}}{W} \tag{212}$$

($\mathfrak{S}$ = *Poynting*scher Vektor, W = Energiedichte),

so sollen die Transformationsformeln für die Komponenten von $\mathfrak{w}_1$ dem Additionstheorem der Geschwindigkeit streng genügen. Aus der Rechnung von *Scheye*[211]) geht hervor, daß dies in der Tat der Fall ist, wenn man den *Minkowski*schen unsymmetrischen Impuls-Energietensor zugrunde legt. Aus dem Energiesatz folgt überdies in diesem Fall, daß die Phasengeschwindigkeit w gleich wird der Komponente der Strahlgeschwindigkeit in der Richtung der Wellennormale. Legt man jedoch den *Abraham*schen Tensor (304) zugrunde, so werden die Verhältnisse komplizierter und das Additionstheorem der Geschwindigkeiten gilt auch nicht für die Strahlgeschwindigkeit.

Die Verallgemeinerung für absorbierende (leitende) Medien bietet prinzipiell nichts Neues. Es mag nur erwähnt werden, daß nach (277a) eine im bewegten Leiter fortschreitende Lichtwelle mit einer periodisch veränderlichen Ladungsdichte verbunden ist.

δ) *Signalgeschwindigkeit und Phasengeschwindigkeit in dispergierenden Medien.* In dispergierenden Medien kommt der Fall vor, daß die Phasengeschwindigkeit einer Lichtwelle $\geqq c$ ist. Dies scheint der Forderung der Relativitätstheorie zu widersprechen, daß keine Wirkung sich mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreiten kann (vgl. Nr. 6). Diese Schwierigkeit wurde durch eine Untersuchung von *Sommerfeld*[212]) beseitigt, in der auf Grund der Elektronentheorie nachgewiesen wird, daß der *Wellenkopf* sich immer mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit c ausbreitet, die Möglichkeit, mit Überlichtgeschwindigkeit Signale zu geben also in Wirklichkeit nicht vorliegt. Vervollständigt wurde

210) *M. v. Laue*, Das Relativitätsprinzip, 1. Aufl. (1911), p. 134.

211) *A. Scheye*, Über die Fortpflanzung des Lichtes in einem bewegten Dielektrikum, Ann. d Phys. 30 (1909), p 805.

212) *A. Sommerfeld*, Heinr.-Weber-Festschrift; Phys. Ztschr. 8 (1907), p. 841; Ann. d. Phys. 44 (1914), p 177.

dieses Ergebnis noch durch *Brillouin*[213]), der zeigte, daß abgesehen vom Absorptionsgebiet der Hauptteil des Signals sich mit der Gruppengeschwindigkeit ausbreitet.

c) Mechanik und allgemeine Dynamik.

37. Die Bewegungsgleichungen. Impuls und kinetische Energie. Die relativistische Mechanik[213a]) geht von der Annahme aus, daß in einem Koordinatensystem K', in welchem ein Massenpunkt im betreffenden Zeitmoment ruht, die Bewegungsgleichungen

$$m_0 \frac{d^2 \mathfrak{r}'}{dt'^2} = \mathfrak{K}' \tag{313}$$

der alten Mechanik zu Recht bestehen. Das Relativitätsprinzip gestattet dann in eindeutiger Weise auf die Bewegungsgesetze in irgendeinem anderen Koordinatensystem K zu schließen, indem man einfach auf (313) eine Lorentz-Transformation ausübt. Damit ist aber noch nicht bestimmt, was man als Kraft im System K definieren soll, da in den drei Bewegungsgleichungen ein gemeinsamer Faktor, der in beliebiger Weise von der Geschwindigkeit abhängen kann, zunächst willkürlich bleibt. Hier gibt es zwei wesentlich verschiedene Wege, um diese Unbestimmtheit zu beseitigen.

Entweder man macht eine Anleihe bei der Elektrodynamik. Akzeptiert man nämlich den *Lorentz*schen Ausdruck für die ponderomotorische Kraft für beliebig schnell bewegte Ladungen, so ist damit auch ein Transformationsgesetz für die Kraft gegeben (vgl. Nr. 29). Daß sich alle Kräfte in derselben Weise transformieren, folgt daraus, daß zwei Kräfte, die sich im System K' aufheben, sich auch in jedem anderen System K aufheben müssen. Die Formeln (213), (214), (215) lassen sich sofort für beliebige Kräfte verallgemeinern. An Stelle von (217) tritt der Vierervektor Kraftdichte—Leistungsdichte:

$$(f_1, f_2, f_3) = \mathfrak{f}, \quad f_4 = i\left(\mathfrak{f}\,\frac{\mathfrak{u}}{c}\right), \tag{314}$$

der auf der Vierergeschwindigkeit senkrecht steht:

$$f_k u^k = 0. \tag{315}$$

---

213) *L. Brillouin*, Ann. d. Phys. 44 (1914), p. 203.

213a) Wenn im folgenden von relativistischer Mechanik die Rede ist, so ist damit stets die Mechanik der speziellen Relativitätstheorie, also die Mechanik der Lorentzgruppe gemeint. Gegen die Verwendung des Wortes „relativistische Mechanik“ in diesem Sinne ließe sich einwenden, daß die klassische Mechanik auch relativistisch ist, da sie ja dem Relativitätspostulat genügt. Es hat jedoch das Wort relativistisch bereits vielfach die spezifische Bedeutung „relativ gegenüber der Lorentzgruppe“ bekommen, wie dies ja auch im Terminus spezielle Relativitätstheorie selbst der Fall ist.

Dann gelten wieder die Bewegungsgleichungen

$$(316) \qquad \mu_0 \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = f^i \quad \text{oder} \quad \mu_0 \frac{d u_i}{d\tau} = f_i,$$

in der μ_0 die (invariante) Ruhmassendichte bedeutet. Man kann auch die durch (219) definierte *Minkowski*sche Kraft K_i einführen und die Bewegungsgleichungen in der Form (220) schreiben.

Aus den Gleichungen

$$(317) \qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}(m\mathfrak{u}) = \mathfrak{K} \\ \text{und} \\ \frac{d}{dt} mc^2 = (\mathfrak{K}\mathfrak{u}) \end{cases}$$

folgt, daß der Impuls gegeben ist durch

$$(318\text{a}) \qquad \mathfrak{G} = m\mathfrak{u} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\mathfrak{u}$$ [214]

und die kinetische Energie durch

$$E_{\text{kin}} = mc^2 + \text{konst} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \text{konst}.$$

Man könnte daran denken, die Konstante so zu bestimmen, daß E_{kin} für einen *ruhenden* Massenpunkt verschwindet. Es erweist sich jedoch als praktischer, die Konstante gleich Null zu setzen. Die Energie des ruhenden Massenpunktes wird dann $m_0 c^2$ und allgemein

$$(318\text{b}) \qquad E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Für kleines β folgt daraus durch Potenzentwicklung

$$E = m_0 c^2 (1 + \tfrac{1}{2}\beta^2) = E_0 + \tfrac{1}{2} m_0 v^2$$

in Übereinstimmung mit der alten Mechanik. Die Zweckmäßigkeit der hier getroffenen Festsetzung wird durch die Bemerkung ersichtlich, daß dann die Größen

$$(319) \qquad (J_1, J_2, J_3) = c\mathfrak{G}, \quad J_4 = iE$$

die Komponenten eines Vierervektors bilden. Es ist nämlich

$$(320) \qquad J_k = m_0 c u_k.$$

Daraus folgt weiter, daß für unsere Größen $\mathfrak{G}, E$ genau die gleichen Transformationsformeln gelten, wie für Impuls und Energie eines abgeschlossenen, kräftefreien, elektromagnetischen Systems (Lichtwelle), vgl. (228):

$$(321) \qquad \begin{cases} G_x' = \dfrac{G_x - \frac{v}{c^2} E}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad G_y' = G_y, \quad G_z' = G_z \\ E' = \dfrac{E - v G_x}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{cases}$$

mit den entsprechenden inversen Formeln. Sie gelten auch für Impuls und Energie eines *Systems* von kräftefrei bewegten Massenpunkten.

214) *M. Planck*, l. c. Anm. 129).

Die Bewegungsgleichungen sowie die Ausdrücke für Impuls und Energie der relativistischen Mechanik gehen für kleine Geschwindigkeiten in die der alten Mechanik über, wie das von vornherein zu erwarten ist. Es gilt aber noch mehr: Die Abweichungen der relativistischen Mechanik von der gewöhnlichen sind von *zweiter* Ordnung in $\frac{v}{c}$. Darin müssen wir mit *Laue*[214a]) den Grund dafür erblicken, daß die ältere Elektronentheorie, die auf der gewöhnlichen Mechanik fußt, alle Effekte erster Ordnung richtig erklären konnte.

Minkowski[215]) hat auch noch eine andere wichtige Darstellung der Bewegungsgleichungen (316) gegeben. Wir führen den kinetischen Impulsenergietensor θ_{ik} ein durch die Relation

$$\theta_{ik} = \mu_0 u_i u_k. \tag{322}$$

Seine räumlichen Komponenten stellen den Tensor des Impulsstromes, die gemischten (bis auf den Faktor ic) die Impulsdichte, die zeitliche die Energiedichte dar. Zufolge der Kontinuitätsbedingung

$$\frac{\partial \mu_0 u^k}{\partial x^k} = 0 \tag{323}$$

schreiben sich dann die Bewegungsgleichungen in der Form

$$\frac{\partial \theta_i^k}{\partial x^k} = f_i. \tag{324}$$

Es sei hier auch hervorgehoben, daß aus den Bewegungsgleichungen (317) sich für die Bewegung eines Massenpunktes unter dem Einfluß einer *konstanten* Kraft die in Nr. 26 besprochene Hyperbelbewegung ergibt.

38. Von der Elektrodynamik unabhängige Begründung der relativistischen Mechanik. Das Unbefriedigende an der vorstehenden Ableitung ist, daß sie eine Anleihe bei der Elektrodynamik nötig hat. Es ist deshalb von Wichtigkeit, daß *Lewis* und *Tolman*[215a]) noch eine andere Ableitung gegeben haben, die von der Elektrodynamik keinen Gebrauch macht. Bei ihr erscheint nicht der Kraftbegriff, sondern der Impulsbegriff als das primäre. Es wird postuliert, daß jedem bewegten Massenpunkt ein zu seiner Geschwindigkeit paralleler Impulsvektor und eine skalare kinetische Energie in solcher Weise zugeordnet werden kann, daß *Erhaltungssätze* bestehen. Das heißt,

214a) *M. v. Laue,* Das Relativitätsprinzip, 1. Aufl. 1911, p. 88.

215) *H. Minkowski,* II, l. c. Anm. 54).

215a) *G. N. Lewis* u. *C. Tolman,* Phil. Mag. 18 (1909), p. 510. Einwendungen von *N. Campbell,* Phil. Mag. 21 (1911), p. 626 gegen die Schlußweise dieser Autoren treffen mehr die Ausdrucksweise als das Wesen der Sache. Wie nämlich *P. Epstein,* Ann. d. Phys. 36 (1911), p. 729 gezeigt hat, lassen sich die Schlüsse von *Lewis* und *Tolman* vollkommen streng gestalten.

bei einer Wechselwirkung zwischen Massen eines Systems, bei der weder Impuls und Energie ausgestrahlt noch Wärme entwickelt wird, sollen die Summe der Impulse und Energien der einzelnen Massen konstant bleiben. Speziell soll dies vom elastischen Stoß gelten. *Lewis* und *Tolman* haben nun ein Gedankenexperiment ersonnen, welches zeigt, daß die Form der Abbängigkeit von Impuls und kinetischer Energie von der Geschwindigkeit durch die Forderung der *Invarianz* dieser Erhaltungssätze gegenüber Lorentz-Transformationen eindeutig bestimmt ist.

Die beiden Beobachter A und B seien relativ zueinander in der x-Richtung mit der Geschwindigkeit v bewegt. Sie mögen Kugeln gleicher Masse mit der gleichen Geschwindigkeit u in der y- bzw. in der entgegengesetzten Richtung einander zuwerfen, derart, daß der Stoßdurchmesser die Richtung y hat. Dann bleiben zunächst die x-Komponenten der Geschwindigkeiten beider Kugeln erhalten. Ferner muß aus Symmetriegründen der Beobachter A an seiner Kugel den gleichen Bewegungsvorgang sehen wie der Beobachter B an der anderen Kugel. Auf Grund des Additionstheorems (10) der Geschwindigkeiten folgt daraus für die Geschwindigkeitskomponenten $\mathfrak{w}_x$, $\mathfrak{w}_y$ und $\mathfrak{w}_x'$, $\mathfrak{w}_y'$ der beiden stoßenden Körper in K und K':

Vor dem Stoß A

$$\mathfrak{w}_x = 0, \quad \mathfrak{w}_y = u \qquad\Big|\qquad \mathfrak{w}_x' = -v, \quad \mathfrak{w}_y' = u\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Vor dem Stoß B

$$\mathfrak{w}_x = v, \quad \mathfrak{w}_y = -u\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad\Big|\qquad \mathfrak{w}_x' = 0, \quad \mathfrak{w}_y' = -u.$$

Nach dem Stoß A

$$\mathfrak{w}_x = 0, \quad \mathfrak{w}_y = -u' \qquad\Big|\qquad \mathfrak{w}_x' = -v, \quad \mathfrak{w}_y' = -u'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Nach dem Stoß B

$$\mathfrak{w}_x = v, \quad \mathfrak{w}_y = +u'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad\Big|\qquad \mathfrak{w}_x' = 0, \quad \mathfrak{w}_y' = +u'.$$

Ist $|\mathfrak{w}|$ der absolute Betrag der Geschwindigkeit, so können wir den Impuls schreiben

$$\mathfrak{G} = m(|\mathfrak{w}|)\cdot\mathfrak{w},$$

wo m definitionsgemäß als Masse bezeichnet wird und nur vom *absoluten Betrag* der Geschwindigkeit abhängen kann. Aus der Erhaltung des Impulses in der x-Richtung folgt zunächst

$$u = u',$$

und aus der Erhaltung des Impulses in der y-Richtung

$$(\alpha) \qquad m\left(\sqrt{v^2 + u^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\right)\cdot u\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = m(u)\cdot u.$$

Gehen wir nach Division durch u zum lim $u \to 0$ über, so kommt, wenn wir für $m(0) = m_0$ schreiben:

$$m(v) \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0, \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Es ist leicht zu sehen, daß die Relation (α) durch diesen Ansatz auch für beliebiges u erfüllt wird. Hat man ferner den Impuls ermittelt, so folgt auch der Ausdruck (318b) für die kinetische Energie unschwer durch Lorentz-Transformation. Die Kraft wird nun definiert als zeitliche Änderung des Impulses, und die Transformationsgesetze für dieselbe folgen unmittelbar. Hiermit ist die Möglichkeit nachgewiesen, die relativistische Mechanik unabhängig von der Elektrodynamik zu begründen.

Es möge noch erwähnt werden, daß die Gesetze des elastischen Stoßes, zu denen die relativistische Mechanik führt, für den allgemeinen Fall von *Jüttner*[216]) hergeleitet und diskutiert wurden.

39. Das Hamiltonsche Prinzip der relativistischen Mechanik. Wie bereits *Planck*[217]) bemerkte, lassen sich die Bewegungsgleichungen (317) aus einem Variationsprinzip herleiten. Führt man die *Lagrange*sche Funktion

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \tag{325}$$

ein, so gilt nämlich

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta L + \mathfrak{K}\delta \mathfrak{r}) dt = 0, \tag{326}$$

wie man leicht nachrechnet. Wie beim *Hamilton*schen Prinzip der gewöhnlichen Mechanik sind die Werte t_0, t_1 und die Endpunkte des Integrationsweges vorgegeben. Man kann die Bewegungsgleichungen auch in der *Hamilton*schen Form schreiben. Führt man statt der Geschwindigkeitskomponenten $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ die Impulse

$$\mathfrak{G}_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \quad \mathfrak{G}_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}, \quad \mathfrak{G}_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \tag{327}$$

ein und bildet die *Hamilton*sche Funktion:

$$H = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \dot{z}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - L = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = E_{\text{kin}} = \tag{328}$$

$$= m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{\mathfrak{G}_x^2 + \mathfrak{G}_y^2 + \mathfrak{G}_z^2}{m_0^2 c^2}},$$

216) *F. Jüttner,* Ztschr. Math. Phys. 62 (1914), p. 410.

217) *M. Planck,* l. c. Anm. 129).

so wird nämlich

$$\text{(329)} \qquad \begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial \mathfrak{G}_x}, & \ldots \text{ usw.} \\ \dfrac{d\mathfrak{G}_x}{dt} = \mathfrak{K}_x, & \ldots \text{ usw.} \end{cases}$$

Das Wirkungsintegral $\int L\,dt$ muß eine Invariante gegenüber Lorentz-Transformationen sein. In der Tat ist es einfach

$$\text{(330)} \qquad \int L\,dt = -m_0 c^2 \int d\tau,$$

wo τ die Eigenzeit bedeutet. Das Wirkungsprinzip (323) schreibt sich dann einfach

$$\text{(331)} \qquad m_0 \delta \int d\tau + \int K_i \delta x^i = 0\,^{218)}$$

oder sogar

$$\text{(332)} \qquad \delta \int d\tau = 0$$

wenn man noch für die Variationen δx^i die *Nebenbedingung*

$$K_i u^i = 0$$

hinzufügt. Diese Formulierung des Variationsprinzips rührt von *Minkowski*[219]) her.

Die Bewegungsgleichungen (317) lassen auch eine Umformung zu, die dem *Virialsatz* der gewöhnlichen Mechanik entspricht:

$$\text{(333)} \qquad L + E_{\text{kin}} + \frac{d}{dt}(m\mathfrak{u}\mathfrak{r}) = (\mathfrak{K}\mathfrak{r}).$$

Bleibt $\mathfrak{r}$ bei der Bewegung stets innerhalb endlicher Grenzen und kommt die Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ der Lichtgeschwindigkeit nicht beliebig nahe, so folgt durch Bildung des zeitlichen Mittelwertes

$$\text{(333a)} \qquad \overline{L} + \overline{E}_{\text{kin}} = \overline{(\mathfrak{K}\mathfrak{r})}.$$

40. Generalisierte Koordinaten. Kanonische Form der Bewegungsgleichungen. In der relativistischen Mechanik kann eine bloß von den Lagenkoordinaten abhängige potentielle Energie im allgemeinen nicht eingeführt werden, weil sich Wirkungen nach den Grundpostulaten dieser Theorie nicht mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreiten können. Es gibt jedoch gewisse Sonderfälle, wo es dennoch nützlich ist, eine solche potentielle Energie einzuführen, z. B. dann, wenn sich ein Massenpunkt in einem zeitlich unveränderlichen Kraftfeld bewegt. Gerade dieser Fall spielt in der Theorie der Feinstruktur der *Balmer*linien eine wesentliche Rolle. Man kann schreiben

$$\text{(334)} \qquad \mathfrak{K} = -\operatorname{grad} E_{\text{pot}},$$

$$\text{(335)} \qquad L = -mc^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} - E_{\text{pot}}, \quad \delta \int L\,dt = 0$$

---

218) **An den Integrationsgrenzen sollen die δx^i verschwinden.**

219) ***H. Minkowski*, II, Anhang, l. c. Anm. 54).**

$$H(\mathfrak{G}_x \ldots, x \ldots) = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \cdots - L \tag{336}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial \mathfrak{G}_x}, & \ldots \\ \dfrac{d\mathfrak{G}_x}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}, & \ldots \end{cases} \tag{337}$$

womit die Gleichungen auf eine kanonische Form gebracht sind. Man kann auch generalisierte Koordinaten $q_1 \ldots q_f$ einführen. Die kanonisch konjugierten Impulse sind dann gegeben durch

$$\begin{cases} p_k = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}, \\ \text{und es wird} \\ H(p, q) = \Sigma \dot{q}_k \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L \\ \dfrac{dq_k}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dfrac{dp_k}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_k}. \end{cases} \tag{338}$$

Ferner gilt genau wie in der gewöhnlichen Mechanik die *partielle* Differentialgleichung von *Hamilton-Jacobi.* Die vorstehenden Formeln gelten ihrer Herleitung nach nur in *einem*, durch das Problem ausgezeichneten Koordinatensystem.

41. Die Trägheit der Energie. Der einfache Zusammenhang (318b) zwischen kinetischer Energie und Masse legt bereits die Vermutung nahe, daß einfach einer jeden Energie E eine Masse $m = \frac{E}{c^2}$ zukommt.[220]) Die Trägheit eines Körpers müßte dann beim Erhitzen desselben zunehmen, ferner müßte die Strahlung Trägheit zwischen den absorbierenden und emittierenden Körpern übertragen. Was zunächst den zweiten Umstand betrifft, so läßt er sich durch folgende Betrachtung verifizieren. Ein in K' ruhender Körper emittiere die Strahlungsenergie E_s', und zwar derart, daß im ganzen kein Impuls ausgestrahlt wird, der Körper also in K' in Ruhe bleibt. In einem relativ zu K' mit der Geschwindigkeit v bewegten Koordinatensystem K wird dann nach (228) ein Impuls

$$\mathfrak{G}_s = \frac{\mathfrak{v}}{c^2}\frac{E_s'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\mathfrak{v}}{c^2}E_s$$

220) *A. Einstein,* Ann. d. Phys. 18 (1905), p. 639 (auch in der Sammlung „Relativitätsprinzip"). Hier wird der Satz von der Trägheit der Energie zum erstenmal ausgesprochen; vgl. auch Ann. d. Phys. 20 (1906), p. 627. — *G. N. Lewis,* Phil. Mag. 16 (1908), p. 705, geht umgekehrt von der Forderung $E = mc^2$ aus und leitet daraus vermittels der Gleichung $\mathfrak{u}\frac{d}{dt}(m\mathfrak{u}) = \frac{dE}{dt}$ die Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit ab: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

ausgestrahlt. Da sich die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Körpers nicht ändert, ist dies nur möglich, wenn seine Ruhmasse m_0 um

$$\Delta m_0 = \frac{E_s'}{c^2}$$

abnimmt. Durch eine ähnliche Impulsbilanz beim unelastischen Stoß kann man zeigen, daß auch der Wärmenergie Trägheit zugeschrieben werden muß. Dies wird auch durch folgende Betrachtung nahegelegt. Für den Gesamtimpuls und die Gesamtenergie eines Systems von Massenpunkten gelten, wie bereits erwähnt, dieselben Transformationsformeln (321) wie für einen *einzelnen* Massenpunkt. Ist das Koordinatensystem K_0 so gewählt, daß dort der Gesamtimpuls $\mathfrak{G}$ verschwindet, so gilt im System K wieder

$$\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{v}}{c^2}\frac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad E = \frac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Das System verhält sich also wie ein einzelner Massenpunkt mit der Ruhmasse $m_0 = \frac{E_0}{c^2}$.[221]) Offenbar ist ein ideales Gas ein solches System von Massenpunkten. E_0 wird hier $\Sigma m_0 c^2 + U$, wo U die Wärmeenergie bedeutet. Ihre Trägheit ist dadurch also erwiesen.

Einen noch allgemeineren Fall behandelt *H. A. Lorentz*.[222]) Wir betrachten ein beliebiges, abgeschlossenes physikalisches System, bestehend aus Massen, gespannten Federn, Lichtstrahlen usw. In einem Koordinatensystem K_0 ruhe das System, d. h. es habe dort keinen Gesamtimpuls. In irgendeinem anderen Koordinatensystem K werden wir dann dem System diejenige Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ zusprechen, mit der sich K_0 relativ zu K bewegt. Es ist eine äußerst plausible physikalische Annahme, daß der Impuls $\mathfrak{G}_1$ des Systems in K gegeben sein wird durch

$$\mathfrak{G}_1 = m\mathfrak{u} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\,\mathfrak{u}$$

wie beim Massenpunkt.[223]) Dann gilt für $\mathfrak{G}$ die Transformationsformel

$$\mathfrak{G}_{x_1}' = \frac{\mathfrak{G}_{x_1} - mv}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathfrak{G}_{y_1}' = \mathfrak{G}_{y_1}, \quad \mathfrak{G}_{z_1}' = \mathfrak{G}_{z_1}.$$

221) *A. Einstein*, Ann. d. Phys. 23 (1907), p. 371.

222) *H. A. Lorentz*, Das Relativitätsprinzip, 3 Haarlemer Vorträge vgl. auch *H. A. Lorentz*, Over de massa der energie, Amst. Versl. 20 (1911), p. 87.

223) Nimmt man an, daß das System bloß der Einwirkung elektromagnetischer Kräfte ausgesetzt ist, so läßt sich diese Annahme umgehen. Vgl. *A. Einstein*, Jahrb. f. Rad. u. El. 4 (1907), p. 440. — Ein abgegrenzter, ebener Lichtwellenzug bildet insofern einen Ausnahmefall, als sein Impuls in keinem Koordinatensystem verschwindet (vgl. Nr. 30). Da in der angegebenen Formel in diesem Fall $u = c$ zu setzen ist, muß man ihm die Ruhmasse Null zuordnen (vgl. *H. A. Lorentz*, l. c. Anm. 222).

Nun lassen wir unser System 1 mit einem System 2, das nur aus Strahlung bestehe, in Wechselwirkung treten. Sind $\Delta\mathfrak{G}_1$ und $\Delta\mathfrak{G}_2$ die Impulsänderungen ΔE_1, ΔE_2 die Energieänderungen der beiden Systeme, so muß gelten

$$\Delta\mathfrak{G}_1 + \Delta\mathfrak{G}_2 = 0, \quad \Delta\mathfrak{G}_1' + \Delta\mathfrak{G}_2' = 0, \quad \Delta E_1 + \Delta E_2 = 0$$

und da wegen (228)

$$\Delta\mathfrak{G}'_{2x} = \frac{\Delta\mathfrak{G}_{2x} - \frac{v}{c^2}\Delta E_2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

folgt daraus sofort

$$\Delta m = \frac{\Delta E_1}{c^2}. \tag{339}$$

Diese Überlegung zeigt, daß es gar nicht darauf ankommt, welcher Art die Energien sind.

Es kann somit als erwiesen betrachtet werden, daß das Relativitätsprinzip im Verein mit den Sätzen der Erhaltung von Impuls und Energie zum fundamentalen Prinzip von der Trägheit aller Energie führt. Wir können dieses Prinzip mit *Einstein* als das wichtigste Ergebnis der speziellen Relativitätstheorie bezeichnen. Eine quantitative experimentelle Prüfung ist bisher noch nicht möglich gewesen. Schon in seiner ersten Publikation über diesen Gegenstand hat *Einstein*[224]) auf die Möglichkeit einer Prüfung der Theorie bei radioaktiven Prozessen hingewiesen. Doch sind die zu erwartenden Defekte in den Atomgewichten der radioaktiven Elemente[225]) zu gering, um empirisch festgestellt werden zu können. Die Möglichkeit, die Abweichungen der (auf $H = 1$ bezogenen) Atomgewichte der Elemente von der Ganzzahligkeit, soweit sie nicht durch Isotopie bedingt sind, durch die Wechselwirkungsenergie der Kernbestandteile und ihre Trägheit zu erklären, auf die zuerst *Langevin*[226]) hingewiesen hat, wurde neuerdings vielfach diskutiert.[227]) Vielleicht wird sich der Satz der Trägheit der Energie in Zukunft durch Beobachtungen über die Stabilität der Kerne prüfen lassen. Anzeichen für eine *qualitative* Übereinstimmung sind vorhanden.[227])

224) *A. Einstein,* Ann. d. Phys. 18, l. c. Anm. 220).

225) *M. Planck,* Berl. Ber. 1907, p. 542; Ann. d. Phys. 76 (1908), p. 1; *A. Einstein,* Jahrb. f. Rad. u. El. 4 (1907), p. 443.

226) *P. Langevin,* J. de Phys. (5) 3 (1913), p. 553. *Langevin* wollte damals *alle* Abweichungen der Atomgewichte von der Ganzzahligkeit auf die Trägheit der inneren Energie der Atomkerne zurückführen. Die Notwendigkeit, dabei auch eventuellen Isotopien zu berücksichtigen, wie sie heute durch die *Aston*schen Versuche als in den meisten Fällen tatsächlich vorhanden nachgewiesen sind, wurde bald darauf von *R. Swinne,* Phys. Ztschr. 14 (1913), p. 145 betont.

227) *W. D. Harkins* u. *E. D. Wilson,* Ztschr. f. anorg. Chem. 95 (1916), p. 1 u. 20; *W. Lenz,* Münch. Ber. 1918, p. 35; Naturw. 8 (1920), p. 181; *O. Stern* u. *M. Vollmer,*

42. Allgemeine Dynamik. Die Verhältnisse werden noch einfacher und übersichtlicher, wenn man von Totalenergie und Totalimpuls zu Energiedichte und Impulsdichte übergeht. In Nr. **30**, Gl. (225) haben wir gesehen, daß sich die elektromagnetische Viererkraft aus der Divergenz eines Spannungstensors S_i^k herleiten läßt. Dies führt naturgemäß auf die Verallgemeinerung, daß dies für jede Art von Kräften gelten müsse. Nach dem heutigen Stand unserer Kenntnisse können wir dies beweisen, denn wir wissen, daß sich alle (elastischen, chemischen usw.) Kräfte auf elektromagnetische zurückführen lassen (von der Gravitation sehen wir hier ab).[227a]) Davon machen indessen die Kräfte, welche die Elektronen und H-Kerne bei ihrer Bewegung auf sich selbst ausüben, eine Ausnahme (vgl. Abschn. V). Man wird deshalb so vorgehen: Man zerlege im Ausdruck (222) für den Impuls-Energietensor den Feldtensor F_{ik} in seine von den einzelnen geladenen Teilchen herrührenden Teile. Der Tensor S_i^k zerfällt dann in zwei Teile, von denen der eine aus Produkten von Feldtensorkomponenten *verschiedener* Teilchen, der andere aus den Produkten der Feldtensorkomponenten, die von je einem und demselben Teilchen stammen, besteht. Nur ersteren, der die Wechselwirkung zwischen den Teilchen beschreibt, behalte man bei. Bildet man nun die Divergenz, so erhält man bloß die Kräfte, welche die Teilchen wechselseitig *aufeinander* ausüben. Man kann dann schreiben:

$$\mu_0 \frac{du_i}{d\tau} = -\frac{\partial S_i^k}{\partial x^k}$$

und nach (322), (324)

$$\frac{\partial(\theta_i^k + S_i^k)}{\partial x^k} = 0.$$

Die Materie läßt sich also charakterisieren durch einen Impulsenergietensor T_i^k, dessen Divergenz verschwindet:

$$T_{ik} = \theta_{ik} + S_{ik}, \tag{340}$$

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0. \tag{341}$$

Wie in (224) stellen die räumlichen Komponenten von T_{ik} die Spannungen dar, die man auch als Komponenten des Impulsstromes deuten kann, während die übrigen Komponenten, die Impulsdichte $\mathfrak{g}$, Energiestrom $\mathfrak{S}$ und Energiedichte W bestimmen:

$$T_{i4} = ic\mathfrak{g}, \quad T_{4i} = \frac{i}{c}\mathfrak{S}, \quad T_{44} = W. \tag{342}$$

Ann. d. Phys. 59 (1919), p. 225; *A. Smekal,* Naturw. 8 (1920), p. 206; Wien. Ber. 1920, math.-nat. Kl.

227a) Inwiefern die hier besprochene Dynamik durch die *Quantentheorie* modifiziert werden wird, läßt sich zurzeit noch nicht sagen.

Wir haben den Impulsenergietensor hier dargestellt als Summe aus einem mechanischen und elektromagnetischen. Über die Versuche, den mechanischen Teil gleichfalls auf einen elektromagnetischen zurückzuführen, vgl. Abschn. V. Für die folgenden rein phänomenologischen Betrachtungen kommt es auf die *Natur* des Impulsenergietensors nicht an, sondern bloß auf seine *Existenz*. In historischer Hinsicht muß bemerkt werden, daß die Existenz eines derartigen Tensors für die *mechanische* (elastische) Energie zum erstenmal von *Abraham*[228]) ausgesprochen und von *Laue*[228]) endgültig formuliert wurde. Die *Symmetrie* des Impulsenergietensors ist durch seine Zurückführung auf den mechanischen und elektromagnetischen Tensor gewährleistet; früher hat man sie auch durch ein besonderes Postulat eingeführt. Es läßt sich aus ihr eine wichtige Folgerung herleiten. Aus $T_{i4} = T_{4i}$ folgt nämlich nach (342):

$$\mathfrak{g} = \frac{\mathfrak{S}}{c^2}. \tag{343}$$

Es ist dies der zuerst von *Planck*[229]) ausgesprochene Satz vom Impuls des Energiestromes, demzufolge jeder Energiestrom mit Impuls verbunden ist. Man kann diesen Satz als eine erweiterte Fassung des Prinzips von der Trägheit der Energie bezeichnen. Während sich dieses nur auf die *gesamte* Energie bezieht, sagt jener auch etwas über die *Lokalisation* von Impuls und Energie aus.

Ebenso wie in Nr. **30** schließt man aus (341), daß Gesamtenergie und Gesamtimpuls eines abgeschlossenen Systems einen Vierervektor bilden:

$$(J_1, J_2, J_3) = c\mathfrak{G}, \quad J_4 = iE. \tag{227}$$

Auch gelten wieder die Formeln (228). Die Trägheit einer jeden Energieform, also insbesondere auch der *potentiellen* Energie, folgt aus ihnen unmittelbar. Wir bemerken nochmals, daß wir die additive Konstante der Energie so festgesetzt haben, daß die Energie eines ruhenden Elektrons gleich $m_0 c^2$ wird. Nur dann gilt allgemein $E = mc^2$.

Aus (341) folgt auch in der bekannten Weise[230]) die Erhaltung des Drehimpulses

$$\mathfrak{L} = \int [\mathfrak{r}\,\mathfrak{g}]\, dV. \tag{344}$$

Für die Gültigkeit des Satzes von der Erhaltung des Drehimpulses

---

228) *M. Abraham*, Phys. Ztschr. 10 (1909), p. 739; *M. v. Laue*, Das Relativitätsprinzip, 1. Aufl., Braunschweig 1911, und Ann. d. Phys. 35 (1911), p. 524; vgl. auch *W. Schottky*, Berl. Diss. 1912.

229) *M. Planck*, Phys. Ztschr. 9 (1908), p. 828.

230) Vgl. *H. A. Lorentz*, Art. V 14 dieser Encykl., Nr. 7.

ist die Symmetrie der *räumlichen* Komponenten von T_{ik} wesentlich. Fordert man diese Symmetrie für jedes Bezugssystem, so folgt daraus aber auch die Symmetrie der gemischten Komponenten, die den Satz vom Impuls des Energiestroms bedingt.[230a])

43. Transformation von Energie und Bewegungsgröße eines Systems bei Vorhandensein von äußeren Kräften. Die Formeln (228) gelten nur, wenn unter E und $\mathfrak{G}$ *alle* in Betracht kommenden Energie- und Impulsarten inbegriffen sind. Steht ein Gas unter einem äußeren Druck oder haben wir es mit einem System von ruhenden elektrischen Ladungen zu tun, so müßten wir auch die elastische Energie der Hülle, resp. der geladenen Materie berücksichtigen. Es wäre dies sehr unbequem. Wir wollen deshalb folgendes allgemeine Problem lösen. Die Energiearten, die wir allein berücksichtigen wollen, mögen eine Kraft f_i hervorbringen, so daß gilt

$$\frac{\partial S_i^k}{\partial x^k} = -f_i, \tag{345}$$

wenn S_{ik} der den genannten Energiearten entsprechende Tensor ist. Es ist gefragt nach den Transformationsformeln für Totalenergie und Totalimpuls. Im Koordinatensystem K' ruhe das System, d. h. es sei hier der Gesamtimpuls Null ($\mathfrak{G}' = 0$), ferner seien hier alle Zustandsgrößen von der Zeit unabhängig.

Man kann nun zwei Methoden befolgen. Entweder man transformiert erst die Energie- und Impulsdichte auf das bewegte System, was nach den Transformationsformeln für die Komponenten eines symmetrischen Tensors leicht geschehen kann, und integriert dann über das Volumen. In dieser Weise geht *Laue*[231]) vor. Es ergibt sich

$$\tag{346} \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{G}_x &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{v}{c^2}\left[E' + \int S'_{xx} dV'\right], \quad \mathfrak{G}_y = \frac{v}{c^2}\int S'_{xy} dV', \ldots \\ E &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[E' + \frac{v^2}{c^2}\int S'_{xx} dV'\right]. \end{aligned} \right.$$

Sind speziell die Spannungen ein räumlich konstanter, skalarer Druck p, so kommt

$$\tag{346a} \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{G}_x &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{v}{c^2}(E' + p'V'), \quad \mathfrak{G}_y = \mathfrak{G}_z = 0 \\ E &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(E' + \frac{v^2}{c^2} p'V'\right), \end{aligned} \right.$$

230a) Im Zusammenhang mit dem Drehimpulssatz möge darauf hingewiesen werden, daß *P. Epstein,* Ann. d. Phys. 36, l c. Anm. 215a) das Drehmoment als Flächentensor $N_{ik} = x_i K_k - x_k K_i$ (K_i = *Minkowski*sche Viererkraft) in die Theorie einführt.

231) *M. v. Laue,* Ann. d. Phys. 35 (1911), p. 524 und Das Relativitätsprinzip, 1. Aufl. 1911, p. 87, Gl. (102), p. 153, Gl. (XXVII).

wie zuerst *Planck*[232]) in seiner grundlegenden Arbeit über die Dynamik bewegter Systeme gefunden hat.

Zweitens kann man eine Betrachtung anstellen ähnlich derjenigen in Nr. **21** bei der Herleitung des Vektorcharakters von J_k. Nur ist wesentlich zu berücksichtigen, daß hier das Integral über den Querschnitt $x'^4 =$ konst. nicht ohne weiteres ersetzt werden kann durch das Integral über den Querschnitt $x^4 =$ konst. Vielmehr unterscheiden sich die beiden Integrale um das Integral

$$-\int f_i \, d\Sigma,$$

welches über das zwischen den beiden Querstücken befindliche Weltstück zu erstrecken ist. Legt man die x-Achse in die Richtung der Relativgeschwindigkeit von K gegen K', so folgt leicht

$$\int f_i \, d\Sigma = \beta \int f_i' x' \, dV',$$

und nach einigen Zwischenrechnungen findet man

$$(347) \qquad \begin{cases} \mathfrak{G}_x = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{v}{c^2} \left[E' + \int \mathfrak{f}_x' x' \, dV' \right], \\ \mathfrak{G}_y = \frac{v}{c^2} \int \mathfrak{f}_y' x' \, dV', \quad \mathfrak{G}_z = \cdots \\ E = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left[E' + \beta^2 \int \mathfrak{f}_x' x' \, dV' \right]. \end{cases}$$

Diese Formeln rühren von *Einstein*[233]) her. Man kann sie durch partielle Integration in die *Laue*schen überführen.

44. Anwendung auf spezielle Fälle. Versuch von Trouton-Noble. Eine einfache Überlegung zeigt, daß nach den Transformationsformeln der relativistischen Mechank ein bewegter starrer Körper nicht dann im Gleichgewicht ist, wenn das resultierende Drehmoment der auf ihn ausgeübten Kräfte verschwindet. Betrachten wir zum Beispiel einen Stab, der sich im Koordinatensystem K mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ in der Richtung der x-Achse bewegt.[234]). Im mitbewegten System K' mögen an den beiden Enden entgegengesetzt gleiche Kräfte in der Richtung des Stabes wirken. Der in K' gemessene Winkel zwischen Stab und Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ (x'-Achse) von K' gegen K sei α. Sind x', y' die Koordinatendifferenzen der beiden Stabenden in K', x, y die entsprechenden Werte in K, so ist

$$\mathfrak{K}_x' = |\mathfrak{K}'| \cos\alpha, \quad \mathfrak{K}_y' = |\mathfrak{K}'| \sin\alpha$$

232) *M. Planck,* l. c. Anm. 225), vgl. auch *A. Einstein,* Jahrb. f. Rad. u. El. 4 (1907), p. 411.

233) *A. Einstein,* Ann. d. Phys. 23 (1907), p. 371 und allgemeiner im Jahrb. f. Rad. u. El. 4 (1907), p. 446 u. 447.

234) *P. Epstein,* Ann. d. Phys. 36 (1911), p. 779.

und nach (216) $\mathfrak{K}_x = \mathfrak{K}_x', \quad \mathfrak{K}_y = \mathfrak{K}_y' \sqrt{1-\beta^2},$

im Gegensatz zu $x = x' \sqrt{1-\beta^2}, \quad y = y'.$

In K hat also die Kraft nicht die Stabrichtung. Es wirkt ein Drehmoment

$$(348) \quad \mathfrak{N}_z = (1-\beta^2) x' \mathfrak{K}_y' - y' \mathfrak{K}_x' = -\beta^2 x' \mathfrak{K}_y' = -\beta^2 l_0 |\mathfrak{K}'| \sin\alpha \cos\alpha.$$

Es ist nun die Frage, wieso trotz Vorhandensein dieses Drehmomentes keine Drehung eintritt. Man wird zunächst bemerken, daß die elastischen Kräfte, die in K' den äußeren Kräften $\mathfrak{K}$ das Gleichgewicht halten, sich genau so transformieren wie diese. Es existiert also im System K ein Drehmoment der elastischen Kräfte, welches das äußere Drehmoment $\mathfrak{N}$ aufhebt. Der tiefere Grund dafür, daß die elastischen Kräfte hier nicht die Richtung des Stabes haben, ist der, daß sie sich nicht ausschließlich als Divergenz eines Spannungstensors darstellen lassen, sondern daß noch ein Term, der von der zeitlichen Änderung der Impulsdichte herrührt, hinzukommt (vgl. Nr. 42). Daß sich dadurch das Drehmoment auch quantitativ richtig ergibt, zeigt folgende Überlegung. Das von den elastischen Kräften herrührende Drehmoment $\mathfrak{N}$ ist gleich der negativen zeitlichen Änderung des gesamten elastischen Drehimpulses $\mathfrak{L}$, also nach (344)

$$(344\text{a}) \qquad \mathfrak{N} = -\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = -\frac{d}{dt}\int [\mathfrak{r}\mathfrak{g}]\, dV.$$

Man leitet dies genau analog ab, wie es von *H. A. Lorentz*[234a]) bei elektromagnetischen Kräften geschehen ist. Da in K' alle Zustandsgrößen von der Zeit unabhängig sind, folgert man leicht[234a])

$$(344\text{b}) \qquad \mathfrak{N} = -[\mathfrak{u}\mathfrak{G}].$$

Die Bestimmung des Drehmomentes ist hierdurch auf die des elastischen Gesamtimpulses $\mathfrak{G} = \frac{1}{c^2}\int \mathfrak{S}\, dV$

zurückgeführt. Nun ist in unserem Fall der Energiestrom stets der Stabrichtung parallel, und das über den Stabquerschnitt erstreckte Integral $\int \mathfrak{S}_n d\sigma = \int |\mathfrak{S}|\, d\sigma$ ist nach dem Energiesatz gleich der Arbeit $(\mathfrak{K}\mathfrak{u})$. Also wird $\mathfrak{G} = \frac{1}{c^2}(\mathfrak{K}\mathfrak{u})\,\mathfrak{r},$

wo $\mathfrak{r}$ der Vektor mit den Komponenten x, y ist. In (344b) eingesetzt, gibt das

$$|\mathfrak{N}| = \frac{1}{c^2}(\mathfrak{K}\mathfrak{u})\,|[\mathfrak{u}\mathfrak{r}]| = \beta^2 \mathfrak{K}_x' y' = \beta^2 l_0 |\mathfrak{K}'| \sin\alpha \cos\alpha,$$

was tatsächlich das Drehmoment (378) gerade aufhebt.

234a) *H. A. Lorentz,* Art. V 14 dieser Encykl., Nr. 7 u. 21a).

Eine analoge Überlegung läßt sich über den Fall des rechtwinkligen Hebels anstellen, für den die Existenz des Drehmomentes von *Lewis* und *Tolman*[235]) bemerkt und von *Laue*[236]) auf Grund des Satzes vom Impuls des Energiestromes geklärt wurde.

Denkt man sich die äußeren Kräfte, die auf den oben betrachteten Stab wirken, dadurch hervorgebracht, daß er an den Enden zwei kleine kugelförmige Ladungen trägt, so ist nur noch ein kleiner Schritt nötig, um zur *Trouton-Noble*schen Versuchsanordnung[237]) zu gelangen. Diese Physiker untersuchten, ob ein geladener Kondensator sich senkrecht zur Richtung der Erdbewegung einstellt. In einem Koordinatensystem, in welchem sich der Kondensator mit einer Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ in der Richtung der x-Achse bewegt, übt nämlich das elektromagnetische Feld im allgemeinen ein Drehmoment auf denselben aus.[238]) Es sei α' der Winkel der Plattennormale mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$, W' die Energiedichte, E' die elektrostatische Energie im mitbewegten System K'. Der Impuls im bewegten System berechnet sich nach (346). Da nun das Feld in K' bloß aus einem homogenen elektrostatischen Feld zwischen den Platten besteht, welches auf diesen senkrecht steht, so wird

$$\mathfrak{E}_x' = |\mathfrak{E}'| \cos\alpha', \quad \mathfrak{E}_y' = |\mathfrak{E}'| \sin\alpha'$$

und für S'_{xx} und S'_{xy} ergibt sich

$$S'_{xx} = W' - \mathfrak{E}_x'^2 = W'(1 - 2\cos^2\alpha'),$$
$$S'_{xy} = -\mathfrak{E}_x'\mathfrak{E}_y' = 2W' \sin\alpha' \cos\alpha'.$$

Setzt man dies in (346) ein, so folgt

$$(349) \qquad \begin{cases} \mathfrak{G}_x = \frac{u}{c^3}\frac{E'}{\sqrt{1-\beta^2}}(2 - 2\cos^2\alpha') = 2\frac{u}{c^2}\frac{E'}{\sqrt{1-\beta^2}}\sin^2\alpha', \\ \mathfrak{G}_y = -2\frac{u}{c^2}E'\sin\alpha'\cos\alpha' = -\frac{u}{c^2}E'\sin 2\alpha'. \end{cases}$$

Abgesehen von Gliedern höherer Ordnung ist also der Impuls zu den Platten parallel. Daraus folgt nach (344b) ein Drehmoment vom Betrag

$$(350) \qquad |\mathfrak{N}| = u\mathfrak{G}_y = \beta^2 E' \sin 2\alpha'.$$

Dennoch zeigt sich keine Drehung, wie nach dem Relativitätsprinzip von vornherein zu erwarten ist. Schon 1904 gab *H. A. Lo-*

235) *G. N. Lewis* und *C. Tolman*, Phil. Mag. 18 (1909), p. 510.

236) *M. v. Laue*, Phys. Ztschr. 12 (1911), p. 1008.

237) *F. T. Trouton* u. *H. R. Noble*, l. c. Anm. 6); siehe auch *H. A. Lorentz*, Art. V 14 dieser Encykl., Nr. 56c).

238) Vgl. für die folgende Ableitung *M. v. Laue*, Das Relativitätsprinzip, 1. Aufl., Braunschweig 1911, p. 99.

rentz[239]) dafür die richtige Erklärung, daß die elastischen Kräfte sich genau in derselben Weise transformieren wie die elektromotorischen. Tiefer geht die Auffassung von *Laue*[240]), wonach der Impuls des elastischen Energiestromes ein Drehmoment bewirkt, welches das elektromagnetische gerade aufhebt. *Laue*[241]) hat auch untersucht, wie das Drehmoment (350) im einzelnen zustande kommt. Dabei ist wesentlich, daß in K' neben den Kräften $|\mathfrak{K}_1'| = \frac{E'}{d}$ senkrecht zu den Platten noch auf jede Platte Kräfte senkrecht auf jeder Kante in Richtung der Plattenebene wirken. Sind die Platten Rechtecke mit

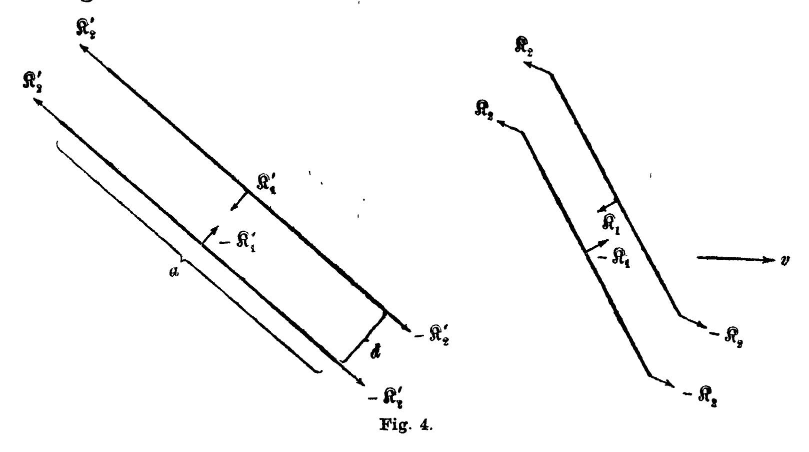


Fig. 4.

den Seiten a, b, so wirkt noch senkrecht auf die Kante b die Kraft $|\mathfrak{K}_2'| = \frac{1}{2}\frac{E'}{b}$, senkrecht auf die Kante a die Kraft $|\mathfrak{K}_3'| = \frac{1}{2}\frac{E'}{b}$. Sind die Kanten b senkrecht zur Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$, so braucht $\mathfrak{K}_3'$ nicht berücksichtigt zu werden. Die in den Systemen K' und K angreifenden Kräfte $\mathfrak{K}_1'$, $\mathfrak{K}_2'$ bzw. $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ werden durch Fig. 4 veranschaulicht.

Durch Transformation der Kräfte auf das System K folgt sofort das Drehmoment. Das Kräftepaar $\mathfrak{K}_1$ liefert die eine Hälfte des Drehmomentes, die beiden Kräftepaare $\mathfrak{K}_2$ die andere. Man verifiziert auch leicht die Ausdrücke (347) für den Impuls. Es ergibt sich

$$\int \mathfrak{f}_x' x' \, dV' = E'(\sin^2\alpha' - \cos^2\alpha')$$

$$\int \mathfrak{f}_y' x' \, dV' = 2E' \sin\alpha' \cos\alpha',$$

woraus wieder (349) folgt.

239) Art. V 14, Nr. 64, ferner Amst. Versl. l. c. Anm. 9).

240) *M. v. Laue,* Ann. d. Phys. 35 (1911), p. 524.

241) *M. v. Laue,* Ann. d. Phys. 38 (1912), p. 370.

Auch bei anderen Ladungsverteilungen als beim Kondensator oder bei zwei durch einen Stab verbundenen Punktladungen tritt ein Drehmoment auf, wenn sie sich gleichförmig bewegen, z. B. auch bei einem Ellipsoid.[242]) Eine Drehung kann dennoch nach dem Relativitätsprinzip niemals eintreten. Ist jedoch im mitbewegten System K' das Feld kugelsymmetrisch, dann ist in K der Impuls parallel $\mathfrak{u}$, und das Drehmoment verschwindet nach (344b). Es ist hier nämlich

$$\int S'_{xy}\,dV' = 0, \quad \int S'_{xx}\,dV' = \int S'_{yy}\,dV' = \int S'_{zz}\,dV',$$

und aus $S'_{xx} + S'_{yy} + S'_{zz} = W$ folgt dann noch, daß jedes der drei letzten Integrale gleich $\frac{1}{3}E'$ ist. Also ist hier nach (346)

$$(351) \qquad \mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{u}}{c^2}\frac{\frac{4}{3}E'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad E = \frac{E'\left(1+\frac{1}{3}\frac{u^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Über die Anwendungen dieser Beziehungen auf das einzelne Elektron vgl. Abschn. V.

45. **Hydrodynamik und Elastizitätstheorie.** Die relativistische Elastizitätstheorie ist historisch aus dem Bestreben entstanden, den Begriff des starren Körpers auch in der Relativitätstheorie nutzbar zu machen. Naturgemäß mußte man zuerst nach einer Definition des starren Körpers suchen, die gegenüber Lorentz-Transformationen invariant ist. Eine solche Definition wurde zuerst von *Born*[243]) aufgestellt. Ein Körper soll dann als starr gelten, wenn in dem Koordinatensystem K_0, in dem ein bestimmtes Volumelement des Körpers in dem betreffenden Augenblick ruht, das Volumelement undeformiert ist. Analytisch formuliert sich dies so: Wir charakterisieren die Strömung eines deformierbaren Mediums in der *Lagrange*schen Weise, indem wir die Koordinaten $x^1 \ldots x^4$ als Funktionen der Anfangskoordinaten $\xi^1 \ldots \xi^3$ und der Eigenzeit τ, oder besser der Symmetrie halber der Koordinate $\xi^4 = ic\tau$ angeben:

$$(352) \qquad x^k = x^k(\xi^1, \ldots \xi^4).$$

Das Weltlinienelement

$$ds^2 = \sum dx^{k^2}$$

zweier benachbarter Raumzeitpunkte wird dann eine quadratische Form in den Differentialen $d\xi^i$:

$$(353) \qquad ds^2 = A_{ik}\,d\xi^i\,d\xi^k.$$

Betrachten wir insbesondere diejenigen Weltpunkte, die für einen

---

242) *M. Abraham*, Ann. d. Phys. 10 (1903), p. 174 sowie Theorie der Elektrizität, 2, 1. Aufl. 1905, p. 170ff.

243) *M. Born*, Ann. d. Phys. 30 (1909), p. 1.

im betreffenden Moment mit dem Volumenelement mitbewegten Beobachter gleichzeitig sind — sie genügen der Gleichung

$$u_i dx^i = u_i \frac{\partial x^i}{\partial \xi^k} d\xi^k = 0 \tag{354}$$

(u_i = Vierergeschwindigkeit) —, so kann $d\xi^4$ aus (353) eliminiert werden, und das Linienelement ds^2 schreibt sich als quadratische Form der drei räumlichen Differentiale:

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{3} p_{ik} d\xi^i d\xi^k. \tag{355}$$

Die Abweichung der p_{ik} von ihren Anfangswerten charakterisiert die Deformation des Volumelementes. Für den starren Körper sollen diese Abweichungen stets verschwinden, also

$$\frac{\partial p_{ik}}{\partial \xi^4} = 0 \tag{356}$$

sein.

Eine einfache Betrachtung von *Ehrenfest*[244]) zeigte jedoch, daß ein derartiger Körper nicht in Rotation versetzt werden kann. Wäre dies nämlich möglich, so müßte sich bei diesem Vorgange einerseits wegen der Lorentz-Kontraktion der Umfang der Kreise, welche die Punkte des Körpers beschreiben, verkleinern, andererseits müßten ihre Radien, die stets auf der Geschwindigkeit senkrecht stehen, unverändert bleiben. Weiter haben unabhängig voneinander *Herglotz*[245]) und *Noether*[246]) bewiesen, daß ein im *Born*schen Sinne starrer Körper nur drei Freiheitsgrade hat im Gegensatz zu den sechs Freiheitsgraden des starren Körpers der alten Mechanik. Abgesehen von Ausnahmefällen ist die Bewegung des Körpers vollständig bestimmt, wenn die Bewegung eines einzigen seiner Punkte vorgegeben ist. Dies erweckte bereits starke Zweifel an der Möglichkeit, in die relativistische Mechanik einen starren Körper einzuführen.[247]) Die endgültige Klärung brachte eine Arbeit von *Laue*[248]), der durch eine ganz elementare Betrachtung bewies, daß die Zahl der kinematischen Freiheitsgrade eines Körpers nach der Relativitätstheorie keine beschränkte sein kann. Da nämlich keine Wirkung sich mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreiten kann, hat ein Anstoß, der einem Körper gleichzeitig

244) *P. Ehrenfest,* Phys. Ztschr. 10 (1909), p. 918.

245) *G. Herglotz,* Ann. d. Phys. 31 (1910), p. 393.

246) *F. Noether,* Ann. d. Phys. 31 (1910), p. 919.

247) Man vgl. dazu: *M. Born,* Phys. Ztschr. 11 (1910), p. 233; *M. Planck,* Phys. Ztschr. 11 (1910), p. 294; *W. v. Ignatowsky,* Ann. d. Phys. 33 (1910), p. 607; *P. Ehrenfest,* Phys. Ztschr. 11 (1910), p. 1127; *M. Born,* Gött. Nachr. 1910, p. 161.

248) *M. v. Laue,* Phys. Ztschr. 12 (1911), p. 85.

an n verschiedenen Stellen erteilt wird, stets *zunächst* eine Bewegung zur Folge, der mindestens n Freiheitsgrade zukommen.

Wenn also auch der Begriff des *starren Körpers* in der relativistischen Mechanik keinen Platz hat, so ist es doch nützlich und naturgemäß, den Begriff der *starren Bewegung* eines Körpers einzuführen. Man wird naturgemäß diejenigen Bewegungen starr nennen, bei denen die *Born*sche Bedingung (356) erfüllt ist. *Herglotz*[249]) hat dann eine relativistische Elastizitätstheorie entwickelt, die auf dem Gedanken beruht, daß immer dann Spannungen auftreten, wenn die *Born*sche Bedingung (356) verletzt ist. Die Bewegungsgleichungen werden aus einem Wirkungsprinzip

$$\delta \int \Phi \, d\xi_1 \dots d\xi_4 = 0 \tag{357}$$

abgeleitet, wo Φ eine Funktion der Deformationsgrößen $\dot{A}_{ik}$ ist. Sie ist so gewählt, daß Φ für den Fall der Ruhe genau so von den p_{ik} abhängt wie die *Lagrange*sche Funktion der gewöhnlichen Elastizitätstheorie. Die hieraus resultierenden Bewegungsgleichungen ordnen sich dem *Laue*schen Schema (340), (341) ein.

Es möge hier noch erwähnt werden, daß *Laue*[250]) zum Unterschied von den *absoluten* auch *relative* Spannungen einführt. Aus (341) folgt

$$\dot{\mathfrak{g}}_i = -\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial T_{ik}^k}{\partial x^k}. \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{358a}$$

Da hier auf der linken Seite die *lokale* und nicht die *substantielle* Änderung der Impulsdichte steht, geben die räumlichen Komponenten von T nicht die elastischen Spannungen an. Die substantielle Änderung $\dot{\underline{\mathfrak{g}}}_i$ der Impulsdichte ist nun bestimmt durch

$$\dot{\underline{\mathfrak{g}}}_i = \dot{\mathfrak{g}}_i + \sum_1^3 \frac{\partial}{\partial x^k} (\mathfrak{g}_i \mathfrak{u}_k),$$

also wird

$$\dot{\underline{\mathfrak{g}}}_i = -\sum_1^3 \frac{\partial \overline{T}_i^k}{\partial x^k}, \tag{358b}$$

mit

$$\overline{T}_{ik} = T_{ik} - \mathfrak{g}_i u_k. \qquad (i, k = 1, 2, 3) \tag{359}$$

Es ist zu beachten, daß die relativen Spannungen $\overline{T}_{ik}$ nicht symme-

249) *G. Herglotz*, Ann. d. Phys. 36 (1911), p. 493.

250) *M. v. Laue*, l. c. Anm. 228), ferner: Das Relativitätsprinzip, Braunschweig 1911, § 26. — In der Elektrodynamik bewegter Korper hatte schon früher *M. Abraham* in genau analoger Weise relative Spannungen eingeführt [Rend. Pal. 28 (1909), p. 1].

trisch sind. Die Transformationsgesetze für dieselben lauten einfach

$$(360)\quad \begin{cases} \overline{T}_{xx} = T^0_{xx}, & \overline{T}_{yy} = T^0_{yy}, & \overline{T}_{zz} = T^0_{zz}, \\ \overline{T}_{xy} = \dfrac{T^0_{xy}}{\sqrt{1-\beta^2}}, & \overline{T}_{xy} = \dfrac{T^0_{xz}}{\sqrt{1-\beta^2}}, & \overline{T}_{yz} = T^0_{yz}, \\ \overline{T}_{yx} = \sqrt{1-\beta^2}\, T^0_{yx}, & \overline{T}_{zx} = \sqrt{1-\beta^2}\, T^0_{zx}, & \overline{T}_{zy} = T^0_{zy}. \end{cases}$$

Zum Unterschied von den entsprechenden Relationen für die absoluten Spannungen kommt hier die Energiedichte W_0 nicht vor. Ist speziell im Ruhsystem der (dreidimensionale) Spannungstensor ein Skalar

$$T^0_{ik} = p_0 \delta_i^k, \qquad (i,k = 1, 2, 3)$$

so gilt auch

$$\overline{T}_{ik} = p_0 \delta_i^k.$$

Der skalare Druck ist eine Invariante:

$$(361)\qquad p = p_0.$$

Es folgt dies auch schon direkt aus den Transformationsformeln für Kraft und Flächengröße, wenn man den Druck als Kraft pro Flächeneinheit definiert.[251]) [Vgl. auch das in Nr. 37d) über die Invarianz des Lichtdruckes Gesagte.]

Eine verhältnismäßig einfache Form nehmen die Bewegungsgleichungen bei Flüssigkeiten an, wo der dreidimensionale Spannungstensor zu einem Skalar degeneriert. Mit diesem Spezialfall beschäftigten sich außer *Herglotz*[252]) *Ignatowsky*[253]) und *Lamla*[254]); die Resultate dieser Autoren stimmen überein. Bedeutet μ_0 die Ruhmassendichte, p den Druck, P wie in der Hydrodynamik üblich das Integral $\int \frac{dp}{\mu_0}$ und beschränken wir uns auf adiabatische Vorgänge, so ist der Impuls-Energietensor gegeben durch

$$(362)\qquad T_i^k = \mu_0\left(1 + \frac{P}{c^2}\right) u_i u^k + p\delta_i^k.$$

Aus den Gleichungen

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0$$

folgt dann zunächst durch skalare Multiplikation mit u^i die Kontinuitätsgleichung

$$(363)\qquad \frac{\partial \mu_0 u^k}{\partial x^k} = 0$$

---

251) *A. Einstein,* Jahrb. f. Rad. u. El. 4 (1907), p. 441, § 13; *A. Sommerfeld,* Ann. d. Phys. 32 (1910), p. 775. Zum erstenmal ausgesprochen bei *M. Planck,* l. c. Anm. 225).

252) *G. Herglotz,* l. c. Anm. 249).

253) *W. v. Ignatowsky,* Phys. Ztschr. 12 (1911), p. 441.

254) *E. Lamla,* Berl. Diss. 1911; Ann. d. Phys. 37 (1912), p. 772.

und hernach die Bewegungsgleichung

$$(364) \qquad \mu_0 \left(1 + \frac{p}{c^2}\right) \frac{d u_i}{d \tau} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x^i} + u_i \frac{d}{d \tau} \frac{p}{c^2}\right).$$

Im Fall der Ruhe gibt T_0^0 den gewöhnlichen Ausdruck für die Energiedichte.

Die besprochenen Überlegungen haben nur den Wert, daß sie die *Möglichkeit* einer widerspruchsfreien relativistischen Hydrodynamik und Elastizitätstheorie zeigen. In physikalischer Hinsicht bringen sie nichts Neues. Denn für Substanzen, in denen die Geschwindigkeit der elastischen Wellen klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit ist, unterscheiden sich die Gleichungen der relativistischen Elastizitätstheorie praktisch nicht von denen der gewöhnlichen.

Sowohl *Herglotz* wie *Lamla* folgern aus ihren Gleichungen, daß es für die Kompressibilität eine untere Grenze geben muß, weil sonst die elastischen Wellen sich mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreiten würden. Es scheint uns jedoch, daß das Relativitätsprinzip über die Größe der Kohäsionskräfte gar nichts aussagen kann. Rückt die statische Kompressibilität in die Nähe der von *Herglotz* und *Lamla* angegebenen Grenze, so werden wohl die phänomenologischen Gleichungen unrichtig werden. Es wird dann zu einer *Dispersion* der elastischen Wellen kommen, und die Verhältnisse werden sich ähnlich gestalten wie es in Nr. 36d) für die Lichtwellen besprochen wurde.

d) Thermodynamik und Statistik.

46. Das Verhalten der thermodynamischen Zustandsgrößen bei einer Lorentz-Transformation. Wie sich die thermodynamischen Zustandsgrößen beim Übergang zu einem bewegten Koordinatensystem transformieren, wurde von *Planck*[255]) in seiner grundlegenden Arbeit über die Dynamik bewegter Systeme hergeleitet. Er geht dabei aus von einem Variationsprinzip. Man kann aber, wie *Einstein*[256]) gezeigt hat, die Transformationsformeln auch direkt herleiten; das Variationsprinzip ergibt sich dann als Folgerung.

Wir stellen zuerst die Relationen für Volumen, Druck, Energie und Bewegungsgröße nochmals zusammen, wobei wir annehmen, daß die elastischen Spannungen bloß aus einem skalaren Druck bestehen:

$$(7a) \qquad V = V_0 \sqrt{1 - \beta^2},$$

255) *M. Planck,* l. c. Anm. 225). Vgl. auch die Arbeit von *F. Hasenöhrl,* Wien. Ber. 116 (1907), p. 1391, der unabhängig von *Planck* auf anderem Wege zu ähnlichen Resultaten gelangte.

256) *A. Einstein,* Jahrb. f. Rad. u. El. 4 (1907), p. 411, § 15, 16.

(361)
$$p = p_0,$$

(346a)
$$\begin{cases} \mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{u}}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (E_0 + p_0 V_0) \\ E = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(E_0 + \frac{u^2}{c^2} p_0 V_0 \right). \end{cases}$$

Daraus folgt noch

(346b)
$$E + p V = \frac{E_0 + p_0 V_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{u}}{c^2} (E + p V).$$

Wir müssen nun noch die entsprechenden Relationen für Wärmemenge, Temperatur und Entropie ableiten. Ist dQ die zugeführte Wärme, dA die von äußeren Kräften am System geleistete Arbeit, so ist

(365)
$$\begin{cases} dQ = dE - dA, \\ dA = -p dV + \mathfrak{u} d\mathfrak{G}. \end{cases}$$

Der zweite Term ist wesentlich, er verschwindet nach (346) auch dann nicht, wenn die Geschwindigkeit des Systems bei der Zustandsänderung konstant bleibt, was im folgenden angenommen werden soll. Man erhält

$$dQ = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} dE_0 + \frac{\frac{u^2}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} d(p_0 V_0) - \frac{u^2}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} [dE_0 + d(p_0 V_0)]$$
$$+ \sqrt{1-\beta^2} p_0 dV_0$$
$$= \sqrt{1-\beta^2} (dE_0 + p_0 dV_0) = \sqrt{1-\beta^2} dQ_0,$$

also

(366)
$$Q = Q_0 \sqrt{1-\beta^2}.$$

Diese Bestimmung stimmt überein mit der früher abgeleiteten Transformation für die Joulesche Wärme [vgl. (293)].

Erteilt man einem System eine Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$, so kann dies als ein adiabatischer Vorgang aufgefaßt werden. Die *Entropie* bleibt dabei also unverändert, sie ist für ein bewegtes System ebenso groß wie für ein ruhendes: daß heißt aber, sie ist eine *Invariante* gegenüber Lorentz-Transformationen.

(367)
$$S = S_0.$$

Wird eine Wärmemenge dQ unendlich langsam zugeführt, so ist

$$dQ = T dS.$$

Aus (366) und (367) folgt daraus sofort

(368)
$$T = T_0 \sqrt{1-\beta^2}.$$

Die angegebenen Relationen gestatten, zu jeder Beziehung zwischen den Zustandsgrößen p_0, V_0, E_0, $\mathfrak{G}_0$, T_0 im ruhenden System die entsprechende Beziehung zwischen den Zustandsgrößen im be-

wegten System anzugeben. Insbesondere kann die Abhängigkeit der Zustandsgleichung einer Substanz von ihrer Geschwindigkeit ermittelt werden.

47. Prinzip der kleinsten Wirkung. In der alten Thermodynamik kann man die Zustandsgleichung aus dem Wirkungsprinzip[257])

$$\int_{t_1}^{t_2} \{\delta(-F+E_{\text{kin.}})+\delta A\}\,dt=0$$

bestimmen, wo F die freie Energie bedeutet:

$$F=E-TS.$$

Unabhängige Variable sind die Lagenkoordinaten des Systems, Volumen und Temperatur. δA bedeutet dabei die bei der Variation dieser Parameter geleistete Arbeit. Bei Änderung der unabhängigen Variablen ändert sich die zu variierende Funktion in bekannter Weise. Die Wirkungsfunktion

$$L=-F+E_{\text{kin.}}$$

zerfällt hier in zwei Teile, von denen der eine bloß von der Geschwindigkeit, der andere nur vom inneren Zustand (V, T) des Körpers abhängt. Auch in der relativistischen Mechanik existiert eine solche Wirkungsfunktion. Sie läßt sich jedoch nicht in dieser Weise in zwei Teile zerlegen. In der Tat wird für

$$L=-E+TS+(\mathfrak{u}\mathfrak{G}) \tag{369}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\mathfrak{K}_x, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}=\mathfrak{K}_y, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}=\mathfrak{K}_z,\\ &\frac{\partial L}{\partial V}=p, \quad \frac{\partial L}{\partial T}=S. \end{aligned}\right. \tag{370}$$

Aus $dE=(\mathfrak{K}d\mathfrak{r})-pdV+TdS=(\mathfrak{u}d\mathfrak{G})-pdV+TdS$ folgt nämlich

$$dL=(\mathfrak{G}d\mathfrak{u})+pdV+SdT.$$

(370) sind aber gerade die aus dem Wirkungsprinzip folgenden Gleichungen. Wir bemerken auch noch, daß nach (318a, b) und (325) für den materiellen Punkt

$$L=-E_{\text{kin.}}+(\mathfrak{u}\mathfrak{G})$$

zu setzen ist, was als Spezialfall von (369) betrachtet werden kann. Im mitbewegten Koordinatensystem K_0 wird L mit der (negativen) freien Energie identisch $L_0=-E_0+T_0S_0$. Nach (346), (367), (368) gilt ferner für L die Transformationsformel

$$L=\sqrt{1-\beta^2}\,L_0, \tag{371}$$

das Wirkungsintegral $\int L\,dt$ ist also eine Invariante, wie es sein muß.

257) *H. v. Helmholtz*, Crelles J. 100 (1886), p. 137 und 213 [Ges. Abh. 3 (1895), p. 225].

48. Die Anwendung der relativistischen Mechanik auf die Statistik. Im Raum der kanonischen Variablen p_k, q_k (vgl. Nr. **40**) gilt der *Liouville*sche Satz

$$dp_1 \dots dq_N = dp_1^0 \dots dq_N^0, \tag{372}$$

da er eine unmittelbare Folge der *Hamilton*schen Gleichungen ist. Er gilt natürlich auch in einem Raum von anderen Variablen $x_1 \dots x_{2N}$, die aus den kanonischen durch eine Substitution von der Funktionaldeterminante 1 hervorgehen:

$$dx_1 \dots dx_{2N} = dx_1^0 \dots dx_{2N}^0. \tag{372a}$$

Die allgemeinen Theoreme der Statistik haben keine andere Voraussetzung als den *Liouville*schen Satz, bleiben also in der auf der relativistischen Mechanik basierenden Statistik unverändert bestehen.[258]) Wir formulieren sie so:

1. Die Energie sei als Funktion der Variablen $x_1 \dots x_{2N}$ — von denen im folgenden stets vorausgesetzt wird, daß sie die Bedingung (372a) befriedigen — gegeben durch

$$H(x_1, \dots x_{2N}) = E. \tag{373}$$

Dann ist die *Entropie* gegeben durch

$$S = k \log V, \tag{374}$$

wo V das von der Energiefläche $H = E$ oder auch das von der Energieschale $E < H < E + dE$ eingeschlossene Volumen bedeutet:

$$V = \int\limits_{H<E} dx_1 \dots dx_{2N} \quad \text{oder auch} \quad V = \int\limits_{E<H<E+dE} dx_1 \dots dx_{2N}. \tag{375}$$

2. Die *freie Energie* $F = E - TS$ ist gegeben durch

$$\begin{cases} F = -kT \log Z \\ Z = \int e^{-\frac{H}{kT}} dx_1 \dots dx_{2N}. \end{cases} \tag{376}$$

3. *Gleichverteilungssatz:* Es sind die zeitlichen Mittelwerte

$$\overline{x_i \frac{\partial H}{\partial x_i}} = kT, \text{ für alle } i \text{ von } 1, \dots 2N; \quad \overline{x_i \frac{\partial H}{\partial x_j}} = 0 \text{ für } i \neq j, \tag{377}$$

insbesondere für kanonische Variable

$$\overline{p_i \dot{q}_i} = kT, \quad \overline{q_i \frac{\partial H}{\partial q_i}} = kT. \tag{377a}$$

Hier ist gegenüber der gewöhnlichen Mechanik ein Unterschied vorhanden. In dieser ist nämlich $E_{\text{kin.}} = \frac{1}{2} \sum p_i \dot{q}_i$, so daß die erste Gleichung (377a) einfach aussagt, daß die zeitlichen Mittelwerte der-

258) Von denjenigen Modifikationen der statistischen Theoreme, die durch die Quantentheorie gefordert werden, sehen wir ab.

jenigen Anteile der kinetischen Energie, die den einzelnen Freiheitsgraden entsprechen, untereinander gleich und gleich $\frac{1}{2}kT$ sind. *In der relativistischen Mechanik geht der Zusammenhang des Gleichverteilungssatzes mit der mittleren kinetischen Energie verloren.*

4. *Maxwell-Boltzmannsches Verteilungsgesetz:* Die Energiefunktion H unseres Systems zerfalle in zwei Teile

$$H = H_1(x_1 \ldots x_{2n}) + H_2(X_1 \ldots X_{2N}), \tag{378}$$

die von verschiedenen Variablen abhängen. Die Zahl $2n$ der Variablen des ersten Teiles sei viel kleiner als die Zahl $2N$ der Variablen des zweiten Teiles. Ferner sollen beide Variablengruppen unabhängig voneinander aus verschiedenen kanonischen Variablen durch eine Substitution der Funktionaldeterminante 1 hervorgehen. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die ersten Variablen ungeachtet der Werte der zweiten Variablen innerhalb des durch $dx_1 \ldots dx_{2n}$ bezeichneten Spielraums bestimmte vorgegebene Werte $x_1 \ldots x_{2n}$ annehmen, gegeben durch

$$w(x_1 \ldots x_{2n})\,dx_1 \ldots dx_{2n} = A e^{-\frac{H_1(x)}{kT}}\,dx_1 \ldots dx_{2n}. \tag{379}$$

Die von den x unabhängige Größe A ist aus der Bedingung

$$\int w(x_1 \ldots x_{2n})\,dx_1 \ldots dx_{2n} = 1 \tag{379a}$$

zu bestimmen. Voraussetzung des Verteilungsgesetzes (379) ist, daß der Wert H_1 klein ist gegenüber dem (konstanten) Wert von H.

49. Spezialfälle. α) *Die Strahlung im bewegten Hohlraum.* Dieser Fall hat ein historisches Interesse, da er allein auf Grund der Elektrodynamik, auch ohne Relativitätstheorie, behandelt werden kann. Man kommt dann notwendig dazu, der bewegten Strahlungsenergie Impuls, also auch träge Masse zuzuschreiben. Es ist interessant, daß dieses Resultat schon vor Aufstellung der Relativitätstheorie von *Hasenöhrl*[259]) gefunden wurde. Seine Schlüsse waren allerdings in einigen Punkten verbesserungsbedürftig. Eine vollständige Lösung des Problems gab zuerst *K. v. Mosengeil*[260]). *Planck*[261]) leitet seine Formeln für die Dynamik bewegter Systeme mehrfach durch Verallgemeinerung der *Mosengeil*schen Ergebnisse her.

Die Relativitätstheorie gestattet, die Abhängigkeit von Strahlungsdruck, Bewegungsgröße, Energie und Entropie von der Temperatur

---

259) *F. Hasenöhrl,* Wien. Ber. 113 (1904), p. 1039; Ann. d. Phys. 15 (1904), p. 344 und 16 (1905), p. 589.

260) *K. v. Mosengeil,* Berl. Diss. 1906; Ann. d. Phys. 22 (1907), p. 867; vgl. auch die Darstellung bei *M. Abraham,* Theorie der Elektrizität, 2, 2. Aufl., p. 44.

261) *M. Planck,* l. c. Anm. 225).

sowie die Abhängigkeit der spektralen Verteilung von Temperatur und Richtung sofort anzugeben, indem sie den Fall des bewegten Hohlraumes auf den des ruhenden zurückführt. Für letzteren gilt

(380a) $$E_0 = aT_0^4 V_0, \quad p_0 = \tfrac{1}{3}aT_0^4, \quad S_0 = \tfrac{4}{3}aT_0^3 V_0$$

und nach (369):

$$L = \tfrac{1}{3}aT_0^4 V_0,$$

endlich für die Intensität der Strahlung im Frequenzbereich $d\nu$ und im Kegel $d\Omega$:

(381a) $$\mathfrak{K}_0\nu_0 d\nu_0 d\Omega_0 = \frac{2h}{c^2}\frac{\nu_0^3 d\nu_0}{e^{\frac{h\nu_0}{kT_0}}-1} d\Omega_0.$$

Nach den Formeln der Nr. 46 folgt daraus zunächst

(380b) $$\begin{cases} E = E_0\dfrac{1+\frac{1}{3}\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = aT^4 V\dfrac{1+\frac{1}{3}\beta^2}{(1-\beta^2)^3}, \\ p = p_0 = \dfrac{1}{3}aT^4\dfrac{1}{(1-\beta^2)^2}, \quad S = S_0 = \dfrac{4}{3}aT^3V\dfrac{1}{(1-\beta^2)^2}, \\ L = \sqrt{1-\beta^2}\,L_0 = \dfrac{1}{3}aT^4V\dfrac{1}{(1-\beta^2)^2}, \\ \mathfrak{G} = \dfrac{\mathfrak{u}}{c^2}\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\dfrac{4}{3}E_0 = \dfrac{4}{3}aT^4V\dfrac{1}{(1-\beta^2)^3}\dfrac{\mathfrak{u}}{c^2}. \end{cases}$$

Um auch noch die spektrale Verteilung im bewegten Hohlraum zu ermitteln, bedienen wir uns der aus (15), (17) und (253) leicht abzuleitenden Beziehungen

$$\nu' = \nu\frac{1-\beta\cos\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad d\nu' = d\nu\frac{1-\beta\cos\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$d\Omega' = \frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\alpha)^2}d\Omega,$$

$$\mathfrak{K}'_{\nu'}d\nu' d\Omega' = \mathfrak{K}_\nu d\nu d\Omega\frac{(1-\beta\cos\alpha)^2}{1-\beta^2}.$$

Letztere Größe muß sich nämlich wie das Quadrat der Amplitude A transformieren. Es folgt daraus weiter

$$\mathfrak{K}_\nu' = \mathfrak{K}_\nu\frac{(1-\beta\cos\alpha)^3}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}},$$

also

(381b) $$\mathfrak{K}_\nu d\nu d\Omega = \frac{2h}{c^2}\frac{\nu^3 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}(1-\beta\cos\alpha)}-1}d\Omega.$$

Weiter gilt wegen

$$\mathfrak{K}'_{\nu'}d\nu' = \mathfrak{K}_\nu d\nu\frac{(1-\beta\cos\alpha)^4}{1-\beta^2}$$

(382) $$K = \frac{ac}{4\pi}T^4\frac{1}{(1-\beta\cos\alpha)^4}.$$

Diese Formel gibt die Abhängigkeit der gesamten (über alle Fre-

quenzen integrierten) Strahlungsintensität von der Richtung an. Man erhält sie natürlich auch aus (381 b) durch Integration über $d\nu$. Die Gesamtenergie ergibt sich aus (382) vermöge der Beziehung

$$E = V\int \frac{1}{c} K d\Omega$$

in Übereinstimmung mit der ersten Gl. (380 b).

Eine Möglichkeit, die Trägheit der Strahlungsenergie experimentell nachzuweisen, scheint wegen des äußerst kleinen Betrages der zu erwartenden Effekte nicht zu bestehen.

β) *Das ideale Gas.* Eine Abweichung des Verhaltens des idealen Gases von dem nach der alten Mechanik berechneten infolge von relativistischen Effekten (Massenveränderlichkeit) ist naturgemäß erst zu erwarten, wenn die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle mit der Lichtgeschwindigkeit vergleichbar wird. Maßgebend dafür ist die Größe

$$(383) \qquad \sigma = \frac{m_0 c^2}{kT}.$$

Bei normalen Temperaturen ist sie enorm groß, erst bei ca. 1 Billion Grad wird sie von mäßiger Größenordnung. Die Frage nach den von der relativistischen Mechanik geforderten Abweichungen des idealen Gases von seinem klassischen Verhalten hat deshalb nicht praktisches, sondern bloß theoretisches Interesse. Sie wurde von *Jüttner*[262]) beantwortet. Am einfachsten gelangt man durch Berechnung der freien Energie nach Theorem 2, Nr. 48 zum Ziel. Da die Energie eines Massenpunktes durch die Impulse ausgedrückt

$$E = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{1}{m_0^2 c^2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}$$

lautet, folgt

$$F = -RT \log \bar{Z},$$

$$\bar{Z} = Z^{\frac{1}{L}} = V \cdot \iiint e^{-\frac{m_0 c^2}{kT}\sqrt{1 + \frac{1}{m_0^2 c^2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}}\, dp_x\, dp_y\, dp_z.$$

Dabei ist angenommen, daß die vorhandene Gasmenge gleich 1 Mol ist; L bedeutet die *Loschmidt*sche Zahl für das Mol, V das Molvolumen. Die Ausrechnung ergibt

$$(384) \qquad \begin{cases} \bar{Z} = V m_0^3 c^3 \cdot 2\pi^2 (-i) \dfrac{H_2^{(1)}(i\sigma)}{\sigma}, \\ F = -RT\left\{\log V + \log\left(-\dfrac{i H_2^{(1)}(i\sigma)}{\sigma}\right) + \text{konst.}\right\}. \end{cases}$$

[$H_n^{(i)}$ bedeutet die *Hankel*sche Zylinderfunktion i^{ter} Art von der n^{ten} Ordnung mit $i = 1, 2$.]

262) *F. Jüttner*, Ann. d. Phys. 34 (1911), p. 856.

Alle anderen thermodynamischen Größen folgen aus der freien Energie in bekannter Weise, z. B.

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V}, \quad E = F - T\frac{\partial F}{\partial T} = -T^2 \frac{\partial}{\partial T}\frac{F}{T}$$

(unabhängige Variable V, T). Aus der ersten Gleichung folgt

$$p = \frac{RT}{V}. \tag{385}$$

Die Zustandsgleichung des idealen Gases bleibt in der relativistischen Mechanik unverändert bestehen. Es hängt dies damit zusammen, daß die Abhängigkeit der freien Energie und des Zustandsintegrals Z vom Volumen durch die relativistische Mechanik nicht modifiziert wird, was man auch a priori sofort einsehen kann. Anders ist es mit der Abhängigkeit der Energie von der Temperatur. Es ergibt sich

$$E = RT\left\{1 - \frac{iH_2'^{(1)}(i\sigma)}{H_2^{(1)}(i\sigma)}\sigma\right\}. \tag{386}$$

Für großes σ kann man die *Hankel*sche Zylinderfunktion durch ihre asymptotische Darstellung

$$-iH_2^{(1)}(i\sigma) = \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi\sigma}}$$

ersetzen. Durch logarithmisches Differenzieren folgt daraus

$$-\frac{iH_2'^{(1)}(i\sigma)}{H_2^{(1)}(i\sigma)} = 1 + \frac{1}{2\sigma},$$

was in (386) eingesetzt, gibt:

$$E = RT(\sigma + \tfrac{3}{2}) = Lmc^2 + \tfrac{3}{2}RT, \tag{386a}$$

in Übereinstimmung mit der alten Theorie, wie es sein muß. Man hätte den Ausdruck (386) für die Energie auch aus dem *Maxwell*schen Geschwindigkeitsverteilungsgesetz entnehmen können. Nach Theorem 4, Nr. 48 unterscheidet sich dieses nur durch die Art der Abhängigkeit des Faktors A von der Temperatur von dem Verteilungsgesetz der alten Mechanik.

Jüttner[263]) hat auch den Einfluß der *Bewegung* eines idealen Gases auf seine thermodynamischen Eigenschaften vom Standpunkt der relativistischen Dynamik aus untersucht. Die entsprechenden Beziehungen lassen sich auf Grund der Transformationsformeln der Nr. 46 sofort anschreiben. Das ideale Gas erweist sich als noch viel ungünstiger zur experimentellen Prüfung des Satzes von der Trägheit der Energie als der mit schwarzer Strahlung erfüllte Hohlraum.

---

263) *F. Jüttner,* Ann. d. Phys. 35 (1911), p. 145.

IV. Allgemeine Relativitätstheorie.

50. Historisches bis zu Einsteins Arbeit von 1916.[264]) Das Newtonsche Gravitationsgesetz, das eine *momentan* in die Ferne wirkende Kraft fordert, ist mit der speziellen Relativitätstheorie unvereinbar. Diese fordert eine Ausbreitung, die höchstens mit Lichtgeschwindigkeit erfolgt[265]), und Kovarianz der Gravitationsgesetze gegenüber Lorentz-Transformationen. Schon *Poincaré*[266]) befaßte sich mit der Aufgabe, das Newtonsche Gravitationsgesetz so abzuändern, daß diese Forderungen erfüllt sind. Es kann dies auf mehrere Weisen geschehen. Allen Ansätzen ist gemeinsam, daß die Kraft zweier Massenpunkte aufeinander nicht von ihren *gleichzeitigen*, sondern von den um die Zeit $t = \frac{r}{c}$ verschiedenen Lagen sowie von ihren Geschwindigkeiten (evtl. auch Beschleunigungen) abhängen. Die Abweichungen vom Newtonschen Gesetz sind immer von 2. Ordnung in $\frac{v}{c}$, bleiben also stets sehr klein und widersprechen der Erfahrung nicht.[266a]) *Minkowski*[267]) und *Sommerfeld*[268]) haben die *Poincaré*schen Ansätze auf eine dem vierdimensionalen Vektorkalkül entsprechende Form gebracht; ein spezielles Gesetz diskutiert *H. A. Lorentz*[268a]).

Gegen alle diese Betrachtungen ist einzuwenden, daß sie vom Elementargesetz für die Kraft ausgehen statt von der *Poisson*schen Differentialgleichung. Ist einmal die endliche Ausbreitung einer Wirkung erwiesen, so darf man nur dann erwarten, auf *einfache* allgemeingültige Gesetze zu kommen, wenn man sie durch kontinuierlich in Ort und Zeit variierende Zustandsgrößen (ein *Feld*) beschreibt und die *Differentialgleichungen* dieses Feldes aufsucht. Das Problem be-

264) Über die älteren Versuche, das Newtonsche Gravitationsgesetz abzuändern, vgl. man die Artikel von *J. Zenneck*, V 2, und *S. Oppenheim*, VI 2, 22, insbes. Abschn. V. Wir geben die historische Entwicklung nur in großen Umrissen; wegen mancher Einzelheiten sei auch auf den Artikel von *F. Kottler*, VI 2, 22 verwiesen.

265) Nimmt man an, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gravitationswirkungen vom Bewegungszustand der Körper, von denen diese Wirkungen ausgehen, unabhängig ist, so folgt sogar, daß sie *exakt* gleich der Vakuumlichtgeschwindigkeit sein muß.

266) *H. Poincaré*, Rend. Pal., l. c. Anm. 11).

266a) Genauere Diskussion bei *W. de Sitter*, Monthly Not. 71 (1911), p. 388.

267) *H. Minkowski*, III, 1, c. Anm. 54).

268) *A. Sommerfeld*, Ann. d. Phys. 33, l. c. Anm. 55).

268a) *H. A. Lorentz*, Phys. Ztschr. 11 (1910), p. 1234; sowie Das Relativitätsprinzip, 3 Haarlemer Vorträge, p. 19.

stand also darin, die *Poisson*sche Gleichung

$$\Delta \Phi = 4\pi k \mu_0$$

und die Bewegungsgleichung des Massenpunktes

$$\frac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2} = - \operatorname{grad} \Phi$$

so abzuändern, daß sie gegenüber Lorentz-Transformationen invariant werden.

Bevor dieses Problem gelöst wurde, schlug die Entwicklung jedoch bereits einen anderen Weg ein. Als die physikalischen Folgerungen der speziellen Relativitätstheorie bis zu einem gewissen Abschluß gelangt waren, machte *Einstein*[269]) sofort den Versuch, das Relativitätsprinzip auch auf anders als gleichförmig translatorisch bewegte Bezugssysteme auszudehnen. Auch in anderen Systemen als den Galileischen (Nr. 2) sollten die allgemeinen Naturgesetze ihre Form behalten. Die Möglichkeit hierzu bietet das sogenannte *Äquivalenzprinzip.* In der Newtonschen Theorie ist ein in einem homogenen Schwerefeld befindliches System in *mechanischer* Hinsicht vollständig gleichwertig einem gleichförmig beschleunigten Bezugssystem.[269a]) Die Forderung, daß auch alle anderen Vorgänge sich in beiden Systemen in gleicher Weise abspielen sollen, bildet den Inhalt des *Einstein*schen Äquivalenzprinzips, das einen Grundpfeiler der von ihm später entworfenen allgemeinen Relativitätstheorie bildet (vgl. Nr. **51**). Da man den Ablauf der Vorgänge in einem beschleunigten System durch Rechnung ermitteln kann, gibt es zugleich die Möglichkeit, den Einfluß eines homogenen Schwerefeldes auf irgendeinen Vorgang zu ermitteln. Dies ist die heuristische Kraft des Äquivalenzprinzips. Auf diese Weise leitete *Einstein* das Resultat ab, daß Uhren an Orten niedrigeren Gravitationspotentials langsamer gehen als an Orten höheren Gravitationspotentials, und wies bereits darauf hin, daß dies eine Verschiebung der auf der Sonne emittierten Spektrallinien gegenüber den irdischen nach Rot zur Folge hat (vgl. Nr. **53**b). Ferner ergab sich, daß die Lichtgeschwindigkeit im Schwerefeld veränderlich ist, die Lichtstrahlen infolgedessen gekrümmt sein müssen, sowie daß jeder Energie E nicht nur eine *träge*, sondern auch eine *schwere* Masse $m = \frac{E}{c^2}$ zugeschrieben werden müsse. In einer folgenden Arbeit zeigte

---

269) *A. Einstein,* Jahrb. f. Rad. u. El. 4 (1907), p. 411, Kap. V.

269a) Streng genommen ist die gleichförmig beschleunigte Bewegung durch eine Hyperbelbewegung (Nr. 26) zu ersetzen, weshalb die Transformationsformeln für die Koordinaten komplizierter werden. Siehe darüber *H. A. Lorentz,* Haarlemer Vorträge, p. 36 und *P. Ehrenfest,* Amst. Proc. 15 (1913), p. 1187.

Einstein[270]), daß die Krümmung der Lichtstrahlen eine Verschiebung der am Sonnenrande gesehenen Fixsterne zur Folge hat, die einer Prüfung durch die Erfahrung zugänglich ist. Den Betrag der Verschiebung berechnete er damals zu 0,83 Bogensekunden.

Diese Theorie des homogenen Gravitationsfeldes bedeutete eine Durchbrechung des Rahmens der speziellen Relativitätstheorie. Wegen der Abhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit und der Ganggeschwindigkeit einer Uhr vom Gravitationspotential ist hier die in Nr. 4 eingeführte Definition der Gleichzeitigkeit nicht mehr durchführbar, und die Lorentz-Transformation verliert ihren Sinn. *Von diesem Standpunkt aus kann also die spezielle Relativitätstheorie nur bei Abwesenheit von Gravitationsfeldern richtig sein.* Nach Einführung des Gravitationspotentials als physikalische Zustandsgröße wird man dann die Naturgesetze vielmehr als Beziehungen zwischen den übrigen physikalischen Größen und dem Gravitationspotential auffassen und ihre Kovarianz fordern gegenüber einer umfassenderen Gruppe von Transformationen, bei der das Gravitationspotential in geeigneter Weise mittransformiert wird. Es war nun die Aufgabe, eine solche auf dem Äquivalenzprinzip fußende Theorie auch für nicht homogene Gravitationsfelder aufzustellen. *Einstein* und *Abraham*[271]) versuchten, das allgemeine statische Gravitationsfeld zu charakterisieren durch den Wert der Lichtgeschwindigkeit c in jedem Raum-Zeitpunkt, die zugleich die Rolle des Gravitationspotentials spielt, und suchten Differentialgleichungen zu finden, denen c genügen muß. Abgesehen davon, daß diese Theorien nur spezielle Gravitationsfelder in Betracht ziehen, führten sie auch sonst auf Schwierigkeiten.

Es wurde deshalb von *Nordström*[272]) der Versuch gemacht, an der strengen Gültigkeit des speziellen Relativitätsprinzips konsequent festzuhalten: In seiner Theorie ist die Lichtgeschwindigkeit konstant, eine Strahlenablenkung im Schwerefeld findet nicht statt. Sie löst das früher skizzierte Problem, die *Poisson*sche Gleichung und die Be-

270) *A. Einstein,* Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes, Ann. d. Phys. 35 (1911), p. 898; auch in der Sammlung „Das Relativitätsprinzip", 3. Aufl. 1920, enthalten.

271) *A. Einstein,* Ann. d. Phys. 38 (1912), p. 355, 443; *M. Abraham,* Phys. Ztschr. 13 (1912), p. 1, 4, 793; Diskussion zwischen *Einstein* und *Abraham,* Ann. d. Phys. 38 (1912), 1056, 1059; 39 (1912), p. 444, 704.

272) *G. Nordström,* Phys. Ztschr. 13 (1912), p 1126; Ann. d. Phys. 40 (1913) p. 856; 42 (1913), p. 533; 43 (1914), p. 1101; Finska Vetensk. Verh. 57 (1914 u. 1915); ferner *M. Behacker,* Phys. Ztschr. 14 (1913), p. 989; *A. Einstein* u. *A. D. Fokker,* Ann. d. Phys. 44 (1914), p. 321. Zusammenfassende Darstellung bei *M. v. Laue,* Jahrb. f. Rad. u. El. 14 (1917), p. 263, sowie das Referat über alle älteren Gravitationstheorien bei *M. Abraham,* Jahrb. f. Rad. u. El. 11 (1914), p. 470.

wegungsgleichung des Massenpunktes auf eine gegenüber Lorentz-Transformationen kovariante Form zu bringen, in logisch vollkommen einwandfreier Weise. Auch wird dem Impuls-Energiesatz sowie dem Satz von der Gleichheit der schweren und trägen Masse genügt. Wenn sie dennoch nicht akzeptiert wird, so geschieht dies erstens deshalb, weil sie dem *allgemeinen* Relativitätsprinzip nicht genügt (oder jedenfalls nicht in einfacher und natürlicher Weise genügt, vgl. Nr. **56**), und zweitens, weil sie der Erfahrung widerspricht: sie liefert keine Krümmung der Lichtstrahlen und eine Perihelbewegung des Merkur mit verkehrtem Vorzeichen. (Hinsichtlich der Rotverschiebung stimmt sie mit der *Einstein*schen Theorie überein.) Auch *Mie*[273]) hat eine Gravitationstheorie aufgestellt, die auf dem speziellen Relativitätsprinzip fußt. Da sie aber dem Satz von der Gleichheit der trägen und schweren Masse nicht *streng* genügt, hatte sie immer nur eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit für sich.

Einstein ließ sich jedoch in seinem Bestreben, den Naturgesetzen eine solche Gestalt zu geben, daß sie gegenüber einer möglichst umfassenden Gruppe von Transformationen kovariant werden, durch die Schwierigkeiten des Problems nicht irre machen. In einer gemeinsam mit *Großmann* ausgeführten Arbeit[274]) gelang es ihm, in dieser Richtung einen wesentlichen Fortschritt zu erzielen. Wenn man das Quadrat des Linienelements auf beliebige krummlinige Raum-Zeitkoordinaten transformiert, so wird es eine quadratische Form der Koordinatendifferentiale mit 10 Koeffizienten g_{ik} (vgl. Nr. **51**). Das Gravitationsfeld wird jetzt durch diesen Zehnertensor der g_{ik}, nicht mehr durch die skalare Lichtgeschwindigkeit bestimmt. Zugleich wurden die Bewegungsgleichung des materiellen Punktes, der Impuls-Energiesatz und die elektromagnetischen Feldgleichungen für das Vakuum durch Einführung der g_{ik} auf die endgültige, *allgemein* kovariante Form gebracht.[275]) Nur die damals aufgestellten Differentialgleichungen der g_{ik} selbst waren nicht allgemein kovariant. In einer folgenden Arbeit[276]) suchte *Einstein*

273) *G. Mie,* Ann. d. Phys. 40 (1913), p. 1, V. Kap. Gravitation; Elster-Geitel-Festschr. 1915, p. 251.

274) *A. Einstein* u. *M. Großmann*, Ztschr. Math. Phys. 63 (1914), p. 215. Zusammenfassender Vortrag: *A. Einstein,* Zum gegenwärtigen Stand des Gravitationsproblems, Phys. Ztschr. 14 (1913), p. 1249; anschließende Diskussion *Mie, Einstein, Nordström:* Phys. Ztschr. 15 (1914), p. 115, 169, 176, 375.

275) Es ist interessant, daß ohne Zusammenhang mit der Gravitationstheorie die betreffenden formalen Entwickelungen sowie die Schreibweise der elektromagnetischen Feldgleichungen in allgemein kovarianter Form schon vorher von *F. Kottler,* Wien. Ber. 121 (1912), p. 1659, angegeben wurden.

276) *A. Einstein,* Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, Berl. Ber. 1914, p. 1030.

diese Differentialgleichungen eingehender zu begründen und glaubte sogar einen Beweis dafür gefunden zu haben, daß die Gleichungen, welche die g_{ik} selbst bestimmen, nicht allgemein kovariant sein können. Im Jahre 1915 erkannte er jedoch, daß die invariantentheoretischen Forderungen, die er früher an seine Feldgleichungen der Gravitation stellte, diese gar nicht eindeutig festlegen. Um die Möglichkeiten einzuschränken, kam er auf die Forderung der allgemeinen Kovarianz zurück, die er früher „nur schweren Herzens verlassen hatte". Im Anschluß an die *Riemann*sche Krümmungstheorie gelang es ihm nun in der Tat, auch für die g_{ik} selbst allgemein kovariante Gleichungen aufzustellen, die allen physikalischen Anforderungen entsprechen[277]) (vgl. Nr. **56**). In einer weiteren Mitteilung[278]) konnte er zeigen, daß seine Theorie die Perihelbewegung des Merkur quantitativ richtig erklärt und eine Krümmung der Lichtstrahlen im Gravitationsfeld der Sonne fordert, die doppelt so groß ist, wie er sie früher auf Grund des Äquivalenzprinzips für *homogene* Felder abgeleitet hatte. Bald darauf erschien *Einsteins* abschließende Arbeit „Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie".[279]) Im folgenden sollen nun die Prinzipien und der weitere Ausbau dieser Theorie dargelegt werden.

51. Allgemeine Formulierung des Äquivalenzprinzips. Zusammenhang zwischen Gravitation und Metrik. Das Äquivalenzprinzip wurde ursprünglich nur für *homogene* Schwerefelder aufgestellt. Im allgemeinen Fall läßt es sich so formulieren: *Es gibt für ein unendlich kleines Weltgebiet (d. h. ein so kleines Weltgebiet, daß die örtliche und zeitliche Variation der Schwere in ihm vernachlässigt werden kann) stets ein solches Koordinatensystem $K_0(X_1, X_2, X_3, X_4)$, in welchem ein Einfluß der Schwere weder auf die Bewegung von Massenpunkten noch auf irgendwelche anderen physikalischen Vorgänge vorhanden ist.* Kurz gesagt, in einem unendlich kleinen Weltgebiet läßt sich jedes Schwerefeld wegtransformieren. Das lokale Koordinatensystem

277) *A. Einstein,* Berl. Ber. 1915, p. 778, 799, 844. — Gleichzeitig wie *Einstein* und unabhängig davon hat auch *Hilbert* die allgemein kovarianten Feldgleichungen aufgestellt [*D. Hilbert,* Grundlagen der Physik, 1. Mitt.; Gött. Nachr. 1915, math.-nat. Kl., p. 395]. Seine Darstellung dürfte jedoch aus zwei Gründen bei den Physikern wenig Anklang finden. Erstens wird die Existenz eines Variationsprinzips als Axiom eingeführt und zweitens, was noch schwerwiegender ist, werden die Feldgleichungen nicht für ein beliebiges materielles System abgeleitet, sondern speziell unter Zugrundelegung der (im Abschn. V näher besprochenen) *Mie*schen Theorie der Materie. Auf die anderen Ergebnisse der *Hilbert*schen Arbeit kommen wir noch in Nr. **56** und **57** zurück.

278) *A. Einstein,* Berl. Ber. 1915, p. 831.

279) *A. Einstein,* Ann. d. Phys. 49 (1916), p. 769. Auch separat als Broschüre erschienen und in der Sammlung „Das Relativitätsprinzip".

K_0 kann man sich realisiert denken durch einen frei schwebenden, hinreichend kleinen Kasten, der keinen äußeren Kräften außer der Schwere unterworfen ist und dieser folgend frei fällt.

Es ist klar, daß dieses Wegtransformieren nur deshalb möglich ist, weil das Schwerefeld die fundamentale Eigenschaft hat, allen Körpern dieselbe Beschleunigung zu erteilen; oder, was nur ein anderer Ausdruck dafür ist, weil die schwere und die träge Masse stets gleich sind. Diese Aussage ruht nun auf sehr sicheren experimentellen Grundlagen. *Eötvös*[280]) wies bei einer Untersuchung der Frage, ob die Richtung der Resultierenden aus Erdanziehung und Zentrifugalkraft der Erdrotation vom Material abhängt, nach, daß schwere und träge Masse mit einem Genauigkeitsgrade von $\frac{1}{10^8}$ gleich sind. Im Hinblick auf den Satz von der Trägheit der Energie ist ferner eine Untersuchung von *Southerns*[281]) von Interesse, in der gezeigt wird, daß das Verhältnis zwischen Masse und Gewicht bei Uranoxyd von dem entsprechenden Verhältnis bei Bleioxyd höchstens um $\frac{1}{2 \cdot 10^5}$ verschieden ist. Aus dem Äquivalenzprinzip folgt nämlich im Verein mit dem Satz von der Trägheit der Energie, daß *jeder Energieform* auch ein *Gewicht* zuzuschreiben ist. Hätte nun die beim radioaktiven Zerfall von Uran freiwerdende innere Energie zwar Trägheit aber kein Gewicht, so müßte das genannte Verhältnis einen Unterschied von $\frac{1}{26\,000}$ aufweisen. *Eötvös*[280]) fand dies bestätigt, wobei sich die Genauigkeit noch erheblich steigern ließ.

Es ist offenbar naturgemäß anzunehmen, daß in K_0 die spezielle Relativitätstheorie gilt. Alle Sätze dieser Theorie sollen also bestehen bleiben, nur muß an Stelle des Galileischen Koordinatensystems der Nr. 2 das für einen unendlich kleinen Bereich definierte System K_0 treten. Alle Systeme K_0, die durch Lorentz-Transformationen auseinander hervorgehen, sind gleichberechtigt. In diesem Sinne kann man also sagen, daß die Invarianz der physikalischen Gesetze gegenüber Lorentz-Transformationen im Unendlichkleinen fortbesteht. Wir können nun zwei unendlich benachbarten Punktereignissen eine bestimmte durch Messungen ermittelbare Zahl, ihren Abstand ds, zuordnen. Hierzu brauchen wir nur das Schwerefeld wegzutransformieren und dann in K_0 die Größe

$$ds^2 = dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 - dX_4^2 \tag{387}$$

280) *R. Eötvös*, Math. u. naturw. Ber. aus Ungarn 8 (1890), p. 65; *R. Eötvös, D. Pekár* u. *E. Fekete,* Abh. der XVI. allgemeinen Konferenz der internat. Erdmessung 1909; vgl. auch Gött. Nachr. 1909, geschäftliche Mitteilungen p. 37 und *D. Pekár,* Naturw. 7 (1919), p. 327.

281) *L. Southerns,* Proc. Roy. Soc. A 84 (1910), p. 325.

zu bilden.[282]) *Die Koordinalendifferentiale $dx_1 \ldots dx_4$ sind dabei unmittelbar mit dem Einheitsmaßstab und der Einheitsuhr zu bestimmen.* Wir betrachten nun irgendein anderes Koordinatensystem K, in welchem die Zuordnung der Koordinatenwerte $x^1 \ldots x^4$ zu den Weltpunkten — abgesehen von der Bedingung der Eindeutigkeit und Stetigkeit -- eine ganz beliebige sei. Dann werden an jeder Raumzeitstelle die zugehörigen Differentiale dX_i linear-homogene Ausdrücke in den dx^k sein, und das Linienelement ds^2 geht über in eine quadratische Form

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k, \tag{388}$$

deren Koeffizienten g_{ik} Funktionen der Koordinaten sind. Es ist ferner klar, daß beim Übergang zu neuen Koordinaten die g_{ik} sich so transformieren, daß ds^2 invariant bleibt. Die Verhältnisse sind also völlig analog zu denjenigen, die in der Geometrie nichteuklidischer, mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten auftreten (Nr. **15**). Das System K_0 im frei schwebenden Kasten übernimmt die Rolle des geodätischen Systems der Nr. **16**; in ihm sind die g_{ik} konstant, solange ihre *zweiten* Differentiale vernachlässigt werden können und das Linienelement hat bis auf Größen *zweiter* Ordnung die Form (387). Die Gesamtheit der Werte der g_{ik} in allen Weltpunkten wollen wir das *G-Feld* nennen.

Das Bewegungsgesetz eines Massenpunktes, der keinen anderen Kräften als der Gravitation ausgesetzt ist, läßt sich nun einfach so formulieren. *Die Weltlinie eines solchen Massenpunktes ist eine geodätische Linie* (Nr. **17**), und es gilt nach (81) und (80):

$$\delta \int ds = 0, \tag{81}$$

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{rs} \frac{dx^r}{ds} \frac{dx^s}{ds} = 0, \tag{80}$$

wo Γ^i_{rs} durch (66) und (69) definiert ist. Im System K_0 bewegt sich nämlich der Massenpunkt im betreffenden Augenblick geradlinig-gleichförmig, $\frac{d^2 X^i}{ds^2} = 0$, was zugleich das Gleichungssystem der geodätischen Linie in K_0 ist. Die Aussage, die Weltlinie des Massenpunktes ist eine geodätische Linie, ist aber invariant, also gilt sie allgemein. (Dabei ist allerdings angenommen, daß im Bewegungsgesetz für den Massenpunkt die *zweiten* Ableitungen der g_{ik} nach den Koordinaten nicht auftreten.) Die Gültigkeit dieses einfachen Satzes ist nicht verwunder-

282) Zum Unterschied von den anderen Autoren geben wir auch in der allgemeinen Relativitätstheorie dem Linienelement 3 positive und *eine* negative Dimension, nicht umgekehrt. Dies ist auch beim Vergleich der im folgenden vorkommenden Formeln mit den üblichen zu berücksichtigen.

lich. Wir haben eben das Linienelement schon so definiert, daß die Weltlinie eines Massenpunktes eine geodätische wird. Wir sehen also: *Die 10 Tensorkomponenten g_{ik} übernehmen in der Einsteinschen Theorie die Rolle des skalaren Newtonschen Potentials Φ; die aus ihren Ableitungen gebildeten Komponenten Γ^i_{rs} bestimmen die Größe der Schwerkraft.*

Eine genau analoge Betrachtung läßt sich für die Lichtstrahlen durchführen. Im System K_0 sind die Lichtstrahlen gerade Linien[282a]) und erfüllen außerdem die Relation

$$dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 - dX_4^2 = 0.$$

Also sind die Weltlinien der Lichtstrahlen allgemein geodätische Nulllinien (Nr. 22):

$$\frac{d^2x^i}{d\lambda} + \Gamma^i_{rs}\frac{dx^r}{d\lambda}\frac{dx^s}{d\lambda} = 0, \tag{80a}$$

$$ds^2 = g_{ik}\,dx^i dx^k = 0. \tag{81a}$$

Kretschmann[283]) und *Weyl*[284]) haben überdies gezeigt, daß schon die Beobachtung der Ankunft von Lichtsignalen genügt, um das G-Feld in einem bestimmten Koordinatensystem zu ermitteln, auch ohne daß die Bewegung von Massenpunkten herangezogen wird.

Es gibt jedoch noch eine dritte Art, das G-Feld zu messen. Man kann mit Hilfe von Maßstäben (oder besser von Maßfäden) und Uhren bei einem bestimmten gegebenen Koordinatensystem die Abhängigkeit der Größe ds des Linienelementes von den Koordinatendifferentialen dx^k auf allen von einem beliebig herausgegriffenen Punkte ausgehenden Weltlinien bestimmen. Das G-Feld folgt daraus unmittelbar. *Es charakterisiert also nicht nur das Gravitationsfeld, sondern auch das Verhalten von Maßstäben und Uhren, die Maßverhältnisse (Metrik) der vierdimensionalen Welt, welche die Geometrie des gewöhnlichen dreidimensionalen Raumes als Spezialfall enthält.* Diese Verschmelzung zweier vorher vollständig getrennter Gebiete — Metrik und Gravitation — muß als die schönste Leistung der allgemeinen Relativitätstheorie bezeichnet werden. Wie wir gesehen haben und wie auch an einfachen Beispielen erläutert werden kann, ist sie eine zwingende Konsequenz des Äquivalenzprinzips und der Gültigkeit der speziellen Relativitätstheorie im Unendlichkleinen. Es kann jetzt die Bewegung eines Massenpunktes unter dem alleinigen Einfluß eines Gravitationsfeldes auch so aufgefaßt

---

282a) Dabei ist natürlich angenommen, daß wir uns im Gültigkeitsbereich der geometrischen Optik befinden. Sobald Beugung vorhanden ist, trifft dies nicht zu. Vgl. dazu auch Anm. 310a) unten.

283) *E. Kretschmann*, Ann. d. Phys. 53 (1917), p. 575.

284) *H. Weyl*, Raum — Zeit — Materie, 1. Aufl. (1918), p. 182; 3. Aufl. (1919), p. 194.

werden: Die Bewegung des Massenpunktes ist *kräftefrei*. Sie ist deshalb nicht geradlinig-gleichförmig, weil das vierdimensionale Raum-Zeit-Kontinuum *nichteuklidisch* ist und in einem solchen die geradlinig-gleichförmge Bewegung keinen Sinn hat und durch die Bewegung auf der geodätischen Linie zu ersetzen ist. Entsprechend ist das Galileische Trägheitsgesetz durch

$$\delta\int ds = 0$$

zu ersetzen. Dieses hat vor jenem den großen Vorzug, daß es *allgemein* kovariant ist. Die Gravitation ist in der *Einstein*schen Theorie genau so eine *Scheinkraft* wie die Coriolis- und Zentrifugalkraft in der *Newton*schen Theorie. (Man kann die Sache allerdings mit dem gleichen Recht auch so auffassen, daß in der *Einstein*schen Theorie keine von beiden Kräften als Scheinkraft zu bezeichnen ist.) Daß sich erstere im allgemeinen nicht in endlichen Bereichen wegtransformieren läßt, diese aber wohl, tut nichts zur Sache. In unendlich kleinen Bereichen läßt sich die Gravitation stets wegtransformieren, und das allein ist entscheidend. Daß der nichteuklidische Charakter der Raum-Zeitwelt sich im Verhalten der Maßstäbe und Uhren nur äußerst wenig, in der Abweichung der Bewegung der Massenpunkte von der geradlinig-gleichförmigen, das ist in der Gravitation, sehr stark äußert, liegt an der Größe der Lichtgeschwindigkeit, wie wir in Nr. **53** sehen werden.

Durch die Verschmelzung von Gravitation und Metrik findet nicht nur das Gravitationsproblem, sondern auch das Problem der Geometrie eine befriedigende Lösung. Die Fragen nach der Wahrheit der geometrischen Sätze und nach der tatsächlich im Raum herrschenden Geometrie sind sinnlos, solange sich die Geometrie nur mit Gedankendingen und nicht mit den Gegenständen der Erfahrungswelt beschäftigt. Fügt man jedoch den Sätzen der Geometrie die Definition hinzu, daß als Länge einer (unendlich kleinen) Strecke, die mit einem starren Stab oder Maßfaden in bekannter Weise ermittelte Zahl gelten soll, so wird die Geometrie zu einem Zweig der Physik, und die genannten Fragen bekommen einen bestimmten Sinn.[284a]) Hier gestattet nun die allgemeine Relativitätstheorie sofort eine allgemeine Aussage zu machen: Da die Gravitation von der Materie bestimmt wird, müssen wir dasselbe auch für die Geometrie postulieren. *Die Geometrie des Raumes ist nicht a priori gegeben, sondern wird erst durch die Materie bestimmt.* (Wie dies im einzelnen geschieht, wird in Nr. **56** dargelegt.) Eine

---

284a) *A. Einstein,* Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie, 1. Aufl., Braunschweig 1917, p. 2.

ähnliche Auffassung hatte schon *Riemann.*[285]) Sie konnte jedoch damals nur ein kühnes Projekt bleiben, denn die Ermittelung des Zusammenhanges zwischen Geometrie und Gravitation ist nur möglich, wenn die metrische Zusammengehörigkeit von Raum und Zeit bereits erkannt ist.

52. Das Postulat der allgemeinen Kovarianz der Naturgesetze. Dieses Postulat ist es, welches den eigentlichen Antrieb zur allgemeinen Relativitätstheorie gegeben hat und welchem diese ihren Namen verdankt. Es hat verschiedene Wurzeln. Erstens sind beliebig bewegte Bezugssysteme *kinematisch* vollkommen gleichwertig, und dies legt die Vermutung nahe, daß die Gleichwertigkeit auch in dynamischer und physikalischer Hinsicht zutreffe. A priori ist das natürlich nicht beweisbar, nur der Erfolg kann lehren, ob die Vermutung richtig ist.

Es ist jedoch leicht einzusehen, daß man sich nicht damit begnügen kann, *beliebig bewegte* Bezugssysteme einzuführen. Wie *Einstein*[286]) am Beispiel des rotierenden Bezugssystems zeigt, können in den nicht Galileischen Systemen Zeit und räumliche Entfernungen nicht einfach mit der Uhr und dem starren Einheitsmaßstab bestimmt werden; die euklidische Geometrie muß aufgegeben werden. Es bleibt also nichts übrig, als alle denkbaren Koordinatensysteme zuzulassen. Die Koordinaten sind als völlig willkürliche Parameter aufzufassen, die den Weltpunkten irgendwie in eindeutiger und stetiger Weise zugeordnet werden (*Gauß*sches Koordinatensystem). Daß eine solche Beschreibung der Welt ausreichend ist, geht aus folgender Überlegung *Einsteins*[287]) hervor. Alle physikalischen Messungen laufen auf die Konstatierung von raum—zeitlichen Koinzidenzen hinaus; außer diesen Koinzidenzen ist nichts beobachtbar. Entsprechen aber in *einem* Gaußschen Koordinatensystem zwei Punktereignissen dieselben Koordinaten, so ist dies auch in jedem anderen Gaußschen Koordinatensystem der Fall. Wir müssen also das Relativitätspostulat erweitern: *Die allgemeinen Naturgesetze sollen auf eine solche Form gebracht werden, daß sie in jedem Gaußschen Koordinatensystem gleichlauten, d. h. gegenüber beliebigen Transformationen der Koordinaten kovariant sind.*[287a])

---

285) *Riemann,* Habilitationsvortrag, l. c. Anm. 65).

286) *A. Einstein,* Ann. d. Phys. 49 l. c. Anm. 279).

287) *A. Einstein,* l. c. Anm. 286) und 279). Vgl. dazu auch *E. Kretschmann,* Ann. d. Phys. 48 (1915), 907 und 943.

287a) *P. Lenard,* Über Relativitätsprinzip, Äther, Gravitation, Leipzig 1918; 2. Aufl. 1920. Siehe auch die Nauheimer Diskussion, Phys. Ztschr. 21 (1920), p. 666) erhebt Bedenken gegen die Benützung so allgemeiner Koordinatensysteme und gegen die Realität von Gravitationsfeldern, die nach *Einsteins* Theorie in ihnen auftreten würden. Ref. kann sich diesen Bedenken nicht anschließen.

Diese Kovarianz wird dadurch ermöglicht, daß die g_{ik} in die physikalischen Gesetze eingefügt werden. (Mathematisch gesprochen: Die allgemeinen Naturgesetze gestatten *nach Adjunktion der invarianten quadratischen Form*

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k$$

beliebige Punkttransformationen.) In der Tat kann jedes Gesetz der speziellen Relativitätstheorie nach dem im Abschnitt II angegebenen Schema durch formale Einführung der g_{ik} allgemein kovariant gemacht werden, wie in Nr. **54** noch an einzelnen Beispielen gezeigt werden wird. Es ist deshalb von *Kretschmann*[288]) die Ansicht vertreten worden, daß das Postulat der allgemeinen Kovarianz überhaupt nichts über den physikalischen *Inhalt* der Naturgesetze aussagt, sondern bloß etwas über ihre mathematische *Formulierung;* und *Einstein*[289]) stimmte dieser Ansicht durchaus zu. Einen physikalischen Inhalt bekommt die allgemein kovariante Formulierung der Naturgesetze erst durch das Äquivalenzprinzip, welches zur Folge hat, daß die Gravitation durch die g_{ik} *allein* beschrieben wird, und daß diese nicht unabhängig von der Materie gegeben, sondern selbst durch Feldgleichungen bestimmt sind. Erst deshalb können die g_{ik} als *physikalische Zustandsgrößen* bezeichnet werden.[290]) Das Postulat der allgemeinen Kovarianz hat jedoch, wie *Einstein*[289]) betont hat, auch noch eine andere Bedeutung. Die Differentialgleichungen des G-Feldes selbst werden so zu bestimmen sein, daß sie vom Standpunkt der allgemeinen Kovariantentheorie möglichst einfach und durchsichtig sind. Diese heuristische Seite des Kovarianzpostulates hat sich aufs beste bewährt (Nr. **56**).

Es ist versucht worden, trotz der allgemeinen Kovarianz das Koordinatensystem in gewisser Weise zu normieren. Insbesondere beschäftigen sich Untersuchungen von *Kretschmann*[288]) und *Mie*[291]) mit dieser Frage. Es scheinen jedoch alle vorgeschlagenen Normierungen nur in Spezialfällen möglich bzw. von praktischer Bedeutung zu sein. Im allgemeinen Falle und bei prinzipiellen Fragen ist die allgemeine Kovarianz unentbehrlich.

53. Einfache Folgerungen aus dem Äquivalenzprinzip. a) *Die Bewegungsgleichungen des Massenpunktes bei langsamen Geschwindigkeiten*[292]) *und schwachen Gravitationsfeldern.* Die Bewegungsgleichung

288) *E. Kretschmann,* Ann. d. Phys. 53, l. c. Anm. 283).

289) *A. Einstein,* Ann. d. Phys. 55 (1918), p. 241.

290) *H. Weyl,* Raum — Zeit — Materie, 1. Aufl. 1918, p. 180, 181; 3. Aufl. 1919, p. 192, 193.

291) *G. Mie,* Ann. d. Phys. 62 (1920), p. 46.

292) Vgl. dazu *A. Einstein,* Ann. d. Phys. 49, l. c. Anm. 279), § 21.

(80) für den Massenpunkt läßt eine beträchtliche Vereinfachung zu, wenn die *Geschwindigkeit* des Massenpunktes *klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit ist*, so daß Größen von der Ordnung $\frac{v^2}{c^2}$ vernachlässigt werden können. Es werde überdies vorausgesetzt, daß das *Gravitationsfeld schwach* ist. Das heißt, die g_{ik} sollen nur äußerst wenig von ihren Normalwerten

$$g_{ik} = +1, \quad \text{für} \quad i = k = 1, 2, 3, \quad g_{44} = -1$$
$$g_{ik} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k$$

abweichen, so daß die Quadrate dieser Abweichungen vernachlässigt werden können. Es wird dann

$$\frac{d^2 x^i}{d t^2} = -c^2 \Gamma^i_{44} \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3, x^4 = ct. \tag{389}$$

Außerdem sei das Feld statisch oder quasistatisch, so daß auch die zeitlichen Ableitungen der g_{ik} vernachlässigt werden können. Dann kann für Γ^i_{44} gesetzt werden $\Gamma_{i,44}$ oder auch $-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^i}$, und *die Bewegungsgleichungen* (389) *gehen in die Newtonschen über:*

$$\frac{d^2 x^i}{d t^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}, \tag{399}$$

wenn man setzt

$$\Phi = -\frac{1}{2} c^2 (g_{44} + 1), \quad g_{44} = -1 - \frac{2\Phi}{c^2}. \tag{391}$$

Die zunächst unbestimmte additive Konstante im Potential Φ ist hier so festgelegt, daß Φ verschwindet, wenn g_{44} seinen Normalwert -1 annimmt.

Es ist interessant, daß bei der hier angewandten Näherung in die Bewegungsgleichungen nur g_{44} eingeht, obwohl die Abweichungen der übrigen g_{ik} von ihren Normalwerten von derselben Größenordnung sein können wie die von g_{44}. Auf diesem Umstand beruht die Möglichkeit, das Gravitationsfeld näherungsweise durch ein *skalares* Potential zu beschreiben.

b) *Die Rotverschiebung der Spektrallinien.* Der eben erwähnte Umstand hat auch zur Folge, daß über den Einfluß des Gravitationsfeldes auf Uhren eine allgemeine Aussage gemacht werden kann, auch wenn die Gesetze des *G*-Feldes noch nicht gegeben sind, denn dieser Einfluß ist durch g_{44} bestimmt. Über das Verhalten der Maßstäbe kann dagegen eine derartige Aussage erst gemacht werden, wenn die übrigen g_{ik} bekannt sind.

Man denke sich ein relativ zum Galileischen System K_0 mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierendes Bezugssystem K. Eine in K ruhende Uhr geht dann wegen des transversalen Dopplereffektes um so langsamer, je weiter sie von der Drehungsachse entfernt ist, wie sofort

erhellt, wenn man den Vorgang vom System K_0 aus betrachtet. Die Zeitdilatation ist gegeben durch

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\,\omega^2 r^2}}.$$

Der mitrotierende Beobachter in K wird diese Zeitverkürzung nicht als transversalen Dopplereffekt deuten, da ja die Uhr relativ zu ihm ruht. Aber es herrscht in K ein Gravitationsfeld (Zentrifugalkraftfeld) vom Potential

$$\Phi = -\tfrac{1}{2}\,\omega^2 r^2.$$

Der Beobachter in K wird also zu dem Schluß kommen, daß die Uhren um so langsamer gehen, je kleiner das Gravitationspotential an der betreffenden Stelle ist. Und zwar ist die Zeitdilatation Δt in erster Näherung gegeben durch

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 + \frac{2\Phi}{c^2}}} \sim \tau\left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right), \quad \frac{\Delta t}{\tau} = -\frac{\Phi}{c^2}.$$

Einstein[293]) führte eine analoge Betrachtung für gleichförmig beschleunigte System durch. Transversaler Dopplereffekt und Zeitdilatation durch Gravitation erscheinen demnach als zwei verschiedene Ausdrucksweisen desselben Sachverhalts, daß nämlich eine Uhr stets die Eigenzeit

$$\tau = \frac{1}{ic}\int ds$$

anzeigt.

Allgemein unterscheidet sich die Zeit $t = \frac{x^4}{c}$ von der normalen Eigenheit τ einer ruhenden Uhr. Denn das Weltlinienelement einer ruhenden Uhr ist

$$ds^2 = g_{44}(dx^4)^2,$$

also nach (39c):

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{-g_{44}}} = \frac{\tau}{\sqrt{1 + \frac{2\Phi}{c^2}}} \sim \tau\left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right), \quad \frac{\Delta t}{\tau} = -\frac{\Phi}{c^2}. \tag{392}$$

Die Gleichung (392) hat folgenden physikalischen Inhalt: Versetzt man eine von zwei ruhenden, gleich beschaffenen, ursprünglich synchron gehenden Uhren eine Zeitlang in ein Gravitationsfeld, so gehen sie nachher nicht mehr synchron, sondern die Uhr, die im Gravitationsfeld war, geht nach. Hierauf beruht auch, wie *Einstein*[294]) bemerkt hat, die Aufklärung des in Nr. 5 erwähnten Uhrenparadoxons. Im Koordinatensystem K^*, in welchem die Uhr U_2 dauernd ruht, herrscht

---

293) *A. Einstein,* Ann. d. Phys. 35, l. c. Anm. 270).

294) *A. Einstein,* Naturw. 6 (1918), p. 697.

während der Bremsungsperiode ein Gravitätsfeld, welches der Beobachter in K^* für das Nachgehen der ruhenden Uhr U_2 verantwortlich machen kann.

Die Beziehung (392) hat eine wichtige Konsequenz, die sich durch die Erfahrung prüfen läßt. Man kann den Uhrentransport auch durch einen Lichtstrahl besorgen lassen, indem man als Uhr den Schwingungsvorgang des Lichtes annimmt. Ist nämlich das Gravitationsfeld statisch, so kann man immer die Zeitkoordinate so festlegen, daß die g_{ik} von ihr nicht abhängen. Dann muß die Zahl der Wellen eines Lichtstrahles zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 ebenfalls von der Zeit unabhängig sein, und daher ist dann die Frequenz des Lichtstrahles mit der angegebenen Zeitskala gemessen in P_1 und P_2 dieselbe, also vom Ort unabhängig.[295] Dagegen ist die in Eigenzeit gemessene Frequenz vom Ort abhängig. Beobachtet man also eine auf der Sonne erzeugte Spektrallinie auf der Erde, so muß ihre Frequenz zufolge (392) gegenüber den entsprechenden terrestrischen nach Rot verschoben sein, und zwar um den Betrag

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{\Phi_E - \Phi_S}{c^2}, \tag{393}$$

worin Φ_E den Wert des Gravitätspotentials auf der Erde, Φ_S den auf der Sonnenoberfläche bedeutet. Die numerische Ausrechnung gibt

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = 2{,}12 \cdot 10^{-6} \tag{393a}$$

entsprechend einem Dopplereffekt von $0{,}63\ \frac{\text{km}}{\text{sec}}$.

Es sind sehr zahlreiche Versuche gemacht worden, diese Beziehung experimentell zu prüfen. Schon *Jewell*[296] fand Verschiebungen von Spektrallinien der Sonne nach Rot, deutete sie jedoch als Druckeffekte. Als *Evershed*[297] später nachwies, daß die Verschiebung mit der experimentell bestimmten Druckverschiebung nicht übereinstimmt, lag es nahe, den Einsteineffekt zur Erklärung heranzuziehen.[298] Es zeigt sich jedoch bei genauerer Prüfung, daß die verschiedenen Linien um verschiedene Beträge verschoben erscheinen, so daß der Einsteineffekt jedenfalls nicht ausreicht, um alle Einzelheiten der Erscheinung zu erklären. Viel besser geeignet zur Prüfung der Einsteinschen Theorie sind die neueren Beobachtungen an der Stickstoffbande $\lambda = 3883$ Å (sogenannte Cyan-

295) *M. v. Laue*, Phys. Ztschr. 21 (1920), p. 659, hat dies durch direktes Ausrechnen auf Grund der Wellengleichung des Lichtes bestätigt.

296) *L. E. Jewell*, Astroph. J. 3 (1896), p. 89.

297) *J. Evershed*, Kodaik. Obs. Bull. 36, 1914.

298) *A. Einstein*, Ann. d. Phys. 35, l. c. Anm. 270); *E. Freundlich*, Phys. Ztschr. 15 (1914), p. 369.

bande). Diese zeichnet sich nämlich dadurch aus, daß sie keinen merklichen Druckeffekt zeigt. Der Vergleich der Absorptionslinien dieser Bande im Sonnenspektrum mit den entsprechenden terrestrischen Emissionslinien wurde zuerst von *Schwarzschild*[299]) und hernach mit größerer Genauigkeit von *St. John*[300]) am Mount-Wilson-Observatorium sowie von *Evershed* und *Royds*[301]) vorgenommen. Diese Autoren fanden alle eine wesentlich kleinere Verschiebung der Linien, als von der Theorie gefordert wird, *St. John* stellte sogar fast überhaupt keine Verschiebung fest. Es schien deshalb eine Zeit lang die Theorie durch das Experiment widerlegt zu sein.[302]) In einer Reihe von neueren Untersuchungen haben jedoch *Grebe* und *Bachem*[303]) darauf hingewiesen, daß die gemessenen Verschiebungen bei verschiedenen Linien ganz verschiedene Werte haben und sodann durch Ausmessen der Linien mit dem registrierenden *Koch*schen Mikrophotometer bewiesen, daß die Übereinanderlagerung verschiedenen Linien im Sonnenspektrum die Ursache dieses zunächst sehr merkwürdig erscheinenden Umstandes ist. *Bei den ungestörten Linien ergaben sich nun Verschiebungen, die innerhalb der Beobachtungsfehler mit dem theoretischen Wert* (393a) *übereinstimmen.* Allerdings sind nur verhältnismäßig wenige Linien ungestört. Kürzlich fand jedoch *Grebe*[304]), daß auch der Mittelwert der Verschiebungen aus 100 gestörten und ungestörten Linien der genannten Stickstoffbande der Theorie entspricht. *Perot*[304a]) untersuchte ebenfalls diese Bande auf Rotverschiebung und fand ein positives Resultat. Doch kann man diesem keine große Beweiskraft zuerkennen, da auf eine eventuelle Überlagerung der Linien keine Rücksicht genommen wurde.

Freundlich[305]) versuchte, auch bei den Fixsternen die Gravitationsverschiebung der Spektrallinien nachzuweisen. Es ist jedoch bei Fixsternen nur auf Grund ziemlich unsicherer Hypothesen möglich, den

---

299) *K. Schwarzschild,* Berl. Ber. (1914), p. 120.

300) *Ch. E. St. John,* Astroph. J. 46 (1917), p. 249.

301) *J. Evershed* und *Royds,* Kodaik. Obs. Bull. 39.

302) *Wiechert* ersann, durch diese Diskrepanz der *Einstein*schen Theorie mit den genannten Beobachtungen veranlaßt, eine Theorie der Gravitation, die so viele unbestimmte Konstante enthält, daß sie beliebigen empirischen Werten für Rotverschiebung, Lichtstrahlkrümmung und Perihelbewegung des Merkur angepaßt werden kann: *E. Wiechert,* Gött. Nachr., math.-naturw. Klasse 1910, p. 101; Astr. Nachr., Nr. 5054, 211, Spalte 275; Ann. d. Phys. 63 (1920), p. 301.

303) *L. Grebe* und *A. Bachem,* Verh. d. deutsch. phys. Ges. 21 (1919), p. 454; Ztschr. f. Phys. 1 (1920), p. 51 und 2 (1920), p. 415.

304) *L. Grebe,* Phys. Ztschr. 21 (1920), p. 662 und Ztschr. f. Phys. 4 (1921), p. 105.

304a) *A. Perot,* Paris C. R. 171 (1920), p. 229.

305) *E. Freundlich,* Phys. Ztschr. 16 (1915), p. 115; 20 (1919), p. 561.

Gravitationseffekt vom Dopplereffekt zu trennen. *Freundlichs* erste Resultate haben überdies eine Zurückweisung durch *Seeliger*[306]) erfahren.

Zusammenfassend kann man also sagen, daß die experimentellen Ergebnisse über die Rotverschiebung jetzt für die Theorie günstig stehen, diese aber noch keine endgültige Bestätigung erfahren hat.

c) *Fermats Prinzip der kürzesten Lichtzeit in statischen Gravitationsfeldern.* Wir nehmen an, daß wir es mit einem *statischen* Gravitationsfeld zu tun haben, d. h. das Koordinatensystem soll so wählbar sein, daß alle g_{ik} von der Zeit unabhängig werden und das vierdimensionale Linienelement die Form annimmt

$$ds^2 = d\sigma^2 - f^2 dt^2, \tag{394}$$

worin $d\sigma$ eine positiv definite quadratische Form der drei räumlichen Koordinatendifferentiale und f die vom Ort abhängige Lichtgeschwindigkeit bedeute. Es ist dann also

$$g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0, \quad g_{44} = -\frac{f^2}{c^2}. \tag{394a}$$

Das Bestehen der ersten drei angeschriebenen Relationen in allen statischen G-Feldern ist eine besondere Hypothese, die sich nur durch die Differentialgleichung des G-Feldes selbst rechtfertigen läßt. Im Spezialfall der *kugelsymmetrischen*, statischen Felder kann man allerdings a priori einsehen, daß das Verschwinden der Komponenten g_{i4} $(i = 1, 2, 3)$ durch passende Normierung der Zeit stets erzielt werden kann.[306a])

Wir wollen speziell die Bahn der Lichtstrahlen in einem solchen Feld untersuchen. Nach Nr. **51** ist sie durch die Bedingung bestimmt, daß sie eine geodätische Nullinie sein muß. Diese läßt sich in dem hier betrachteten Spezialfall auf die Form des Fermatschen Prinzips bringen, wie *Levi-Civita*[307]) und *Weyl*[308]) gezeigt haben. Um dies

---

306) *H. v. Seeliger,* Astr. Nachr. 202, Spalte 83, 1916; vgl. dazu auch *E. Freundlich,* ebenda Spalte 147.

306a) Die italienischen Mathematiker unterscheiden den statischen Fall, in welchem $g_{i4} = 0$ für $i = 1, 2, 3$, vom allgemeineren stationären Fall, in welchem die g_{ik} bloß von der Zeit unabhängig sind, aber $g_{i4} \neq 0$ ist. Vgl. dazu insbesondere *A. Palatini,* Atti del reale instituto Vineto di science, lettere ed arti, 78, 2. Teil (1919), p. 589, wo die Bahnen von Massenpunkten und Lichtstrahlen im stationären Fall allgemein diskutiert werden und *A. De-Zuani,* Nuovo Cimento (6) 18 (1919), p. 5.

307) *T. Levi-Civita,* Statica Einsteiniana, Rend. Acc. Linc. (5) 26 (1917), p. 458; Nuovo Cimento (6) 16 (1918), p. 105.

308) *H. Weyl,* Ann. d. Phys. 54 (1917), p. 117; Raum — Zeit — Materie, 1. Aufl. 1918, p. 195, 196; 3. Aufl. 1920, p. 209, 210.

nachzuweisen, gehen wir aus von dem Variationsprinzip (83) der Nr. **15**.

$$L = \frac{1}{2} g_{ik} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda}, \quad \delta \int L\, d\lambda = 0 .$$

Dabei sind die Koordinaten in den Endpunkten des Integrationsweges nicht mitzuvariieren. Setzen wir nun für die g_{ik} die aus (394) folgenden Werte ein, so wird

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{d\sigma}{d\lambda}\right)^2 - f^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2,$$

und das Variationsprinzip liefert speziell beim Variieren von t die Gleichung

$$\frac{d}{d\lambda}\left(f^2 \frac{dt}{d\lambda}\right) = 0, \quad f^2 \frac{dt}{d\lambda} = \text{const.},$$

und bei geeigneter Normierung des Parameters λ kann man setzen

$$f^2 \frac{dt}{d\lambda} = 1. \tag{395}$$

Wir ändern nun die Bedingung für die Variation folgendermaßen ab.

1. Nur die *räumlichen* Endpunkte der Bahn sollen fix bleiben, die Zeitkoordinate soll im Anfangs- und Endpunkt variiert werden.

2. Die variierte Bahn soll ebenfalls eine Nullinie sein (aber nicht notwendig geodätisch). Infolge der letzteren Bedingung wird natürlich

$$L \equiv 0 \quad \text{und} \quad \delta L \equiv 0$$

in allen Bahnpunkten. Andererseits ist aber beim Variieren der Zeitkoordinate

$$\delta \int L\, d\lambda = - f^2 \frac{dt}{d\lambda} \delta t \Big|_{t_1}^{t_2} + \int \frac{d}{d\lambda} \left(f^2 \frac{dt}{d\lambda}\right) \delta t\, d\lambda,$$

welcher Ausdruck somit ebenfalls identisch verschwinden muß, wenn die variierte Bahn eine Nullinie ist. Die Bedingung (395) dafür, daß die Nullinie eine geodätische ist, kann deshalb ersetzt werden durch

$$\delta t \Big|_{t_1}^{t_2} = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt = 0$$

oder auch durch Elimination der Zeit vermöge der Beziehung $L = 0$ durch

$$\delta \int \frac{d\sigma}{f} = 0. \tag{396}$$

Es ist dies nichts anderes als das Fermatsche Prinzip der kürzesten Lichtzeit. Es geht daraus hervor, daß selbst, wenn das Gravitationsfeld statisch ist, der *Lichtstrahl im dreidimensionalen Raum keine geodätische Linie* ist. Denn diese wäre ja durch

$$\delta \int d\sigma = 0$$

charakterisiert. Nur die Weltlinie des Lichtstrahls in der vierdimensionalen Welt ist geodätisch. Der Lichtstrahl wird also im Gravita-

tionsfeld gekrümmt. Der Betrag der Krümmung hängt jedoch auch von der Gestalt von $d\sigma$ ab und kann zum Unterschied vom Betrag der Rotverschiebung erst ermittelt werden, wenn die Feldgleichungen des G-Feldes selbst bekannt sind (Nr. 58c).

Auch für die Bahn des Massenpunktes im statischen Gravitationsfeld läßt sich in analoger Weise ein Variationsprinzip finden, das die Zeitkoordinate nicht mehr enthält.[309]) Es entbehrt jedoch der anschaulichen Bedeutung.

54. Der Einfluß des Schwerefeldes auf materielle Vorgänge.[310]) Es ist bequem, mit *Einstein* alles außer dem G-Feld als Materie zu bezeichnen. Die Aufgabe besteht dann darin, die Naturgesetze der materiellen Vorgänge auf eine allgemein kovariante Form zu bringen. Sie wird im Prinzip durch folgende Betrachtung gelöst. Es sei zunächst ein Koordinatensystem K_0 gegeben, in welchem in einem endlichen Weltgebiet die g_{ik} ihre Normalwerte haben. Dann haben hier die Naturgesetze die Form, welche in der speziellen Relativitätstheorie als gültig angenommen wird. Nun führt man irgendein anderes beliebig bewegtes Gaußsches Koordinatensystem K ein und ermittelt durch bloße Rechnung die Form der Naturgesetze in K. Auf Grund des Äquivalenzprinzips ist klar, daß auf diese Weise zugleich der Einfluß von Gravitationsfeldern auf die materiellen Vorgänge gefunden ist. Das Ergebnis überträgt man dann auch auf den Fall, daß sich kein Koordinatensystem K_0 finden läßt, in welchem in endlichen Gebieten das Gravitationsfeld wegtransformiert ist. Diese Übertragung ist nur auf Grund der allerdings bis zu einem gewissen Grade willkürlichen Hypothese möglich, daß die zweiten Ableitungen der g_{ik} in die betreffenden Naturgesetze nicht eingehen.

In mathematischer Hinsicht entspricht die Situation vollkommen derjenigen beim Übergang vom Tensorkalkül der euklidischen zu dem der Riemannschen Geometrie (Nr. **13**, **20**). Wir können also auf Grund der im Abschnitt II angegebenen Methoden zu einem jeden Gesetz der speziellen Relativitätstheorie seine allgemein kovariante Form sofort angeben, indem wir die dort vorkommenden Tensoroperationen durch die entsprechenden verallgemeinerten Operationen der Riemannschen Geometrie ersetzen. Es ist hier natürlich der Unterschied von kontra- und kovarianten Komponenten eines Tensors sowie der zwischen Tensoren und Tensordichten zu beachten.

---

309) Vgl. die in Anm. 307) und 308) zitierten Arbeiten.

310) Vgl. dazu *A. Einstein* und *M. Großmann,* l. c. Anm. 274), I. Teil § 6; *A. Einstein,* Berl. Ber. 1914, l. c. Anm. 276), Abschn. C; Ann. d. Phys. l. c. Anm. 279), Abschn. D.

Diese allgemeinen Vorschriften sollen nun am Beispiel der *Maxwell-Lorentz*schen Feldgleichungen für das Vakuum erläutert werden. Wir definieren wieder den Feldvektor F_{ik} durch (202). Dann bleiben nach Nr. **19** (140b) die Gleichungen (203) bestehen:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0. \tag{203}$$

Das zweite System (208) der *Maxwell*schen Gleichungen muß aber nach (141b) etwas anders geschrieben werden. Wir führen die kontravarianten Komponenten der zu F_{ik} gehörigen Tensordichte ein:

$$\mathfrak{F}^{ik} = \sqrt{-g}\, g^{\alpha i} g^{\beta k} F_{\alpha\beta}, \tag{397}$$

ebenso die zum Stromvektor gehörige Tensordichte

$$\mathfrak{s}^i = \sqrt{-g}\, s^i. \tag{398}$$

Dann gilt

$$\frac{\partial \mathfrak{F}^{ik}}{\partial x^k} = \mathfrak{s}^i, \tag{208a}$$

woraus noch die Verallgemeinerung

$$\frac{\partial \mathfrak{s}^i}{\partial x^i} = 0 \tag{197a}$$

der Kontinuitätsgleichung (197) folgt.[310a)]

Die ponderomotorische Kraft berechnet sich genau wie früher nach (216):

$$f_i = F_{ik} s^k$$

und die zugehörige Tensordichte nach

$$\mathfrak{f}_i = \sqrt{-g}\, f_i = F_{ik} \mathfrak{s}^k. \tag{216a}$$

Die gemischten Komponenten der Energie-Impuls-Tensordichte sind nach (222) gegeben durch

$$\mathfrak{S}_i^k = F_{ir} \mathfrak{F}^{kr} - \tfrac{1}{4} F_{rs} \mathfrak{F}^{rs} \delta_i^k. \tag{222a}$$

Wichtig ist die Verallgemeinerung von (225). Auf Grund der Regel (150a) der allgemeinen Tensoranalysis folgt

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \mathfrak{S}_i^k}{\partial x^k} - \mathfrak{S}_r^s \Gamma_{is}^r = -\mathfrak{f}_i \\ &\text{oder auch} \\ &\frac{\partial \mathfrak{S}_i^k}{\partial x^k} - \tfrac{1}{2} \mathfrak{S}^{rs} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i} = -\mathfrak{f}_i. \end{aligned}\right. \tag{225a}$$

Das zweite Glied der linken Seite ist für den Einfluß des Gravitationsfeldes charakteristisch. Daß wirklich auch im allgemeinen Fall (225a)

310a) Eine Anwendung dieser Gleichungen gibt *M. v. Laue,* Phys. Ztschr. 21 (1920), p. 659. Er zeigt, daß für die Weltlinien der Lichtstrahlen im leeren Raum innerhalb des Gültigkeitsbereiches der geometrischen Optik aus ihnen die Gleichungen (80), (81) der geodätischen Nullinie in der Tat folgen.

eine Folge von (203), (208a) und (216) ist, geht aus der in Nr. **23**a) ausgeführten Rechnung hervor.

In analoger Weise lassen sich auch die Bewegungsgleichungen für Flüssigkeiten allgemein kovariant schreiben.[311]) Die allgemeinen Gleichungen von *Herglotz* für elastische Medien behandelt *G. Nordström.*[312]) So wie (225a) aus dem Ausdruck (225) für die ponderomotorische Kraft hervorgeht, geht aus dem allgemeinen Impuls-Energiesatz (341) der *Impuls-Energiesatz der Materie bei Vorhandensein von Gravitationsfeldern hervor:*

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_i^k}{\partial x^k} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{T}^{rs}\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i} = 0. \tag{341a}$$

Er unterscheidet sich in physikalischer Hinsicht sehr wesentlich von der früheren Form des Impuls-Energiesatzes. Während nämlich aus dieser durch Integration für Gesamtenergie und Gesamtimpuls ein Erhaltungssatz abgeleitet werden konnte, ist dies bei der neuen Form (341a) wegen des zweiten Gliedes der linken Seite nicht mehr möglich. Es kann eben Impuls und Energie von der Materie auf das Gravitationsfeld übergehen und umgekehrt (Näheres vgl. Nr. **61**). Wirken keine äußeren Kräfte, so kann speziell für T_{ik} der durch (322) gegebene kinetische Impuls-Energietensor Θ_{ik} eingeführt werden, also für $\mathfrak{T}_i^k$ der Ausdruck $\mu_0 \sqrt{-g}\, g_{i\alpha}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}$. Die Gleichungen (341a) reduzieren sich dann auf die der geodätischen Linie.

55. Die Wirkungsprinzipien für materielle Vorgänge bei Vorhandensein von Gravitationsfeldern. Wie zuerst von *Hilbert*[313]) gezeigt wurde, hängt der Impuls-Energietensor T_{ik} mit der Wirkungsfunktion in einer einfachen Weise zusammen, die erst in der allgemeinen Relativitätstheorie deutlich zutage tritt. Wir zeigen dies am Beispiel des mechanisch-elektrodynamischen Wirkungsprinzips der Nr. **31**, welches wir in der *Weyl*schen Form (231a) schreiben:

$$\tag{231b} \left\{ \begin{aligned} W_1 &= \int \{\tfrac{1}{2}F_{ik}F^{ik} - 2\varphi_i s^i + 2\mu_0 c^2\}\, d\Sigma \\ &= \int \tfrac{1}{2}F_{ik}F^{ik} d\Sigma - \int de \int 2\varphi_i dx^i + 2\mu_0 c \int \sqrt{-g_{ik}u^i u^k}\, d\Sigma; \\ \delta W_1 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Dieses Wirkungsprinzip bleibt auch im Schwerefeld gültig[313]), wenn die g_{ik} nicht mitvariiert werden. (Zu variieren sind wieder unabhängig

311) *A. Einstein,* l. c. Anm. 310).

312) *G. Nordström,* Amst. Versl. 25 (1916), p. 836.

313) *D. Hilbert,* Grundlagen der Physik, 1. Mitt., l. c. Anm. 101). Vgl. auch *H. A. Lorentz,* l. c. Anm. 100) und *H. Weyl,* Ann. d. Phys. 54, l. c. Anm. 308); Raum–Zeit–Materie, 1. Aufl. 1918, p. 215ff., § 32; 3. Aufl. 1920, p. 197.

voneinander die Weltlinien der materiellen Teilchen und die Feldpotentiale φ_i.)

Etwas Neues tritt jedoch auf, wenn die g_{ik} variiert werden. Die Weltlinien der Substanz und die Potentiale φ_i können wir jetzt konstant lassen. Dann liefert das erste Integral nach Nr. 23a) den Beitrag

$$-\int \mathfrak{S}^{ik}\delta g_{ik}\,dx = -\int S^{ik}\delta g_{ik}\,d\Sigma,$$

das zweite liefert den Beitrag Null und das dritte

$$-\int \mu_0 u^i u^k \delta g_{ik}\,d\Sigma = -\int \Theta^{ik}\delta g_{ik}\,d\Sigma.$$

Also wird insgesamt

$$\delta W = -\int \mathfrak{T}^{ik}\delta g_{ik}\,dx = +\int \mathfrak{T}_{ik}\delta g^{ik}\,dx. \tag{399}$$

Man erhält also den Energietensor der Materie durch Variieren des G-Feldes im Wirkungsintegral.[313]) Diese Regel gilt allgemein, nicht nur in dem hier betrachteten Fall. Für den elastischen Energietensor wurde sie von *Nordström*[314]) nachgewiesen, über die Theorie von *Mie* siehe Abschn. V, Nr. 64.

Der Zusammenhang zwischen dem materiellen Impuls-Energietensor und der Wirkungsfunktion, der hier zutage tritt, erweist sich als äußerst wichtig für die Anwendung des Hamiltonschen Prinzips in der allgemeinen Relativitätstheorie (s. Nr. 57). Setzt man ferner für δg_{ik} eine bloß durch Variation des Koordinatensystems erzeugte Variation $\delta^* g_{ik}$, für die δW identisch verschwindet (Nr. 23), so kann man auf Grund von (169) folgende allgemeine Aussage machen. *Immer, wenn sich die Feldgesetze der materiellen Vorgänge aus einem Wirkungsprinzip ableiten lassen und sich gleichzeitig der Energietensor durch Variieren des G-Feldes in der angegebenen Weise aus dem Wirkungsintegral ergibt, ist der Impuls-Energiesatz* (341a) *eine Folge dieser Feldgesetze.* Für diesen Schluß ist wesentlich, daß die von der *Variation δ^* der materiellen Zustandsgrößen* herrührenden Anteile zufolge des Hamiltonschen Prinzips verschwinden.

56. Die Feldgleichungen der Gravitation. Die eigentliche und wichtigste Aufgabe der allgemeinen Relativitätstheorie besteht darin, die Gesetze des G-Feldes selbst aufzustellen. Von diesen Gesetzen muß natürlich verlangt werden, daß sie allgemein kovariant sein sollen. Um jedoch zu einer eindeutigen Festlegung dieser Gesetze zu gelangen, müssen noch weitere Forderungen gestellt werden. Die leitenden Gesichtspunkte sind hierbei folgende:

314) *G. Nordström,* l. c. Anm. 312).

1. Nach dem Äquivalenzprinzip ist die schwere Masse gleich der trägen Masse, also proportional der Gesamtenergie. Das gleiche gilt daher auch von der Kraft, die im Schwerefeld auf ein materielles System wirkt. Es liegt deshalb nahe anzunehmen, daß umgekehrt auch nur die Gesamtenergie für das von einem materiellen System erzeugte Gravitationsfeld maßgebend ist. Nach der speziellen Relativitätstheorie läßt sich jedoch die Energiedichte nicht durch einen Skalar charakterisieren, sondern nur als 44-Komponente eines Tensors T_{ik}, indem zur Energie Impuls und Spannungen als gleichberechtigt hinzutreten. Wir formulieren deshalb unsere Annahme so:

In die Feldgleichungen der Gravitation sollen keine anderen materiellen Zustandsgrößen eingehen als der totale Impuls-Energietensor T_{ik}.

2. Darüber hinausgehend macht *Einstein* in Analogie zur Poissonschen Gleichung

$$\Delta \Phi = 4\pi k \mu_0$$

den Ansatz, *daß der Energietensor* T_{ik} *proportional sein soll einem aus den* g_{ik} *allein gebildeten Differentialausdruck zweiter Ordnung.* Da dieser offenbar wegen der allgemeinen Kovarianz ein Tensor sein muß, folgt daraus nach Nr. **17**, (113) für die Differentialgleichungen des G-Feldes die Form

$$c_1 R_{ik} + c_2 R g_{ik} + c_3 g_{ik} = k T_{ik}. \tag{400}$$

R_{ik} ist hierin der durch (94) definierte (verjüngte) Krümmungstensor, R die zugehörige Invariante (95). Über ihre geometrische Bedeutung vgl. Nr. **17**.

Das Wesentliche der hier gemachten Annahmen tritt deutlich hervor beim Vergleich mit der *Nordström*schen Theorie, die nach *Einstein* und *Fokker*[314a]) ebenfalls auf eine allgemeine kovariante Form gebracht werden kann. In dieser geht bloß der Skalar $T = T_i^i$ in die Gravitationsgleichungen ein, und zwar ist er proportional der Krümmungsinvariante R. Die übrigen Gleichungen, die bisher noch nicht explizite aufgestellt wurden, müssen die Aussage enthalten, daß das Linienelement bei geeigneter Koordinatenwahl stets auf die Form

$$ds^2 = \Phi \Sigma (dx^i)^2$$

gebracht werden kann, wo also die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit gilt. Man sieht, daß diese Feldgleichungen vom Standpunkt des absoluten Differentialkalküls ganz künstlich und verwickelt erscheinen gegenüber den Gleichungen der Einsteinschen Theorie, in denen alle Komponenten von T_{ik} in gleichberechtigter Weise auftreten.

314a) *A. Einstein* und *A. D. Fokker,* l. c. Anm. 272).

3. Um in (400) die zunächst noch unbestimmt gebliebenen Konstanten c_1, c_2, c_3 festzulegen, bedarf es einer Überlegung über das Verhältnis einer allgemein relativistischen Theorie zur Kausalität. Haben wir irgendwelche Lösungen der allgemein kovarianten Feldgleichungen gefunden, so können wir durch andere Koordinatenwahl daraus beliebig viele andere Lösungen finden. *Die allgemeine Lösung der Feldgleichungen muß deshalb 4 willkürliche Funktionen enthalten. Zwischen den 10 Feldgleichungen* (400) *für die 10 Unbekannten* g_{ik} *müssen demnach 4 Identitäten bestehen. Allgemein dürfen in einer relativistischen Theorie für m Unbekannte nur m — 4 unabhängige Gleichungen vorhanden sein.* Der Widerspruch mit dem Kausalitätsprinzip ist nur scheinbar. Denn die vielen möglichen Lösungen der Feldgleichungen sind nur formal verschieden, physikalisch sind alle vollkommen gleichwertig. Die hier dargelegten Verhältnisse wurden zuerst von *Hilbert*[315]) erkannt.

Wir sind also zu der Forderung gelangt, daß zwischen den 10 Gleichungen (400) 4 Identitäten bestehen müssen. Nun wissen wir, daß der Tensor T_{ik} den Impuls-Energiesatz (341a) der Nr. **54** befriedigt. Dieser besteht gerade aus 4 Gleichungen. Es ist deshalb äußerst einleuchtend, über den Inhalt der 4 verlangten Identitäten die folgende Annahme zu machen: *Der Impuls-Energiesatz* (341a), p. 720, *soll zufolge der Feldgleichungen der Gravitation identisch erfüllt sein.* Er ist dann also sowohl eine Folge der Gravitationsgleichungen als auch eine Folge der materiellen Feldgesetze. Dieses Postulat kommt offenbar darauf hinaus, daß die (im Sinne des Tensorkalküls für den Riemannschen Raum nach (150) verallgemeinerte) Divergenz der linken Seite von (400) identisch verschwinden soll. Wendet man diese Operation auf sie an, so erhält man nun nach (182), (109) und (75):

$$\left(\tfrac{1}{2}c_1 + c_2\right)\sqrt{-g}\,\frac{\partial R}{\partial x^i}.$$

Es muß also $c_2 = -\frac{1}{2}c$ *sein,* so daß außer dem Glied $c_3 g_{ik}$ in (400)

315) *D. Hilbert,* Grundlagen der Physik I, Gött. Nachr., math.-naturw. Kl., 1915, p. 395. In historischer Hinsicht muß bemerkt werden, daß schon *E. Mach* auf Grund relativistischer Betrachtungen zum Resultat kam, die Zahl der Gleichungen, welche die physikalischen Gesetze ausdrücken, müsse in Wirklichkeit geringer sein als die Zahl der Unbekannten. (Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit, Prag 1877, p. 36, 37; Mechanik, Leipzig 1883.)

Ferner verdient bemerkt zu werden, daß *Einstein* eine Zeit lang irrtümlich die Ansicht vertrat, aus der erwähnten Nichteindeutigkeit der Lösung könne gefolgert werden, daß die Gravitationsgleichungen nicht allgemein kovariant sein können (siehe Berl. Ber. 1914, l. c. Anm. 276).

bloß der durch (124) definierte Tensor

$$G_{ik} = R_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} R \tag{124}$$

vorkommt. Über die physikalische Bedeutung des letzten Gliedes in (400) wird in Nr. **62** gesprochen werden; wir wollen es zunächst fortlassen, was sich nachträglich dadurch wird rechtfertigen lassen, daß sein Einfluß in den zunächst zu besprechenden Fällen äußerst gering ist. Mit diesem Vorbehalt können wir also die Gravitationsgleichungen jezt schreiben

$$G_{ik} = -\varkappa T_{ik}. \tag{401}$$

Über den Grund des negativen Vorzeichens der rechten Seite siehe Nr. **58** a). Durch Verjüngung folgt daraus noch

$$R = +\varkappa T \tag{402}$$

und

$$R_{ik} = -\varkappa (T_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} T). \tag{401a}$$

Dies ist die allgemein kovariante Form der Feldgleichungen der Gravitation, die *Einstein* nach langen Irrwegen im Jahr 1915 endlich gefunden hat.[316])

Wie bereits in Nr. **50**, Anm. 277) erwähnt wurde, sind dieselben Gleichungen gleichzeitig auch von *Hilbert* hergeleitet worden. Während dort den Ausgangspunkt das Variationsprinzip bildet, erscheint dieses bei *Einstein* und in unserer Darstellung als mathematische Folgerung, wie in der folgenden Nr. dargelegt wird.

57. Herleitung der Gravitationsgleichungen aus einem Variationsprinzip.[317]) Daß der Tensor G_{ik} der Divergenzgleichung (182) genügt, hängt nach Nr. **23** damit zusammen, daß er durch Variieren des G-Feldes aus einer Integralinvariante hervorgeht:

$$\delta \int \mathfrak{R}\, dx = \int \mathfrak{G}_{ik}\, \delta g^{ik}\, dx, \tag{180}$$

wenn am Rande die Variation der Feldgrößen verschwindet. Ferner haben wir in Nr. **55** gesehen, daß diejenige Integralinvariante $\int \mathfrak{M}\, dx$, welche beim Variieren der materiellen Feldgrößen die Differentialgleichungen der mechanischen (elastischen) und elektromagnetischen Felder liefert, beim Variieren des G-Feldes auf den materiellen Impuls-Energietensor führt

$$\delta \int \mathfrak{M}\, dx = \int \mathfrak{T}_{ik}\, \delta g^{ik}\, dx. \tag{399a}$$

Diese zwei Beziehungen führen dazu, alle physikalischen Gesetze in

316) *A. Einstein*, Berl. Ber. 1915, p. 844. — Vorher hatte *Einstein* auch den Ansatz $R_{ik} = \varkappa T_{ik}$ gemacht: Berl. Ber. 1915, p. 778.

317) Vgl. dazu die in Nr. **23**, Anm. 100) bis 104) zitierten Arbeiten.

das *eine* Wirkungsprinzip

$$\delta \int \mathfrak{W} \, dx = 0, \tag{403}$$

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{R} + \varkappa \mathfrak{M} \tag{404}$$

zusammenzufassen. An der Grenze des Integrationsgebietes müssen dabei die Variationen der Feldgrößen verschwinden. Es ist eine Besonderheit dieser Wirkungsfunktion, daß sie in zwei Teile zerlegt werden kann, von denen der eine von den materiellen Zustandsgrößen, der andere von den Ableitungen der g_{ik} unabhängig ist. (Über allgemeinere Wirkungsfunktionen, welche diese Eigenschaft nicht zeigen, siehe Abschn. V.)

Das Wirkungsprinzip (403) liefert nach Nr. **55**, **56** zugleich eine übersichtliche Zusammenfassung der Beziehungen zwischen den Feldgleichungen der materiellen Vorgänge und der Gravitation: Aus beiden folgt der Impuls-Energiesatz (341a), Nr. **54**. Nach Nr. **23**, Gl. (184), folgt jedoch der Impuls-Energiesatz auch noch in einer anderen Form. Setzt man

$$t_i^k = -\frac{1}{\varkappa} U_i^k, \tag{405}$$

worin U_i^k die durch (183), (185) definierten Größen bedeuten, so gilt nämlich wegen (184) und (401):

$$\frac{\partial (\mathfrak{T}_i^k + \mathfrak{t}_i^k)}{\partial x^k} = 0. \tag{406}$$

Diese Gleichungen sind gemäß ihrer Herleitung allgemein kovariant, obwohl die Größen t_i^k sich nur gegenüber linearen Transformationen wie die Komponenten eines Tensors transformieren. Im Gegensatz zur Form (341a) des Impuls-Energiesatzes lassen sich aus (406) *Erhaltungssätze* für Energie und Impuls in *Integralform* herleiten. *Einstein*[318]) nennt deshalb die Größen t_i^k *Energie-Impulskomponenten des Gravitationsfeldes* und stellt sie den Energie-Impulskomponenten T_i^k der Materie als in gewisser Hinsicht gleichwertig an die Seite. Über die weiteren physikalischen Konsequenzen dieser Auffassung siehe Nr. **61**.

Das Wirkungsprinzip (403) hat endlich noch einen *praktischen* Wert bei der Integration der Feldgleichungen in speziellen Fällen. Indem es einem erspart, auf die allgemeinen Differentialgleichungen zurückzugreifen, gestattet es bisweilen die Rechnungen bedeutend abzukürzen. Näheres siehe Nr. **58**b).

---

318) *A. Einstein,* Berl. Ber. **1915**, p. 778, l. c. Anm. 277); Ann. d. Phys. l. c. Anm. 279), Abschn. C, § 15 ff.; Berl. Ber. **1916**, l. c. Anm. 100), § 3.

58. Vergleich mit der Erfahrung. a) *Newtons Theorie als erste Näherung.*[319]) In Nr. **53**a) haben wir gesehen, daß in schwachen, quasistatischen Gravitationsfeldern die Bewegungsgleichungen in die Newtonschen übergehen. Um den Nachweis, daß die Newtonsche Theorie in der relativistischen als Grenzfall enthalten ist, vollständig zu machen, muß noch gezeigt werden, daß in dem genannten Spezialfall das durch (391) gegebene skalare Potential der Poissonschen Gleichung

$$\Delta \Phi = 4\pi k \mu_0 \tag{407a}$$

genügt. Zu diesem Zweck bilden wir die 44-Komponente der Gleichung (401a). Für T_{ik} können wir den kinetischen Impuls-Energietensor $\mu_0 u_i u_k$ einführen. Bei Vernachlässigung von Größen der Ordnung $\frac{u}{c}$ sind offensichtlich außer T_{44} alle Komponenten von T_{ik} gleich Null zu setzen. Erstere wird

$$T_{44} = \mu_0 c^2$$

und daraus $$T = g^{ik} T_{ik} = g^{44} T_{44} = -\mu_0 c^2.$$

Die Gleichung (401a) gibt also zunächst

$$R_{44} = -\tfrac{1}{2}\varkappa \mu_0 c^2. \tag{408a}$$

Der Wert von R_{44} ist aus (94) zu entnehmen. Da zeitliche Ableitungen und Produkte der Γ^i_{rs} vernachlässigt werden, kommt einfach

$$R_{44} = -\frac{\partial \Gamma^\alpha_{44}}{\partial x^\alpha}.$$

Und wegen $\Gamma^\alpha_{44} \sim \Gamma_{\alpha,44} \sim -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^\alpha}$

$$R_{44} = +\tfrac{1}{2}\sum_\alpha \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_\alpha^2} = \tfrac{1}{2}\Delta g_{44} = -\frac{\Delta \Phi}{c^2}, \tag{408b}$$

letzteres nach (391). In (408a) eingesetzt gibt dies

$$\Delta \Phi = \tfrac{1}{2}\varkappa c^4 \cdot \mu_0. \tag{407b}$$

Es gilt also in der Tat die Poissonsche Gleichung. Es ist eine große Leistung des allgemeinen Relativitätsprinzips, daß es auf Grund der ganz allgemeinen Postulate der Nr. **56** ohne weitere Hypothesen zum Newtonschen Gravitationsgesetz führt. Wir sind aber jetzt überdies imstande, über die Bedeutung und den Zahlenwert der Konstante $\varkappa$ etwas auszusagen. Durch Vergleich von (407a) und (407b) folgt nämlich

$$\varkappa c^2 = \frac{8\pi k}{c^2} = \frac{8\pi}{c^2} 6{,}7 \cdot 10^{-8} = 1{,}87 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{cm\,gr}^{-1}. \tag{409}$$

Zugleich ergibt sich, daß $\varkappa$ positiv ist, womit das negative Vorzeichen der rechten Seite von (401) gerechtfertigt ist. Die allgemeine Relativi-

---

319) *A. Einstein,* Berl. Ber. 1915, p. 831 l. c. Anm. 278); Ann. d. Phys. l. c. Anm. 279), Abschn. E, § 21.

tätstheorie gibt also keine physikalische Interpretation für das Vorzeichen (Gravitationsanziehung und nicht Abstoßung) und den Zahlenwert der Gravitationskonstanten, sondern sie entnimmt diese Daten der Erfahrung.[320])

b) *Strenge Lösung für das Gravitationsfeld eines Massenpunktes.* Um die Perihelbewegung des Merkur und die Krümmung der Lichtstrahlen zu ermitteln, ist es nötig, für das Feld eines Massenpunktes nicht nur g_{44}, sondern auch die übrigen g_{ik} und außerdem g_{44} um eine Größenordnung genauer zu berechnen. Schon im Jahr 1915 hat *Einstein*[321]) dieses Problem durch sukzessive Approximationen gelöst. Als erster gab *Schwarzschild*[322]) und hernach unabhängig davon *Droste*[323]) eine *strenge* Lösung für das G-Feld des Massenpunktes. Perihelbewegung und Strahlenablenkung folgen praktisch genau so wie bei *Einstein.* Große mathematische Vereinfachungen brachte eine Arbeit von *Weyl*[324]), der statt Polarkoordinaten cartesische einführte und statt auf die allgemeinen Differentialgleichungen des G-Feldes auf das Wirkungsprinzip zurückgriff.

Da das Feld eines Massenpunktes statisch und kugelsymmetrisch ist, kann das Quadrat des Linienelements auf die Form gebracht werden:

$$\begin{aligned}(410)\qquad ds^2 = \gamma[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2] \\ + l(x^1dx^1 + x^2dx^2 + x^3dx^3)^2 + g_{44}(dx^4)^2,\end{aligned}$$

worin γ, l und g_{44} Funktionen von $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$ allein sind. Dadurch ist aber das Koordinatensystem noch nicht eindeutig festgelegt. Denn bei der Transformation

$$(411)\qquad x'^i = \frac{f(r)}{r}x^i \text{ [und somit } r' = \sqrt{(x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2} = f(r)],$$

welche die willkürliche Funktion $f(r)$ enthält, behält das Quadrat des Linienelements die Form (410) bei. Man kann also die Koordinaten noch weiter normieren. Besonders zwei Arten von Normierungen erweisen sich oft als bequem:

a) $\gamma = 1$:

$$\begin{aligned}(410\text{a})\qquad ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \\ + l(x^1dx^1 + x^2dx^2 + x^3dx^3)^2 + g_{44}(dx^4)^2;\end{aligned}$$

---

320) Daß bei uns in (409) $\varkappa c^2$ an Stelle von $\varkappa$ wie bei den meisten anderen Autoren steht, liegt daran, daß hier T_{44} definitionsgemäß die Dimension einer Energiedichte, dort aber die einer Massendichte hat.

321) *A. Einstein,* Berl. Ber. 1915, l. c. Anm. 278).

322) *K. Schwarzschild,* Berl. Ber. 1916, p. 189.

323) *J. Droste,* Amst. Versl. 25 (1916), p. 163.

324) *H. Weyl,* Ann. d. Phys. 54 (1917), p. 117; Raum—Zeit—Materie, 1. Aufl. 1918, p. 199 ff., 3. Aufl. 1920, p. 217 ff.

b) $l = 0$:

$$ds^2 = \gamma[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2] + g_{44}(dx^4)^2. \tag{410b}$$

Wir führen die Integration der Feldgleichungen in demjenigen Koordinatensystem aus, in welchem das Quadrat des Linienelements die Form (410a) annimmt. Im Raum außerhalb der Masse, den wir hier allein in Betracht zu ziehen haben, lauten diese nach (401a) einfach

$$R_{ik} = 0. \tag{412}$$

Die Komponenten R_{ik} des Krümmungstensors drücken sich nun in unserem Fall, wie man durch Rechnung aus (410a) findet, nach Einführung der Abkürzungen

$$h^2 = 1 + lr^2, \quad \varDelta = \sqrt{-g} = h\sqrt{-g_{44}} \tag{413}$$

folgendermaßen aus:

$$R_{ik} = [R_{22}]\delta_i^k + ([R_{11}] - [R_{22}])\frac{x^i x^k}{r^2} \quad \text{für } i, k = 1, 2, 3. \tag{414}$$

$$\left\{\begin{aligned} [R_{11}] &= \frac{\varDelta}{r^2 g_{00}} \cdot \frac{1}{2}\frac{d}{dr}\frac{r^2 g_{44}'}{\varDelta} - \frac{2}{r}\frac{\varDelta'}{\varDelta} \\ [R_{22}] &= -\frac{1}{r^2 \varDelta}\frac{d}{dr}\frac{r g_{44}}{\varDelta} - \frac{1}{r^2} \\ R_{44} &= -\frac{g_{44}}{r^2 \varDelta} \cdot \frac{1}{2}\frac{d}{dr}\frac{r^2 g_{44}'}{\varDelta}. \end{aligned}\right. \tag{415}$$

Ersichtlich sind $[R_{11}]$ und $[R_{22}]$ die Werte von R_{11} bzw. von R_{22} und R_{33} im Punkt $x^1 = r$, $x^2 = x^3 = 0$. Diese Werte für R_{ik} sind in (412) einzutragen. Es folgt aus der ersten und dritten Gleichung (415) zunächst

$$\varDelta' = 0, \quad \varDelta = \text{konst.}$$

Wenn wir noch die Bedingung hinzunehmen, daß im Unendlichen die g_{ik} ihre Normalwerte annehmen, wodurch das Problem überhaupt erst bestimmt wird (vgl. Nr. **62**), folgt weiter

$$\varDelta = 1, \tag{416}$$

und aus der zweiten Gleichung (415) ergibt sich sodann

$$g_{44} = -1 + \frac{2m}{r}, \tag{417}$$

wo m eine Integrationskonstante ist. Durch Vergleich mit dem Newtonschen Potential Φ nach (391) erhellt, daß diese Konstante m mit der Masse M des felderzeugenden Massenpunktes gemäß der Formel

$$m = \frac{kM}{c^2} \tag{418}$$

zusammenhängt. Da m die Dimension einer Länge hat, nennen wir diese Größe den Gravitationsradius der Masse. Man überzeugt sich leicht davon, daß durch (416) und (417) tatsächlich *alle* Feldgleichungen befriedigt werden.

Nach *Weyl* kann man sich die Berechnung der Krümmungskomponenten (415) ersparen, wenn man das Variationsprinzip (403) verwendet. Nach (177) können wir es für den materiefreien Raum auch schreiben

$$\delta \int \mathfrak{G}\, dx = 0. \tag{419}$$

Wir brauchen hier aber in unserem Fall weder die Zeit noch die Koordinaten x^1, x^2, x^3 einzeln einzuführen, sondern können $\mathfrak{G}$ als Funktion von r allein betrachten. Die Ausrechnung gibt

$$\mathfrak{G} = -\frac{2lr}{h^2}\Delta' = \left(\frac{1}{h^2} - 1\right)\frac{2\Delta'}{r},$$

also liefert (419) wegen $dx = 4\pi r^2 dr$:

$$\delta \int \left(\frac{1}{h^2} - 1\right) r \Delta' dr = 0. \tag{420}$$

Variieren von h gibt $\Delta' = 0$, $\Delta = \text{konst.}$, Variieren von Δ

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{h^2} - 1\right) r = 0, \quad \left(\frac{1}{h^2} - 1\right) r = \text{konst.},$$

woraus gemäß der Definition (413) von Δ wieder das Feld (416), (417) folgt.

Das Quadrat des Linienelements nimmt nach (413) die Form an

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \tag{421a}$$
$$+ \frac{2m}{r^2(r-2m)}(x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3)^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)(dx^4)^2.$$

Den ersten Teil dieses Ausdruckes, der sich auf den dreidimensionalen Raum bezieht, kann man mit *Flamm*[375]) anschaulich in folgender Weise deuten. Auf jeder durch das Zentrum gehenden Ebene (etwa $x^3 = 0$) ist die Geometrie dieselbe wie im euklidischen Raum auf der Fläche 4. Ordnung

$$z = \sqrt{8m(r - 2m)},$$

die durch Rotation der Parabel

$$z^2 = 8m(x^1 - 2m), \quad x^{(2)} = 0$$

um die z-Achse entsteht. In der Tat ist auf dieser Ebene

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \frac{2m}{r^2(r-2m)}(x^1 dx^1 + x^2 dx^2)$$
$$= (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + dz^2.$$

Für $r = 2m$ wird das Koordinatensystem singulär.

Die zweite Normalform (410b) erhält man nach (411) durch die Transformation

$$r = \left(1 + \frac{m}{2r'}\right)^2 r', \quad x'^i = \frac{r'}{r} x^i. \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{422}$$

---

325) *L. Flamm*, Phys. Ztschr. 17 (1916), p. 448.

Es wird dann nämlich

$$(421\text{b})\quad ds^2 = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 [(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2] - \frac{1 - \frac{m}{2r}}{1 + \frac{m}{2r}} (dx^4)^2.$$

Dieses Koordinatensystem reicht bis $r = \frac{m}{2}$.

c) *Perihelbewegung des Merkur und Krümmung der Lichtstrahlen.* Wir kommen nun zur Berechnung der Bahnen der Massenpunkte und Lichtstrahlen im Gravitationsfeld (421). Diese sind in der vierdimensionalen Welt geodätische Linien, bestimmt durch das Variationsprinzip

$$(81)\qquad \delta \int ds = 0$$

oder die Differentialgleichungen (80). Aus letzteren folgt durch einfache Rechnung

$$(423)\qquad \frac{d^2x^1}{d\tau^2} : \frac{d^2x^2}{d\tau^2} : \frac{d^2x^3}{d\tau^2} = x^1 : x^2 : x^3.$$

τ bedeutet für die Bahn des Massenpunktes die Eigenzeit, für die des Lichtstrahles einen beliebigen Parameter, bei welchem die Differentialgleichung (105) befriedigt ist. Daraus kann man zunächst schließen, daß die *Bahnkurve* von Massenpunkt und Lichtstrahl *eben* ist und weiter, wenn man x^3 senkrecht zu dieser Ebene legt und Polarkoordinaten

$$(424)\qquad x^1 = r\cos\varphi, \quad x^2 = r\sin\varphi$$

einführt, das Bestehen des Flächensatzes

$$(425)\qquad r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = \text{konst.} = B.$$

Andererseits folgt aus (81) durch Variieren der Zeit ebenso wie in Nr. **53**c

$$g_{44} \frac{dx^4}{d\tau} = \text{konst.}$$

Quadriert man diese Gleichung und eliminiert $\frac{dx^4}{d\tau}$ mittels der Relationen $g_{ik}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau} = -c^2$ für den Massenpunkt und $g_{ik}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau} = 0$ für den Lichtstrahl, so kommt für ersteren

$$(426\text{a})\qquad \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 - \frac{2mc^2}{r} - 2mr\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = \text{konst.} = 2E$$

und

$$(426\text{b})\qquad \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 - 2mr\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = \text{konst.}$$

für den letzteren. Es ist klar, daß (426a) den Energiesatz enthält. Beide Gleichungen unterscheiden sich von den Newtonschen nur durch den letzten Term. Führt man noch gemäß (425) φ statt τ als unab-

hängige Variable ein, so kommt

$$(427\,\mathrm{a}) \qquad B^2\left[\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right] - \frac{2mc^2}{r} - \frac{2mB^2}{r^3} = 2E,$$

$$(427\,\mathrm{b}) \qquad \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{2m}{r^3} = \text{konst.} = \frac{1}{\Delta^2}.$$

Durch diese Gleichungen sind die gesuchten Bahnkurven vollständig bestimmt. Das letzte Glied der linken Seite von (427a) bewirkt eine Perihelbewegung der Planetenbahnen im Sinne der Umlaufsrichtung des Planeten und vom Betrag

$$(428\,\mathrm{a}) \qquad \Delta\pi = \frac{6\pi m}{a(1-e^2)} \qquad \begin{array}{l}(a = \text{große Halbachse})\\(e = \text{Exzentrizität})\end{array}$$

pro Bahnumlauf, was nach (418) und dem 3. Keplerschen Gesetz

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = kM = mc^2 \qquad (T = \text{Umlaufszeit})$$

auch geschrieben werden kann

$$(428\,\mathrm{b}) \qquad \Delta\pi = \frac{24\pi^3 a^2}{c^2 T^2 (1-e^2)}.$$

Es bleibt noch die Gleichung (427b) für den Lichtstrahl zu diskutieren. Wäre das letzte Glied der linken Seite nicht vorhanden, so wäre der Lichtstrahl eine Gerade im Abstand Δ vom Zentrum. Das Störungsglied bewirkt eine nach dem Massenzentrum konkave Krümmung des Lichtstrahls, die eine gesamte Ablenkung um den Winkel

$$(429) \qquad \varepsilon = \frac{4m}{\Delta}$$

zur Folge hat, wo Δ jetzt den Abstand des Zentrums von den Asymptotenrichtungen der Bahn bedeutet. Die hier verwendete Methode der Berechnung der Strahlenkrümmung rührt von *Flamm*[326]) her. Die Berechnung von *Einstein*[327]) nach dem Huyghensschen Prinzip führt zum gleichen Resultat, wie es nach Nr. **53**c) sein muß.

Die beiden hier entwickelten Konsequenzen der *Einstein*schen Gravitationstheorie sind einer Prüfuug durch die Erfahrung zugänglich. Was zunächst die durch (428) gegebene Perihelbewegung anlangt, so ist sie nur beim Merkur, wo die Verhältnisse wegen seiner geringen Distanz von der Sonne und der großen Exzentrizität seiner Bahn besonders günstig liegen, von meßbarem Betrage. Ihr theoretischer Wert ist

$$\Delta\pi = 42{,}89'', \quad e\Delta\pi = 8{,}82'' \text{ pro Jahrhundert}^{328)}.$$

326) *L. Flamm*, l. c. Anm. 325).

327) *A. Einstein*, Berl. Ber. 1915, l. c. Anm. 278); Ann. d. Phys., l. c. Anm. 279), § 22.

328) Vgl. dazu die Zahlentabelle im Art. VI 2, 17 (*J. Bauschinger*), p. 887.

Nun ist den Astronomen seit *Leverrier*[329]) bekannt, daß in der Perihelbewegung des Merkur ein Restbetrag vorhanden ist, der durch die Störungen von seiten der übrigen Planeten nicht verursacht sein kann. Nach der erneuten Durchrechnung von *Newcomb*[330]) hat er die Größe

$$\Delta\pi = 41{,}24'' \pm 2{,}09'', \quad e\Delta\pi = 8{,}48'' \pm 0{,}43''.$$

Der theoretische Wert fällt also innerhalb die Fehlergrenzen von *Newcomb.* Wie weit der Newcombsche Wert selbst gesichert (evtl., wie von astronomischer Seite geäußert wurde, durch Rechenfehler entstellt) ist, wird in dem Art. VI 2, 22 dieser Enzyklopädie von *F. Kottler* zu diskutieren sein. Ebendort wird auf die Einflüsse nicht relativistischen Ursprunges auf das Merkurperihel einzugehen sein, z. B. Abplattung der Sonne, Drehung des empirischen gegen das Inertialsystem, nicht planetarische störende Massen, namentlich die des Zodiakallichtes (*Seeliger*[330a])). Von der *Seeliger*schen Erklärung unterscheidet sich die *Einstein*sche jedenfalls dadurch zu ihrem Vorteil, daß sie keine unbestimmten Parameter nötig hat. Wenn also auch der Grad der numerischen Übereinstimmung zurzeit vielleicht noch nicht sicher beurteilt werden kann, so bedeutet jedenfalls die Übereinstimmung des Einsteinschen und Newcombschen Wertes einen großen Erfolg.

Neuerdings wurde wiederholt ein älterer Versuch von *P. Gerber*[331]) diskutiert, die Perihelbewegung des Merkur durch die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gravitation zu erklären, der jedoch als theoretisch völlig mißglückt bezeichnet werden muß. Er führte nämlich — aber auf Grund von falschen Schlüssen — zwar zur richtigen Formel (428), jedoch ist zu betonen, daß auch damals an dieser nur der Zahlenfaktor neu war.

Eine noch endgültigere Bestätigung wie beim Merkurperihel hat die Relativitätstheorie neuerdings bei der Strahlenablenkung erfahren. Nach (429) erfährt nämlich ein am Sonnenrand vorbeigehender Lichtstrahl eine Ablenkung von

$$\varepsilon = 1{,}75''.$$

329) *U. J. Leverrier,* Ann. de l'Obs. Paris, vol. V, 1859.

330) *S. Newcomb,* Wash. Astr. pap. 6 (1898), p. 108.

330a) *H. v. Seeliger,* Münch. Ber. 36 (1906), p. 595.

331) *P. Gerber,* Ztschr. Math. Phys. 43 (1898), p. 93; Jahresb. Real-Progymn. Stargard 1902. Wieder abgedruckt in Ann. d. Phys. 52 (1917), p. 415; Diskussion: *H. v. Seeliger,* Ann. d. Phys. 53 (1917), p. 31; 54 (1917), p. 38; *S. Oppenheim,* Ann. d. Phys. 53 (1917), p. 163; *M. v. Laue,* Ann. d. Phys. 53 (1917), p. 214; Naturw. 8 (1920), p. 735. Vgl. dazu auch *J. Zenneck,* Art. V 2, Nr. 24 und *S. Oppenheim,* Art. VI 2, 22, Nr. 31 b) dieser Encyklopädie.

Dies läßt sich prüfen durch Beobachtung von Fixsternen in der Nähe der Sonne bei totalen Sonnenfinsternissen. Die anläßlich der totalen Sonnenfinsternis vom 29. Mai 1919 ausgerüsteten Expeditionen in Brasilien und auf der Insel Principe fanden nun in der Tat, daß der von *Einstein* vorausgesagte Effekt vorhanden ist.[332]) Auch quantitativ ist die Übereinstimmung eine gute. Die erstgenannte Expedition fand nämlich im Mittel für die auf den Sonnenrand reduzierte Sternablenkung $1{,}98'' \pm 0{,}12''$, die zweite Expedition $1{,}61'' \pm 0{,}30''$. Über die Reduktionsmethoden, durch welche diese Zahlen gewonnen wurden, vgl. den Art. VI 2, 22 von *Kottler*.

Der ursprünglich von *Einstein* berechnete halbe Wert (vgl. Nr. **50**), der sich auch auf Grund der Newtonschen Theorie für einen mit Lichtgeschwindigkeit bewegten Massenpunkt ergibt, erwies sich als mit den Beobachtungen unvereinbar.

59. Andere spezielle, strenge Lösungen im statischen Fall. Das Feld (421) für den Massenpunkt wird singulär für $r = 2m$ bzw. $r = \frac{m}{2}$, und es ist deshalb von theoretischem Interesse zu untersuchen, wie sich das G-Feld in das Innere der Masse fortsetzt. Hierzu ist nötig, bestimmte Annahmen über die physikalische Beschaffenheit der felderzeugenden Masse zu machen, da der Energietensor T_{ik} sonst nicht bestimmt ist. Die einfachste Annahme ist die einer *inkompressiblen Flüssigkeitskugel.* Für diesen Fall hat *Schwarzschild*[333]) die Feldgleichungen integriert, von *Weyl*[334]) wurde die Rechnung vereinfacht. Der Energietensor ist hier nach (362) gegeben durch

$$T_{ik} = \left(\mu_0 + \frac{p}{c^2}\right) u_i u_k + p g_{ik},$$

da $\mu_0 = \text{konst.}$, $P = \frac{p}{\mu_0}$ wird. Die Grenzbedingungen der Elastizitätstheorie verlangen die Stetigkeit aller g_{ik} und das Verschwinden des Druckes p auf der Kugeloberfläche. Mit Rücksicht hierauf ist das Feld eindeutig bestimmt. Im Außenraum ($r > r_0$, r_0 = Kugelradius), ergibt sich das nämliche Feld wie beim Massenpunkt. Der Gravitationsradius m ist dabei

$$m = \frac{k\mu_0}{c^2} \cdot \frac{4\pi r_0^3}{3}. \tag{430}$$

---

332) *F. W. Dyson, A. S. Eddington* u. *C. Davidson,* A determination of the deflection of light by the sun's gravitational field, from observations made ad the total eclipse of may 29, 1919, Phil. Trans. Roy. Soc. A 220 (1920), p. 291.

333) *K. Schwarzschild,* Berl. Ber. 1916, p. 424.

334) *H. Weyl,* Raum—Zeit—Materie, 1. Aufl. 1918, p. 208; 3. Aufl. 1920, p. 225.

Im Innern der Kugel dagegen gilt, wenn wir das Quadrat des Linienelements in der Normalform (410a) schreiben und h dieselbe Bedeutung hat wie in (413):

$$(431)\qquad \frac{1}{h^2} = 1 - \frac{2m}{r_0^3} r^2, \quad \sqrt{-g_{44}} = \frac{3h - h_0}{2hh_0}, \quad p = \mu_0 c^2 \cdot \frac{h_0 - h}{3h - h_0}$$

(h_0 = Wert von h an der Oberfläche).

Das Quadrat des Linienelements wird hiernach im Innern der Kugel

$$(432)\qquad \begin{cases} ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + \dfrac{(x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3)^2}{a^2 - r^2} \\ \qquad - \left(\dfrac{3h - h_0}{2hh_0}\right)^2 (dx^4)^2 \end{cases}$$

mit

$$(433)\qquad a = r_0 \sqrt{\frac{r_0}{2m}}.$$

Damit das Linienelement außerhalb der Kugel regulär bleibt, muß $r_0 > 2m$ sein. Wie der Vergleich mit (132a) zeigt, ist die Geometrie des dreidimensionalen Raumes innerhalb der Flüssigkeitskugel von konstanter positiver Krümmung (sphärisch oder elliptisch); a hat die Bedeutung des Krümmungsradius. Mit der Berechnung des G-Feldes von *kompressiblen* Flüssigkeitskugeln beschäftigt sich *Bauer*[334]).

Ein weiteres Problem, welches eine strenge Lösung zuläßt, ist das Feld einer elektrisch geladenen Kugel. Es ist für die Frage nach der Natur des Elektrons (s. Abschn. V) von Interesse zu untersuchen, inwiefern das elektrostatische Feld einer geladenen Kugel durch ihr Gravitationsfeld beeinflußt und umgekehrt durch die elektrostatische Energie ein Gravitationsfeld erzeugt wird. Diese Aufgabe ist zuerst von *Reißner*[335]), hernach, ausgehend vom Wirkungsprinzip, von *Weyl*[336]) gelöst worden. Es zeigt sich, daß das elektrostatische Potential φ exakt dem Coulombschen gleich ist:

$$(434)\qquad \varphi = \frac{e}{r},$$

wenn wir hier nicht Heavisidesche, sondern gewöhnliche C.G.S.-Einheiten verwenden. Das G-Feld in der Normalform (410a) ist jedoch nicht mehr durch (416), (417) bestimmt, sondern durch

$$(435)\qquad \Delta = 1, \quad -g_{44} = \frac{1}{h^2} = 1 - \frac{2m}{r} + \varkappa \frac{e^2}{r^2}.$$

Das letzte Glied ist das von der elektrostatischen Energie erzeugte

334) *H. Bauer*, Wien. Ber., math.-nat. Kl., Abt. IIa, 127 (1918), p. 2141.

335) *H. Reißner*, Ann. d. Phys. 50 (1916), p. 106.

336) *H. Weyl*, Ann. d. Phys. 54, l. c. Anm. 324); Raum—Zeit—Materie, 1. Aufl. 1918, p. 207; 3. Aufl. 1920, p. 223.

Gravitationsfeld. Es wird erst in Entfernungen von der Größenordnung $a = \frac{\varkappa e^2}{m} = \frac{e^2}{Mc^2}$ mit dem Newtonschen Glied $\frac{2m}{r}$ vergleichbar. Beim Elektron ist a die in den älteren Theorien als „Elektronenradius" auftretende Größe $\sim 10^{-13}$ cm. Die von einem Elektron auf ein zweites oder auf ein eigenes Ladungselement ausgeübte Gravitationsanziehung ist jedoch immer viel kleiner als die elektrostatische Coulombsche Abstoßung — das Verhältnis beider ist

$$\frac{kM^2}{e^2} \sim 10^{-40} \text{ —}$$

so daß durch das Gravitationsfeld (435) das Elektron gegenüber seinen eigenen Abstoßungskräften durchaus nicht im Gleichgewicht gehalten wird.

Levi-Civita[337]) untersuchte auch das von einem *homogenen* elektrischen oder magnetischen Feld erzeugte Gravitationsfeld. Ist x^3 in der Richtung des ersteren Feldes gezählt, F dessen Stärke, so nimmt das Quadrat des Linienelements die Form an

$$(436) \quad \begin{cases} ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + \dfrac{(x^1 dx^1 + x^2 dx^2)^2}{a^2 - r^2} \\ \qquad - \left(c_1 e^{\frac{x^{(3)}}{a}} + c_2 e^{-\frac{x^{(3)}}{a}}\right)^2 (dx^4)^2, \\ \text{mit } r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \quad c_1, c_2 \text{ Konstanten}, \quad a = \dfrac{c^2}{\sqrt{k}F}. \end{cases}$$

Der Raum ist zylindersymmetrisch um die Feldrichtung, und auf jeder Ebene senkrecht zur Feldrichtung herrscht dieselbe Geometrie wie im euklidischen Raum auf einer Kugel vom Radius a. Der Krümmungsradius a ist bei Feldern von normaler Größe außerordentlich groß, z. B. ist bei $F = 25000$ Gauß, $a = 1{,}5 \cdot 10^{15}$ km.

Weyl[338]) und in einer Reihe von Abhandlungen *Levi-Civita*[339]) haben auch allgemeine Lösungen für beliebige *zylindersymmetrische* Verteilungen von geladenen und ungeladenen Massen gegeben. Das G-Feld ist dann selbst zylindersymmetrisch und statisch. Entsprechend dem nicht linearen Charakter der Differentialgleichungen verhält sich g_{44} nicht additiv in den Massen.

---

337) *T. Levi-Civita,* Realtà fisica di alcuni spazî normali del Bianchi, Rend. Acc. Linc. (5) 26 (1917), 1. Hälfte, p. 458.

338) *H. Weyl,* Ann. d. Phys. 54, l. c. Anm. 324) und die Ergänzung Ann. d. Phys. 59 (1919), p. 185.

339) *T. Levi-Civita,* ds^2 einsteiniani in campi newtoniani I—IX, Rend. Acc. Linc. (5) 26 (1917); (5) 27 (1918); (5) 28 (1919). Die allgemeine Form der Differentialgleichungen des G-Feldes für den statischen Fall gibt *Levi-Civita* in der Anm. 307) zitierten Abhandlung Statica Einsteiniana.

60. Einsteins allgemeine Näherungslösung und ihre Anwendungen. Nur im statischen Fall ist es bisher gelungen, strenge Lösungen der Feldgleichungen der Gravitation zu finden. Es ist deshalb von großer Wichtigkeit, daß *Einstein*[340]) ein Verfahren angegeben hat, welches gestattet, bei beliebig schnell bewegten Massen das G-Feld näherungsweise zu ermitteln, wenn nur die Massen hinreichend klein sind. Die g_{ik} weichen dann nämlich nur wenig von ihren Normalwerten ab, so daß die Quadrate dieser Abweichungen vernachlässigt werden können, und von den Differentialgleichungen (401) des Gravitationsfeldes braucht nur der *lineare* Teil beibehalten zu werden, so daß die Integration leicht vollzogen werden kann.

Führen wir hier wieder die *imaginäre* Zeitkoordinate $x^4 = ict$ ein, so können wir setzen

$$g_{ik} = \delta_i^k + \gamma_{ik}, \tag{437}$$

woraus wegen $g_{i\alpha} g^{k\alpha} = \delta_i^k$ bis auf Größen höherer Ordnung

$$g^{ik} = \delta_i^k - \gamma_{ik} \tag{437a}$$

folgt. Es sei gleich bemerkt, daß die Größen γ_{ik} nur gegenüber Lorentz-Transformationen Tensorcharakter haben. Gemäß dem Ausdruck (94) für den verjüngten Krümmungstensor nehmen dann die Feldgleichungen (401) in der gewünschten Näherung die Form an:

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^i \partial x^k} + \sum_\alpha \left[\frac{\partial^2 \gamma_{ik}}{\partial x^{\alpha 2}} - \frac{\partial^2 \gamma_{i\alpha}}{\partial x^k \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 \gamma_{k\alpha}}{\partial x^i \partial x^\alpha} - \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^{\alpha 2}} - \sum_\beta \frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) \delta_i^k \right] = -2\varkappa T_{ik}. \tag{438}$$

Darin ist die Abkürzung eingeführt

$$\gamma = \sum_\alpha \gamma_{\alpha\alpha}. \tag{439}$$

Zur Vereinfachung führen wir zunächst die Größen

$$\gamma'_{ik} = \gamma_{ik} - \tfrac{1}{2} \delta_i^k \gamma \tag{440}$$

ein und fügen gleich noch die inversen, nach den ungestrichenen Größen aufgelösten Gleichungen

$$\gamma_{ik} = \gamma'_{ik} - \tfrac{1}{2} \delta_i^k \gamma', \tag{440a}$$

$$\gamma' = \sum \gamma'_{\alpha\alpha} = -\gamma \tag{439a}$$

hinzu. Dann ergibt sich aus (438)

$$\sum_\alpha \left[\frac{\partial^2 \gamma'_{ik}}{\partial x^{\alpha 2}} - \frac{\partial^2 \gamma'_{i\alpha}}{\partial x^k \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 \gamma'_{k\alpha}}{\partial x^i \partial x^\alpha} + \delta_i^k \sum_\beta \frac{\partial^2 \gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right] = -2\varkappa T_{ik}. \tag{438a}$$

340) *A. Einstein,* Berl. Ber. 1916, p. 688.

Diese Gleichungen lassen sich noch wesentlich weiter vereinfachen, wenn wir das Koordinatensystem in geeigneter Weise normieren. Durch die Forderung, daß sich die g_{ik} nur wenig von ihren Normalwerten unterscheiden, ist nämlich das Koordinatensystem selbst nur bis auf Größen von der Ordnung der γ_{ik} festgelegt. Man kann nun speziell die Koordinatenwahl so treffen, daß im normierten System die Gleichungen

$$\sum_\alpha \frac{\partial \gamma'_{i\alpha}}{\partial x^\alpha} = 0 \tag{441}$$

gelten. *Hilbert*[341]) hat den mathematischen Beweis dafür erbracht, daß bei beliebig vorgegebenen Werten der γ'_{ik} im ursprünglichen System stets ein solches Koordinatensystem gefunden werden kann, daß sich die neuen Koordinatenwerte von den alten nur um Größen von der Ordnung der γ'_{ik} unterscheiden und zugleich die Forderung (441) befriedigt wird. Man hat gerade vier Funktionen zur Verfügung, um die vier Gleichungen (441) zu erfüllen.

Offensichtlich werden die Differentialgleichungen (438a) dann einfach

$$\Box \gamma'_{ik} = -2\varkappa T_{ik}, \tag{442}$$

worin, wie in der speziellen Relativitätstheorie, $\Box \gamma'_{ik}$ für $\sum_\alpha \frac{\partial^2 \gamma'_{ik}}{\partial x^{\alpha^2}}$ geschrieben ist. Die Integration erfolgt in bekannter Weise durch retardierte Potentiale:

$$\gamma'_{ik}(x, y, z, t) = \frac{\varkappa}{2\pi}\int \frac{T_{ik}\left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t - \frac{r}{c}\right)}{r} d\bar{x}\, d\bar{y}\, d\bar{z}. \tag{443}$$

Wegen des Energiesatzes (341a), p. 720, ist hierdurch auch (441) mit der hier erstrebten Genauigkeit befriedigt.

Aus (443) geht hervor, daß sich die Gravitationswirkungen ebenso wie elektromagnetische Störungen mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Die Form der Gravitationswellen im leeren Raum folgt aus (441), (442), wenn man $T_{ik} = 0$ setzt. Speziell für eine ebene in der x_1-Achse fortschreitende Welle

$$\gamma_{ik} = a_{ik} e^{i\nu\left(t - \frac{x}{c}\right)} \tag{444}$$

folgt aus (441):

$$a_{k4} = -i a_{k1}, \tag{445}$$

(442) ist identisch erfüllt. *Einstein*[342]) zeigt überdies, daß durch ge-

341) *D. Hilbert,* Gött. Nachr., math.-phys. Kl. 1917, p. 53, l. c. Anm. 98).

342) *A. Einstein,* Über Gravitationswellen, Berl. Ber. 1918, p. 154.

eignete Koordinatenwahl erzielt werden kann, daß außerdem noch gilt:

$$(446)\qquad a_{11} = a_{12} = a_{13} = 0, \quad a_{22} = -a_{33}.$$

Über die Emission und Absorption von Gravitationswellen siehe die folgende Nr.

Für das Feld eines ruhenden Massenpunktes ergibt (443)

$$\gamma'_{44} = -\frac{4m}{r}, \text{ alle übrigen } \gamma'_{ik} = 0,$$

somit

$$\gamma_{44} = -\frac{2m}{r}, \quad \gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = +\frac{2m}{r}.$$

Man erkennt darin die Größen erster Ordnung des Feldes (421 b) wieder. Auch die Berechnung des Feldes von n bewegten Punkten läßt sich ohne weiteres ausführen.[343]) Es ergibt sich vor allem, daß die Abweichungen ihrer Bewegung von den Gesetzen der Newtonschen Mechanik nur von zweiter Ordnung in $\frac{v}{c}$ sind, wie es von der Erfahrung verlangt wird.

Auch der folgende Umstand bewirkt eine Abweichung von der Newtonschen Mechanik. Die relativistische Gravitationstheorie stimmt mit der Newtonschen darin überein, daß das Gravitationsfeld einer *ruhenden* Kugel dasselbe ist wie das Feld eines Massenpunktes. Dies gilt jedoch nicht für eine *rotierende* Kugel. Auf diesen Fall haben *Thirring* und *Lense*[344]) die Einsteinschen Formeln angewandt und die zugehörigen durch die Eigenrotation der Zentralkörper verursachten Störungen der Planeten- und Mondbahnen berechnet. Sie sind wohl alle zu klein, um beobachtet werden zu können. Eine allgemeine Diskussion der nach der *Einstein*schen Theorie zu erwartenden Abweichungen in den Störungen der Planeten- und Mondbahnen von denen der klassischen Mechanik gibt *De Sitter*[345]). Außer der Perihelbewegung des Merkur gibt es keine Abweichung, die der Beobachtung zugänglich ist.

Die wichtigste Anwendung der Einsteinschen Näherungslösung (443) stellt jedoch die Untersuchung von *Thirring*[346]) über die *Relativität der Zentrifugalkraft* dar. Da in der allgemeinen Relativitätstheorie die Vorgänge auch auf ein relativ zu einem Galileischen Be-

---

343) Sie wird nach einer von der *Einstein*schen etwas abweichenden Integrationsmethode von *J. Droste* gegeben: Amst. Proc. 19 (1916), p. 447.

344) *H. Thirring* u. *J. Lense,* Phys. Ztschr. 19 (1918), p. 156.

345) *W. De Sitter,* Monthly Not. Roy. Ast. Soc. 76 (1916), p. 699 u. 77 (1916), p. 155. Vgl. auch *De Sitters* Abhandlung Planetary motion and the motion of the moon according to Einsteins theory, Amst. Proc. 19 (1916), p. 367.

346) *H. Thirring,* Phys. Ztschr. 19 (1918), p. 33. Vgl. auch den Nachtrag Phys. Ztschr. 22 (1921), p. 29.

zugssystem rotierendes System bezogen werden können, muß sich die Zentrifugalkraft auch als eine von der relativen Rotation der Fixsternmassen herrührende Gravitationswirkung auffassen lassen. Man könnte nun meinen, die Möglichkeit einer solchen Auffassung sei in der allgemeinen Relativitätstheorie bereits durch die allgemeine Kovarianz der Feldgleichungen gewährleistet. Wie in Nr. 62 noch ausführlich erörtert werden wird, ist dies jedoch nicht der Fall, weil die Grenzbedingungen im Unendlichen dabei wesentlich mitspielen. *Thirring* stellte sich deshalb nicht die Aufgabe, die volle Äquivalenz der relativen Rotation des Fixsternhimmels mit einer Rotation des Bezugssystems gegenüber einem Galileiischen System nachzuweisen, sondern modifizierte die Fragestellung so, daß die Schwierigkeit der Festlegung der Grenzbedingungen eliminiert wird.

Wir denken uns in einem Inertialsystem der Newtonschen Gravitationstheorie außer den weit entfernten, ruhenden (bzw. mit sehr kleiner Geschwindigkeit geradlinig gleichförmig bewegten) Fixsternen eine rotierende Hohlkugel. Vom relativistischen Standpunkt aus ist es klar, daß im Innern der Hohlkugel Zentrifugal- und Corioliskräfte auftreten werden, wenn die Masse der Hohlkugel mit der Masse des Fixsternsystems vergleichbar wird. Dem Prinzip der Kontinuität gemäß wird man anzunehmen haben, daß solche Kräfte, wenn sie auch sehr klein sein werden, auch dann vorhanden sind, wenn die Masse der Hohlkugel klein ist. In diesem letzteren Fall dürfen wir aber ohne weiteres die Formeln (443) anwenden, weil dann die g_{ik} offensichtlich nur wenig von ihren Normalwerten abweichen. Die Ausrechnung zeigt nun, daß in der Tat ein Massenpunkt im Innern der Hohlkugel Beschleunigungen erfährt, die den Coriolis- und Zentrifugalbeschleunigungen der klassischen Mechanik vollständig analog sind. Ist ω der Vektor der Winkelgeschwindigkeit, $\mathfrak{r}$ das Lot von der Drehachse auf den Massenpunkt, $\mathfrak{v}$ dessen Geschwindigkeit, so sind diese Beschleunigungen natürlich nicht direkt gleich

$$2[\omega \mathfrak{v}] + \omega^2 \mathfrak{r},$$

wie es nach der klassischen Mechanik in einem relativ zum Inertialsystem mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Bezugssystem der Fall wäre; sondern diese zwei Terme sind noch mit Faktoren multipliziert, die von der Größenordnung des Verhältnisses des Gravitationsradius $m = \frac{kM}{c^2}$ der Hohlkugel zu ihrem Radius a sind. Da dieses Verhältnis für alle verfügbaren Massen winzig klein ist, besteht keine Aussicht, dieses prinzipiell wichtige Ergebnis experimentell zu prüfen; und man versteht auch, warum der primitive *Newton*sche Versuch mit

dem rotierenden Wassergefäß sowie auch der verfeinerte Versuch von *B.* und *T. Friedländer*[347]), innerhalb eines schweren rotierenden Schwungrades Zentrifugalkräfte nachzuweisen, negativ ausfallen mußten.

61. Die Energie des Gravitationsfeldes. Bereits in Nr. 54 haben wir gesehen, daß bei Vorhandensein eines Gravitationsfeldes die Differentialgesetze für den materiellen Energietensor nicht wie in der speziellen Relativitätstheorie die Form annehmen

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_i^k}{\partial x^k} = 0, \tag{341}$$

sondern

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_i^k}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \mathfrak{T}^{rs} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i} = 0, \tag{341a}$$

so daß aus ihnen für ein abgeschlossenes System nicht die Erhaltungssätze

$$\int \mathfrak{T}_i^4 \, dx^1 \, dx^2 \, dx^3 = \text{konst.}$$

gefolgert werden können. In Nr. 57 zeigten wir jedoch, daß auf Grund der Feldgleichungen der Gravitation (401) der Impuls-Energiesatz (341a) das Gleichungssystem

$$\frac{\partial (\mathfrak{T}_i^k + \mathfrak{t}_i^k)}{\partial x^k} = 0 \tag{406}$$

zur Folge hat, wo $\mathfrak{t}_i^k$ die durch (405), (183), (185) definierten Größen sind. Aus diesem Gleichungssystem resultieren nunmehr für ein abgeschlossenes System wieder Erhaltungssätze

$$J_i = \int (\mathfrak{T}_i^4 + \mathfrak{t}_i^4) \, dx^1 dx^2 dx^3 = \text{konst.} \tag{447}$$

Aus diesem Grunde nennt *Einstein* das Größensystem $\mathfrak{t}_i^k$ die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes und J_i Gesamtimpuls und Gesamtenergie des abgeschlossenen Systems (vgl. Nr. 57).

Bei näherer Prüfung wurden jedoch große Schwierigkeiten offenbar, die dieser Auffassung zunächst entgegenstehen. Sie rühren letzten Endes daher, daß die t_{ik} keinen Tensor bilden. Da diese Größen von höheren Ableitungen der g_{ik} als den ersten nicht abhängen, kann man sofort schließen, daß sie durch geeignete Koordinatenwahl (geodätisches Bezugssystem) in einem beliebig vorgegebenen Weltpunkt zum Verschwinden gebracht werden können.

Es gilt aber noch mehr: *Schrödinger*[348]) fand, daß für das Feld (421a) eines Massenpunktes, welches zugleich das Feld im Außenraum einer Flüssigkeitskugel darstellt, alle Energiekomponenten identisch verschwinden. Das Resultat läßt sich auch auf das Feld (435)

347) *B.* u. *T. Friedländer*, Absolute und relative Bewegung, Berlin 1896.

348) *E. Schrödinger*, Phys. Ztschr. 19 (1918), p. 4.

einer geladenen Kugel ausdehnen. Andererseits zeigte *Bauer*[349]), daß durch bloße Einführung von Polarkoordinaten in das euklidische Linienelement der speziellen Relativitätstheorie die Energiekomponenten von Null verschiedene Werte annehmen, es wird dann sogar die Gesamtenergie unendlich! Auch sind die t_{ik} keineswegs symmetrisch, und die Energiedichte $-t_4^4$ ist nicht überall positiv. Das Vorzeichen der Energiedichte des Gravitationsfeldes hatte ja schon bei den älteren Feldtheorien der Gravitation immer Schwierigkeiten gemacht.[349a])

Trotz dieser Schwierigkeiten ist aus physikalischen Gründen die Forderung nach einem Analogon zu den Energie- und Schwerpunktsintegralen der Newtonschen Theorie kaum abzuweisen. *Lorentz*[350]) und *Levi-Civita*[351]) haben deshalb vorgeschlagen nicht die Größen t_{ik}, sondern $\frac{1}{\varkappa} G_{ik}$ als die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes zu bezeichnen. Denn nach (401) gilt

$$T_{ik} + \frac{1}{\varkappa} G_{ik} = 0,$$

also auch

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\mathfrak{T}_i^k + \frac{1}{\varkappa}\mathfrak{G}_i^k\right) = 0.$$

Einstein[352]) hat jedoch dagegen mit Recht eingewendet, daß bei dieser Definition der Gravitationsenergie die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems stets Null wäre, und die Erhaltung dieses Energiewertes verlangt nicht die Fortexistenz des Systems in irgendeiner Form. Man könnte dann also aus den Erhaltungssätzen nicht solche Folgerungen ziehen, wie wir sie sonst zu ziehen gewohnt sind. In einer Erwiderung auf *Schrödingers* Arbeit konnte *Einstein*[353]) ferner zeigen, daß bei Wechselwirkung von mehreren Massen die t_{ik} sicher nicht überall verschwinden.

Die endgültige Klärung des Sachverhaltes brachte schließlich *Einsteins* Arbeit „Der Energiesatz in der allgemeinen Relativitätstheorie"[354]). Es wird hier der Beweis erbracht, daß die Werte (447)

349) *H. Bauer*, Phys. Ztschr. 19 (1918), p. 163.

349a) Vgl. darüber z. B. *M. Abraham*, Jahrb. f. Rad. u. El. 11 (1914), p. 570, l. c. Anm. 272).

350) *H. A. Lorentz*, Amst. Versl. 25 (1916), p. 468, l. c. Anm. 100).

351) *T. Levi-Civita*, Rend. Acc. Linc. (5) 26 (1917), 1. Hälfte, p. 381.

352) *A. Einstein*, Berl. Ber. 1918, p. 154, l. c. Anm. 342), § 6.

353) *A. Einstein*, Phys. Ztschr. 19 (1918), p. 115.

354) *A. Einstein*, Berl. Ber. 1918, p. 448; siehe auch *F. Klein*, Über die Integralform der Erhaltungssätze und die Theorie der räumlich geschlossenen Welt, Gött. Nachr., math.-phys. Kl., 1918, p. 394.

für Gesamtenergie und Gesamtimpuls eines abgeschlossenen Systems in ziemlich weitgehendem Maße vom Koordinatensystem unabhängig sind, obwohl die Lokalisation der Energie in den verschiedenen Koordinatensystemen im allgemeinen völlig verschieden ausfällt. Dieser Beweis wurde hernach von *Klein*[354]) vervollständigt (vgl. Nr. **21**). Man muß hiernach zwar den Werten der t_i^k selbst jede physikalische Bedeutung absprechen, d. h. es gelingt nicht, die Lokalisation von Energie und Impuls im Gravitationsfeld in allgemein kovarianter und physikalisch befriedigender Weise durchzuführen. Aber die Integralwerte (447) haben einen bestimmten physikalischen Sinn Die Bedeutung der Gleichung (406) liegt nur darin, daß sie die Änderung der materiellen Energie eines abgeschlossenen Systems in einfacher Weise zu berechnen gestattet.

Der Beweis der Invarianz der durch (447) definierten Größen J_k bei gewissen, weiter unten angegebenen Koordinatentransformationen ist sehr einfach zu führen. Es sei ein begrenztes abgeschlossenes System gegeben. Außerhalb eines gewissen Bereiches B desselben sei das Linienelement das der speziellen Relativitätstheorie (Galileisches Koordinatensystem). Wir betrachten zunächst nur solche Koordinaten K, die außerhalb B mit einem Galileischen Koordinatensystem übereinstimmen. Polarkoordinaten sind dadurch z. B. ausgeschlossen. Dann verschwindet der Integrand von (447) außerhalb der Weltröhre B und alle Voraussetzungen der Nr. **21** sind erfüllt. Aus dem dort Gesagten folgt: *Erstens:* Die Integralwerte von Impuls und Energie sind unabhängig von der Koordinatenwahl *innerhalb* B, wenn sich die Koordinaten nur stetig an ein Galileisches System außerhalb B anschließen. Und *zweitens:* Die Größen J_i verhalten sich gegenüber *linearen* Koordinatentransformationen — wobei jetzt also auch außerhalb B die Koordinatenwerte verändert werden — wie die kovarianten Komponenten eines Vektors. Über einen analogen Invarianzsatz für die räumlich geschlossene Welt siehe die folgende Nr.

Es bleibt noch die Frage zu erörtern, ob die Größen t_i^k durch die Gleichungen (406) eindeutig bestimmt sind, d. h. ob es nicht noch andere Größen w_i^k als die durch (405), (183), (185) gegebenen Größen t_i^k gibt, welche das Gleichungssystem (406) zufolge der Feldgleichungen (401) identisch befriedigen. Wie zuerst *Lorentz*[350a]) gezeigt hat und wie auch *Klein*[355]) hervorhebt, ist letzteres in der Tat der Fall, sobald man zugibt, daß die w_i^k auch die zweiten Ableitungen der

350a) *H. A. Lorentz*, l. c. Anm. 350).

355) *F. Klein*, Gött. Nachr. 1918, p. 235, l. c. Anm. 103).

g_{ik} enthalten dürfen. Physikalische Gründe lassen sich gegen diese Möglichkeit nicht beibringen. Man erhält dann natürlich verschiedene Werte für die Gesamtenergie eines Systems, je nachdem ob die *Einstein*schen t_i^k oder die *Lorentz*schen w_i^k zugrunde gelegt werden.

Von der Gleichung (406) macht *Einstein*[356]) eine wichtige Anwendung auf die Emission und Absorption der Gravitationswellen, deren Feld in Nr. **60** erörtert wurde. Wenn in einem materiellen System Schwingungen oder auch sonstige Bewegungen vor sich gehen, so folgt aus der Theorie, daß das System Wellen ausstrahlt, und zwar ist die Ausstrahlung bestimmt durch die dritten Ableitungen seiner Trägheitsmomente

$$D_{ik} = \int \mu_0 x^i x^k dx^1 dx^2 dx^3 \qquad (i, k = 1, 2, 3) \tag{448}$$

nach der Zeit. Der Energiestrom der ausgestrahlten Welle längs der x^1-Achse ist

$$\mathfrak{S}_1 = \frac{k}{8\pi c^5 r^2}\left[\left(\frac{\dddot{D}_{22} - \dddot{D}_{33}}{2}\right)^2 + (\dddot{D}_{23})^2\right] \tag{449}$$

(k = gewöhnliche Gravitationskonstante)

und die gesamte pro Zeiteinheit nach allen Richtungen ausgestrahlte Energie

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{k}{10 c^5}\left[\sum_{i,k} \dddot{D}_{ik}^2 - \frac{1}{3}\left(\sum_i \dddot{D}_{ii}\right)^2\right]. \tag{450}$$

Letztere ist nach (449) stets positiv. Die ausgestrahlte Energie ist so klein, daß sie zu keinen astronomischen Effekten Veranlassung gibt, die innerhalb der hierbei in Betracht kommenden Zeiträume bemerkbar wären. Sie ist jedoch von prinzipieller Bedeutung für die Atomphysik. *Einstein* vertritt die Ansicht, daß die Quantentheorie auch die Gravitationstheorie wird modifizieren müssen.

Ähnlich berechnet sich die absorbierte Energie. Es falle eine Gravitationswelle vom Typus (444), (445), (446) längs der x^1-Achse auf ein materielles System, dessen Dimensionen klein seien gegenüber der Wellenlänge der einfallenden Welle. Dann ist die pro Zeiteinheit absorbierte Energie gegeben durch

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial t}\ddot{D}_{23} + \frac{1}{2}\frac{\partial(\gamma_{22} - \gamma_{33})}{\partial t}\cdot\frac{1}{2}\left(\ddot{D}_{22} - \ddot{D}_{33}\right)\right], \tag{451}$$

wobei sich die Größen $\gamma_{23}, \gamma_{22}, \gamma_{33}$ auf das Wellenfeld beziehen.

62. Modifikation der Feldgleichungen. Relativität der Trägheit und räumlich-geschlossene Welt.[357]) a) *Das Machsche Prinzip.*

---

356) *A. Einstein,* l. c. Anm. 342).

357) Die in diesem Abschnitt dargelegten Gedanken sind in *A. Einsteins* Arbeit „Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie" (Berl.

In Nr. 58 war von der Perihelbewegung des Merkur schlechtweg die Rede, ohne daß eine nähere Angabe gemacht wurde, wodurch das dort verwendete Koordinatensystem K_0, relativ zu welchem diese Perihelbewegung gemessen werden soll, physikalisch bestimmt ist. Dieses ist vor allen anderen relativ zu K_0 gleichförmig rotierenden Bezugssystemen K durch die Kugelsymmetrie des G-Feldes und vor allem durch das Verhalten der g_{ik} im räumlich Unendlichen ausgezeichnet; die g_{ik} nehmen nämlich dort ihre Normalwerte an. Die Grenzbedingungen für das räumlich Unendliche, die zur vollständigen Bestimmung der g_{ik} aus den Lagen und Geschwindigkeiten der Massen, allgemeiner aus dem materiellen Energietensor T_{ik}, den Differentialgleichungen des G-Feldes noch hinzugefügt werden, zeichnen gewisse Koordinatensysteme K_0 vor anderen aus. Bei der Frage der Relativität der Zentrifugalkräfte (Nr. 60) hatte sich diese Schwierigkeit besonders stark fühlbar gemacht. Diese Auszeichnung von gewissen Koordinatensystemen durch die Grenzbedingungen ist zwar mit dem Postulat der allgemeinen Kovarianz nicht logisch unvereinbar, widerspricht aber dem Geist einer relativistischen Theorie und muß als schwerer erkenntnistheoretischer Mangel bezeichnet werden. *Einstein*[358]) beleuchtet ihn drastisch durch ein Gedankenexperiment mit zwei relativ zueinander um ihre Verbindungslinie rotierenden Flüssigkeitsmassen. Er haftet nicht nur der klassischen Mechanik und der speziellen Relativitätstheorie an, sondern auch der im vorhergehenden entwickelten, auf den Gleichungen (401) basierenden Gravitationstheorie. Er wird erst behoben, wenn die Grenzbedingungen in allgemein kovarianter Weise festgelegt sind.

Wir stellen also die Forderung auf: *Das G-Feld soll durch die Werte des Energietensors* (T_{ik}) *allein in eindeutiger, allgemein kovarianter Weise bestimmt sein.* Da *Mach*[359]) bereits den hier erwähnten Mangel der Newtonschen Mechanik klar erkannt und die absolute Beschleunigung durch eine Relativbeschleunigung gegen die übrigen Massen des Weltalls ersetzt hat, nannte *Einstein*[360]) dieses Postulat gelegentlich *Mach*sches Prinzip. Insbesondere ist zu fordern, daß die Trägheit der Materie durch die umgebenden Massen allein bestimmt ist, also verschwinden soll, wenn alle übrigen Massen entfernt werden,

---

Ber. 1917, p. 142) entwickelt. (Auch abgedruckt in der Sammlung „Das Relativitätsprinzip".)

358) *A. Einstein,* Ann. d. Phys. 49, l. c. Anm. 279), § 2.

359) *E. Mach,* Mechanik, Kap. II, Nr. 6; Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit, Zusatznote 1.

360) *A. Einstein,* Ann. d. Phys. 55 (1918), p. 241.

weil es vom relativistischen Standpunkt aus keinen Sinn hat, von einem Widerstand gegen *absolute* Beschleunigungen zu sprechen (*Relativität der Trägheit*).

b) *Betrachtungen über das statistische Gleichgewicht des Fixsternsystems. Das λ-Glied.* Auch abgesehen von der Frage der Grenzbedingungen im räumlich Unendlichen stößt man noch auf eine weitere Schwierigkeit, wenn man die bisher verwendeten Feldgleichungen auf das Fixsternsystem als Ganzes anwendet. Die Überwindung derselben wird dann auch die Erfüllung der unter a) gestellten Forderungen mit sich bringen.

Schon *C. Neumann*[361]) und *Seeliger*[362]) haben darauf hingewiesen, daß das Newtonsche Gravitationsgesetz nur dann strenge gültig sein kann, wenn die Massendichte des Weltalls für $r \longrightarrow \infty$ schneller als $\frac{1}{r^2}$ zu Null konvergiert. Sonst würde nämlich die von allen Massen des Weltalls auf einen Massenpunkt ausgeübte Kraft unbestimmt sein. In einer folgenden Abhandlung[363]) diskutiert *Seeliger* weiter die Möglichkeit, daß die Massendichte zwar in beliebigen Entfernungen von Null verschieden bleibt, das Newtonsche Potential dagegen durch das mit der Entfernung rascher abklingende Potential

$$\Phi = A \frac{e^{-\sqrt{\lambda} r}}{r}$$

zu ersetzen sei. Dieses Potential war bereits in anderem Zusammenhange von *C. Neumann*[364]) mathematisch untersucht worden. Es kommt darauf hinaus, die *Poisson*sche Gleichung

$$\text{(A)} \qquad \Delta \Phi = 4\pi k \mu_0$$

durch

$$\text{(B)} \qquad \Delta \Phi - \lambda \Phi = 4\pi k \mu_0$$

zu ersetzen. Die Schwierigkeit, die bei der Newtonschen Theorie auftritt, verschwindet dann.

Gegen die erste Möglichkeit — strenge Gültigkeit des Newtonschen Gesetzes und hinreichend schnelles Abnehmen der Massendichte im Unendlichen — lassen sich nun nach *Einstein* gewichtige Gründe vorbringen, wenn man sich auf den Standpunkt stellt, daß sich das

361) *C. Neumann,* Abh. d. Kgl. sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig, math.-nat. Kl. 26 (1874), p. 97.

362) *H. v. Seeliger,* Astr. Nachr. 137 (1895), p. 129.

363) *H. v Seeliger,* Münch. Ber. 26 (1896), p. 373.

364) *C. Neumann,* Allgemeine Untersuchungen über das Newtonsche Prinzip der Fernwirkungen, Leipzig 1896, vgl. insbesondere p. 1.

ganze Sternsystem im statistischen Gleichgewicht befinden muß. Wäre das Potential in großen Entfernungen endlich (also die Massendichte hinreichend stark abnehmend), so müßte es vorkommen, daß ganze Himmelskörper das Fixsternsystem verlassen, dieses müßte also „veröden", und zwar nach den Gesetzen der statistischen Mechanik so lange, als die gesamte Energie des Sternsystems größer ist als die Arbeit, die erforderlich ist, um einen einzigen Himmelskörper ins Unendliche zu entfernen. Auch der schon durch *C. Neumanns* und *Seeligers* Untersuchungen ausgeschlossene Fall eines unendlich hohen Potentialwertes in sehr großen Entfernungen (also die Massendichte bis ins Unendliche reichend oder nicht genügend schnell abnehmend) verbietet sich nach *Einstein*, weil dies mit der Tatsache im Widerspruch stünde, daß die beobachteten Sterngeschwindigkeiten verhältnismäßig klein sind. Bei Gültigkeit von (B) verschwinden jedoch alle diese Schwierigkeiten. Denn es ist dann eine gleichmäßige Massenverteilung der Materie von der Dichte μ_0 und dem (räumlich konstanten) Potential

$$\Phi = -\frac{4\pi k}{\lambda}\mu_0$$

dynamisch möglich.

Genau analog wie in der Newtonschen stellt sich in der relativistischen Theorie die Sachlage dar. Hält man an den Gleichungen (401) fest, so erweist es sich nach *Einstein* als unmöglich, die Grenzbedingungen so aufzustellen, daß zugleich dem „Verödungseinwand" begegnet und der Tatsache der geringen Sterngeschwindigkeiten Rechnung getragen wird. Man kann jedoch die Feldgleichungen in einer Weise modifizieren, die dem Übergang von (A) zu (B) völlig analog ist. In der Tat haben wir bei der Aufstellung der Feldgleichungen in Nr. 56 das zu g_{ik} proportionale Glied $c_3 g_{ik}$ in (400) einfach fortgelassen, was weder durch die allgemeine Kovarianz noch durch den Impuls-Energiesatz der Materie geboten war, und können es jetzt in die linke Seite von (401) aufnehmen, wobei wir im Anschluß an *Einstein* $-\lambda$ für c_3 schreiben:

$$G_{ik} - \lambda g_{ik} = -\varkappa T_{ik}. \tag{452}$$

Durch Verjüngung ergibt sich daraus noch

$$R + 4\lambda = +\varkappa T \tag{453}$$

und

$$R_{ik} + \lambda g_{ik} = -\varkappa(T_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} T). \tag{452a}$$

Es folgt sofort, daß bei Zugrundelegung der so modifizierten Feldgleichungen eine mit konstanter Massendichte angefüllte Welt im Gleichgewicht ist. Und zwar erweist sie sich als elliptisch oder sphä-

risch, also *räumlich geschlossen.* Macht man nämlich den besonderen Ansatz

$$(454)\quad g_{ik} = \delta_i^k + \frac{x^i x^k}{a^2 - [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]},\ g_{i4} = 0,\ g_{44} = -1,\ (i,k = 1,2,3)$$

so wird nach Nr. 18, (117), (118), (119), (130):

$$R_{ik} = -\frac{2}{a^2} g_{ik},\quad R = -\frac{6}{a^2},\quad G_{ik} = \frac{1}{a^2} g_{ik},\quad (\text{für } i,k = 1,2,3)$$

$$R_{i4} = R_{44} = 0.$$

Ferner wird

$$T_{44} = \mu_0 c^2,\quad \text{die übrigen } T_{ik} = 0,\quad T = -\mu_0 c^2;$$

die Gleichungen (452) sind also erfüllt, wenn

$$(455)\qquad \lambda = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{2} \varkappa \mu_0 c^2 = \frac{4\pi k \mu_0}{c^2}.$$

Aus den Feldgleichungen (401) würde dagegen wegen $\lambda = 0$ auch $\frac{1}{a^2} = \mu_0 = 0$ folgen.

Da die Welt sich in diesem Beispiel und voraussichtlich auch bei allgemeineren Massenverteilungen räumlich geschlossen ergibt, so sind Grenzbedingungen im Unendlichen nicht weiter erforderlich. *Die Feldgleichungen* (452) *beseitigen also nicht nur den Konflikt der kleinen Sterngeschwindigkeiten mit der statistischen Mechanik, sondern auch den oben erwähnten erkenntnistheoretischen Mangel, welcher der früheren Fassung der Theorie anhaftet.* Man hat sich vorzustellen, daß die Lösung (454) der Feldgleichungen das mittlere Verhalten der Weltmetrik wiedergibt. Nur in der Nähe von einzelnen Massen werden die g_{ik} merklich von den Werten (434) abweichen. Bei Massensystemen, deren Dimensionen klein gegen diesen jedenfalls außerordentlich großen Krümmungsradius sind, wie z. B. beim Planetensystem, wird man das λ-Glied vernachlässigen können, und die Lösungen der Feldgleichungen (401) werden ihre Gültigkeit behalten. Auch das *Mach*sche Prinzip scheint durch die Feldgleichungen (452) erfüllt zu sein, obzwar ein allgemeiner Beweis dafür noch nicht erbracht ist. Während nämlich die früheren Gleichungen (401) bei verschwindender Materie die allgemeine Lösung $g_{ik} =$ konst. besitzen[365]), ist dies bei den Gleichungen (452) nicht der Fall, sondern es muß dann $g_{ik} = 0$ sein. *In einem völlig leeren Raum gäbe es überhaupt kein G-Feld*; weder eine Lichtfortpflanzung, noch die Existenz von

365) Daß dies die einzige Lösung der früheren Gleichungen (401) für den völlig materiefreien Raum ist, ist bisher noch nicht im allgemeinen Fall bewiesen. Für den *statischen* Fall hat jedoch *R. Serini*, Rend. Acc. Linc. (5) 27 (1918), 1. Hälfte, p. 235, einen Beweis des Satzes gegeben.

Maßstäben und Uhren wären dann möglich. Damit hängt zusammen, daß auch das Postulat der Relativität der Trägheit befriedigt ist. Allerdings hat *de Sitter*[366]) auch für den völlig *leeren* Raum eine von $g_{ik} = 0$ verschiedene Lösung der Feldgleichungen (452) gegeben, nämlich eine vierdimensional-pseudosphärische Welt

$$g_{ik} = \delta_i^k + \frac{x^i x^k}{a^2 - \sum_1^4 i (x^i)^2}, \quad (i, k = 1, 2, 3, 4;\ x^4 = ict) \tag{456}$$

$$T_{ik} = \mu_0 = 0, \quad \lambda = \frac{3}{a^2}, \tag{457}$$

im Gegensatz zur „Zylinderwelt" *Einsteins*, die durch (454) gegeben ist. Jedoch vertrat *Einstein*[367]) die Anschauung, daß erstere Lösung nicht überall regulär ist, so daß sie eigentlich nicht das G-Feld einer leeren Welt, sondern einer Welt mit flächenhaft verteilter Masse darstellt. Zu einem übereinstimmenden Resultat kam *Weyl*[368]). Die Frage ist jedoch noch nicht endgültig geklärt.

Die astronomischen Konsequenzen der Feldgleichungen (452) werden diskutiert von *de Sitter*[369]) und *Lense*[370]). Man vgl. dazu auch den Art. VI 2, 22 von *Kottler.*

c) *Die Energie der geschlossenen Welt.* Ebenso wie die Gleichungen (401) lassen sich auch die Gleichungen (452) aus einem Variationsprinzip ableiten. Man braucht nur zur Wirkungsfunktion (404) noch den Term $2\lambda\sqrt{-g}$ hinzuzufügen:

$$\delta \int \mathfrak{H}\, dx = 0, \tag{458}$$

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{R} + 2\lambda\sqrt{-g} + \varkappa \mathfrak{M}. \tag{459}$$

Auch gilt wieder der Energiesatz in der Form (406):

$$\frac{\partial(\mathfrak{T}_i^k + \tilde{\mathfrak{t}}_i^k)}{\partial x^k} = 0, \tag{460}$$

wenn man von den früheren Größen t_i^k noch $\frac{\lambda}{\varkappa}\delta_i^k$ subtrahiert:

$$\tilde{t}_i^k = t_i^k - \frac{\lambda}{\varkappa}\delta_i^k. \tag{461}$$

---

366) *W. de Sitter,* Amst. Proc. 19 (1917), p. 1217 u. 20 (1917), p. 229.

367) *A. Einstein,* Berl. Ber. 1918, p. 270; *De Sitters* Erwiderung: Amst. Proc. 20 (1918), p. 1309.

368) *H. Weyl,* Phys. Ztschr. 20 (1919), p. 31; vgl. auch *F. Klein,* Gött. Nachr. 1918, l. c. Anm. 354), insbes. § 9. Es werden hier die geometrischen Verhältnisse eingehend diskutiert.

369) *W. de Sitter,* Monthly Not. Roy. Astr. Soc. 78 (1917), p. 3.

370) *J. Lense,* Wien. Ber. 126 (1917), p. 1037.

Diese Überlegung findet sich in der eingangs [Anm. 357)] zitierten *Einstein*schen Arbeit angedeutet und bei *Klein*[371]) näher ausgeführt.

Es fragt sich nun, ob der in Nr. **61** bewiesene Satz der Unabhängigkeit des *Integralwertes* der Energie vom Koordinatensystem auch für die Gesamtenergie der geschlossenen Welt gilt. Hierzu ist deshalb eine neue Überlegung nötig, weil früher der Satz unter der Voraussetzung bewiesen wurde, daß außerhalb des betrachteten abgeschlossenen Systems die g_{ik} gleich $\pm \delta_i^k$ werden, was hier offenbar nicht der Fall ist. Mit dieser Frage beschäftigten sich *Einstein*[372]) und *Klein*[372]). Es muß gezeigt werden, daß gewisse Oberflächenintegrale verschwinden. Bei speziellen Koordinatensystemen wurde bereits von *Einstein* nachgewiesen, daß dies in der Tat zutrifft, einen allgemeinen Beweis gibt *Grommer*[373]). Es zeigt sich überdies, daß sowohl der Gesamtimpuls als auch die Gesamtenergie der geschlossenen Welt, soweit sie vom Gravitationsfeld herrühren, verschwinden:

$$\int t_i^4 \, dx^1 \, dx^2 \, dx^3 = 0. \tag{462}$$

Setzt man jedoch an Stelle der *Einstein*schen Energiekomponenten die in Nr. **61** erwähnten *Lorentz*schen, die auch die zweiten Ableitungen der g_{ik} enthalten, so würde, wie *Klein* gezeigt hat, die Gesamtenergie des Gravitationsfeldes nicht mehr verschwinden.

V. Theorien über die Natur der elektrischen Elementarteilchen.

63. Elektron und spezielle Relativitätstheorie. Schon seit langer Zeit war man bemüht, alle mechanischen Eigenschaften des Elektrons auf elektromagnetische Prinzipien zurückzuführen. Die Bewegungsgleichung

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \mathfrak{K} \tag{463}$$

($\mathfrak{G}$ = Impuls des Elektrons, $\mathfrak{K}$ = *äußere* Kraft)

wird hierbei so gedeutet[374]): Man stellt die Postulate auf, daß erstens alle auf das Elektron wirkenden Kräfte elektromagnetischer Art sind, also durch den *Lorentz*schen Ausdruck (215) gegeben sind, und zweitens die auf das Elektron wirkende Gesamtkraft stets verschwinden soll:

$$\int \varrho \left\{ \mathfrak{E} + \frac{1}{c} [\mathfrak{v} \mathfrak{H}] \right\} dV = 0. \tag{464}$$

371) *F. Klein*, Gött. Nachr. 1918, p. 235, l. c. Anm. 103), Zusatz am Schluß.

372) *A. Einstein*, Berl. Ber. 1918; *F. Klein*, Gött. Nachr. 1918, p. 394, l. c. Anm. 354).

373) *J. Grommer*, Berl. Ber. 1919, p. 860.

374) Man vgl. hierzu Art. V 14 dieser Encykl. von *H. A. Lorentz*, Nr. 21.

Die Integration ist hierin über ein Elektron zu erstrecken. Diese Gesamtkraft kann man nun in zwei Teile teilen. Eine vom äußeren Feld herrührende Kraft

$$\int \varrho \left\{ \mathfrak{E}^a + \frac{1}{c} [\mathfrak{v} \mathfrak{H}^a] \right\} dV = \mathfrak{K},$$

die auf der rechten Seite von (463) steht, und eine vom Elektron auf sich selbst ausgeübte Kraft, die nach dem Impulssatz gleichgesetzt werden kann

$$\int \varrho \left\{ \mathfrak{E}^i + \frac{1}{c} [\mathfrak{v} \mathfrak{H}^i] \right\} dV = -\frac{d\mathfrak{G}}{dt}.$$

$\mathfrak{G}$ bedeutet darin den elektromagnetischen Impuls des Eigenfeldes des Elektrons. Bei nicht allzu großen Beschleunigungen (quasistationärer Bewegung) kann dafür derjenige Impuls genommen werden, welcher der gleichförmigen Translationsbewegung des Elektrons mit der betreffenden Momentangeschwindigkeit entspricht. Er ist natürlich abhängig von der Ladungsverteilung im Elektron.

Die naheliegendste Annahme war die, daß das Elektron vollkommen starr sei. Die Theorie für diesen Fall wurde vollständig von *Abraham*[375]) durchgeführt. Im Jahre 1904 zeigte jedoch *H. A. Lorentz*[376]), daß nur dann der Impuls des Elektrons in einer solchen Weise von der Geschwindigkeit abhängt, daß die Folgerungen mit dem Relativitätsprinzip im Einklang stehen, wenn eine Kontraktion des Elektrons in der Bewegungsrichtung im Verhältnis $\sqrt{1-\beta^2} : 1$ angenommen wird. Und *Einstein*[377]) zeigte hierauf, daß die Abhängigkeit von Energie, Masse und Impuls von der Geschwindigkeit aus dem Relativitätsprinzip allein folgt, ohne daß irgendeine Annahme über die Natur des Elektrons gemacht werden muß (vgl. Nr. 29). Man kann deshalb auch umgekehrt aus den Beobachtungen über die Massenveränderlichkeit keinen Aufschluß über die Natur des Elektrons erhalten.

Es ist jedoch leicht zu sehen, daß das Relativitätsprinzip die Existenz einer Energie nicht elektromagnetischer Art beim Elektron zur zwingenden Konsequenz hat, wenigstens solange man auf dem Boden der *Maxwell-Lorentz*schen Theorie bleibt. Es wurde dies zuerst von *Abraham*[378]) hervorgehoben. Nehmen wir zunächst an, daß die Ladungsverteilung im ruhenden Elektron kugelsymmetrisch ist.

---

375) *M. Abraham,* Ann. d. Phys. 10 (1903), p. 105. Siehe auch *H. A. Lorentz,* Art. V 14 dieser Encykl., Nr. 21.

376) *H. A. Lorentz,* Amst. Versl. 1904, l. c. Anm. 9).

377) *A. Einstein,* Ann. d. Phys. 17 (1905), p. 891, l. c. Anm. 11), § 10.

378) *M. Abraham,* Phys. Ztschr. 5 (1904), p. 576; Theorie d. Elektrizität 2, p. 205, Leipzig 1905, 1. Aufl.

Dann gilt für Energie und Impuls des bewegten Elektrons, soweit sie elektromagnetischer Art und durch die *Maxwell-Lorentz*schen Ausdrücke gegeben sind, nach (351):

$$(351) \qquad \mathfrak{G} = \mathfrak{u} \frac{\frac{4}{3}\frac{E_0}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad E = \frac{E_0\left(1+\frac{1}{3}\frac{u^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Wären diese Ausdrücke zugleich Gesamtenergie und Gesamtimpuls, so müßte nach (317), (318) gelten

$$E = \int \left(\mathfrak{u}\frac{d\mathfrak{G}}{dt}\right) dt = \int \left(\mathfrak{u}\frac{d\mathfrak{G}}{d\beta}\right) d\beta.$$

Dies ist jedoch nicht der Fall, vielmehr hat das Integral der rechten Seite den Wert

$$\frac{\frac{4}{3}E_0}{\sqrt{1-\beta^2}} + \text{konst.}$$

Nimmt man den *Impuls* im Gegensatz zur Energie als rein elektromagnetisch an, so folgt für die gesamte Energie $\overline{E}_0$ bzw. $\overline{E}$ des ruhenden bzw. bewegten Elektrons, sowie für die Ruhmasse

$$(465) \qquad \overline{E} = \frac{\overline{E}_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \overline{E}_0 = \frac{4}{3}E_0, \quad m_0 = \frac{\overline{E}_0}{c^2} = \frac{4}{3}\frac{E_0}{c^2}.$$

Die Ruhmasse m_0 ist dabei definiert durch

$$\mathfrak{G} = \frac{m_0 \mathfrak{u}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Diese Relationen sind mit dem Satz von der Trägheit der Energie im Einklang, wie es sein muß (die additive Konstante in $\overline{E}$ wurde bereits diesem Satz entsprechend festgelegt). *Die Gesamtenergie des ruhenden Elektrons ist gleich $\frac{4}{3}$ der Lorentzschen elektromagnetischen Energie desselben.*

Es hat nach den bisherigen Betrachtungen den Anschein, als ob das starre Elektron der Absoluttheorie mit einem rein elektromagnetischen Weltbild — oder besser gesagt, mit dem speziellen elektromagnetischen Weltbild, das auf der *Maxwell-Lorentz*schen Theorie basiert — vereinbar wäre im Gegensatz zu dem Elektron, wie es von der Relativitätstheorie gefordert wird. Dies ist jedoch aus folgendem Grunde nicht richtig. Die Starrheitshypothese ist ein der Elektrodynamik vollständig fremdes Element. Hätten wir sie nicht eingeführt, so hätten wir verlangen müssen, daß nicht nur die an dem Elektron angreifende *Gesamt*kraft verschwindet [Gl. (464)], sondern sogar die an jeder einzelnen Stelle angreifende Kraft:

$$\varrho\left\{\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}]\right\} = 0.$$

Es ist klar, daß mit dieser Forderung eine ruhende Ladung ($\mathfrak{v} = 0$)

unvereinbar ist, es folgt $\varrho = 0$ (man beachte die Beziehung $\operatorname{div} \mathfrak{E} = \varrho$). Wir sehen also: *Die Maxwell-Lorentzsche Elektrodynamik ist mit der Existenz von Ladungen überhaupt unvereinbar, sofern sie nicht durch ihr wesensfremde theoretische Elemente ergänzt wird.* Das Elektron der Absoluttheorie hat also in Wirklichkeit, was die rein elektromagnetische Auffassung anlangt, vor dem Elektron der Relativitätstheorie nichts voraus. Es ist auf jeden Fall nötig, Kräfte einzuführen, welche den *Coulomb*schen Abstoßungskräften der Ladung des Elektrons auf sich selbst das Gleichgewicht halten, und diese Kräfte resultieren nicht aus der *Maxwell-Lorentz*schen Elektrodynamik. Schon *Poincaré*[379]) erkannte diese Notwendigkeit und führte rein formal einen skalaren Kohäsionsdruck p ein, über dessen Natur er keine Aussagen machen konnte. Allgemein ist das Problem des Elektrons so zu formulieren: Der Impuls-Energietensor S_{ik} der *Maxwell-Lorentz*schen Elektrodynamik ist durch solche Terme zu ergänzen, daß die Erhaltungssätze

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0 \tag{341}$$

für den gesamten Impuls-Energietensor mit der Existenz von Ladungen vereinbar werden. Die Zusatzterme müssen jedenfalls von physikalischen Zustandsgrößen abhängen, die durch Differentialgleichungen kausal bestimmt sind. (In Nr. **42** hatten wir für den Energietensor eines isolierten Elektrons den phänomenologischen Ansatz $\mu_0 u_i u_k$ gemacht.) Inwiefern diese Formulierung vom Standpunkt der *allgemeinen* Relativitätstheorie zu modifizieren ist, wird in Nr. **65** und **66** erörtert werden.

Wir können jetzt auch die von *Ehrenfest*[380]) aufgeworfene Streitfrage beantworten, ob für ein schon in der Ruhe nicht kugelsymmetrisches Elektron eine gleichförmige Translationsbewegung nach jeder Richtung hin kräftefrei möglich ist. Es wird nämlich in diesem Fall der elektromagnetische Impuls des bewegten Elektrons nicht immer die Richtung der Geschwindigkeit haben, so daß die elektromagnetischen Kräfte ein Drehmoment auf das Elektron ausüben werden. Die Verhältnisse sind jedoch, wie *Laue*[381]) betont hat, völlig analog denjenigen beim *Trouton-Noble*schen Versuch. So wie dort das elektromagnetische Drehmoment durch das vom elastischen Energiestrom hervorgerufene kompensiert wird, erfolgt die Kompensation hier durch den Energiestrom, der durch die oben erwähnten Zusatzterme im Im-

379) *H. Poincaré,* Rend. Pal. 21 (1906), p. 129, l. c. Anm. 40).

380) *P. Ehrenfest,* Ann. d. Phys. 23 (1907), p. 204; Bemerkung hierzu von *A. Einstein,* Ann. d. Phys. 23 (1907), p. 206.

381) *M. v. Laue,* Ann. d. Phys. 35 (1911), p. 524, l. c. Anm. 240).

puls-Energietensor dargestellt wird. Die Einführung dieser Zusatzterme erweist sich nicht erst beim bewegten, sondern schon beim ruhenden Elektron als notwendig. Die *Ehrenfest*sche Frage ist also zu bejahen.

Es bleibt noch die Frage zu erörtern, was von diesem theoretischen Standpunkt aus und was erfahrungsgemäß über die *Dimensionen* des Elektrons ausgesagt werden kann. *Erfahrungsgemäß* wissen wir heute mit ziemlich großer Wahrscheinlichkeit, daß alle Materie letzten Endes aus Wasserstoffkernen und Elektronen besteht. *Alles was wir bisher über das Elektron sagten, gilt natürlich auch für den Wasserstoffkern.* Die Erfahrung hat über die Dimension dieser Teilchen nur gelehrt, daß sie sicher nicht größer als 10^{-13} cm sind, d. h. daß sich zwei solche Teilchen in dieser Entfernung in bezug auf die Kräfte, die sie aufeinander ausüben, praktisch noch wie Punktladungen verhalten. Daß die Dimensionen der Teilchen noch viel kleiner sind als 10^{-13} cm, wird durch die bisherigen Erfahrungen nicht ausgeschlossen. *Theoretisch* kann man nur vom Standpunkte der *Lorentz*schen Anschauungen aus bestimmte Aussagen machen, nämlich folgende: Eine mit gleichmäßiger Oberflächenladung belegte Kugel vom Radius a hat die Energie

$$E = \frac{e^2}{8\pi a},$$

wenn e die in *Heaviside*schen Einheiten gemessene Gesamtladung bedeutet. Aus (465) folgt dann

$$m_0 = \frac{e^2}{6\pi a c^2}, \quad a = \frac{e^2}{6\pi m_0 c^2}. \tag{466}$$

Eine Veränderung der Annahme über die Ladungsverteilung würde nur den Zahlenfaktor modifizieren, nicht die Größenordnung des a-Wertes. Dieser ergibt sich aus den bekannten Ruhmassen für Elektron und Wasserstoffkern, für ersteres von der Größenordnung 10^{-13} cm, für diesen entsprechend seiner größeren Masse ca. 1800 mal kleiner. Es muß jedoch bemerkt werden, daß diese Betrachtung auf sehr schwachen theoretischen Grundlagen steht. Sie beruht nämlich, wie wir gesehen haben, auf folgenden Hypothesen:

1. Die Ladungsverteilung des ruhenden Elektrons (H-Kerns) ist kugelsymmetrisch.

2. Der gesamte Impuls des bewegten Elektrons (H-Kerns) ist durch den Ausdruck $\mathfrak{G} = \frac{1}{c}\int [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]\, dV$ der *Maxwell-Lorentz*schen Theorie gegeben; diese wird also auch bei äußerster Konzentration der Ladungen und Felder noch als gültig angenommen.

Besonders die zweite Hypothese erscheint bedenklich. Eine empirische Stütze für die so berechneten Dimensionen, insbesondere für die theoretische Forderung, daß der Radius des Wasserstoffkerns wesentlich kleiner sein muß als der des Elektrons, läßt sich aus dem bis jetzt gesammelten Erfahrungsmaterial in keiner Weise finden.[381a])

64. Die Theorie von Mie. Den ersten Versuch, eine Theorie aufzustellen, welche von der Existenz der elektrischen Elementarteilchen Rechenschaft gibt, hat *Mie*[382]) unternommen. Er stellte sich die Aufgabe, die Feldgleichungen und den Impuls-Energietensor der *Maxwell-Lorentz*schen Theorie so zu verallgemeinern, daß im Innern der elektrischen Elementarteilchen den *Coulomb*schen Abstoßungskräften durch andere Kräfte, *die ebenfalls elektrischer Natur sind,* das Gleichgewicht gehalten wird, außerhalb der Teilchen jedoch die Abweichungen von der gewöhnlichen Elektrodynamik unmerklich bleiben.

Das erste System der *Maxwell*schen Gleichungen

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0, \tag{203}$$

aus dem die Existenz eines Viererpotentials folgt,

$$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^k} \tag{206}$$

(vgl. Nr. 28), behält *Mie* bei. Ferner wird der Viererstrom jedenfalls die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial s^k}{\partial x^k} = 0 \tag{197}$$

erfüllen müssen. Daraus folgt die Existenz eines Flächentensors $H^{ik} = -H^{ki}$, welcher der Gleichung

$$s^i = \frac{\partial H^{ik}}{\partial x^k} \tag{467}$$

genügt. Dabei faßt H_{ik} die Vektoren $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$ zusammen, ebenso wie F_{ik} die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{B}$. Man sieht, daß für $H^{ik} = F^{ik}$ die Gleichungen in die der gewöhnlichen Elektrodynamik übergehen und daß sie formal mit denen der phänomenologischen Elektrodynamik in ponderablen Körpern übereinstimmen.

381a) Wir können in diesem Punkte der Darstellung in *M. Borns* Buch, Die Relativitätstheorie Einsteins, Berlin 1920, p. 192 nicht beistimmen.

382) *G. Mie,* Grundlagen einer Theorie der Materie, Ann. d. Phys. 37 (1912), p. 511; 39 (1912), p. 1; 40 (1913), p. 1. Vgl. auch die Darstellung bei *M. Born,* Gött. Nachr., math.-phys. Kl. 1914, p 23, wo die Analogie der Ableitung des Impuls-Energiesatzes aus dem Wirkungsprinzip der *Mie*schen Theorie zur Ableitung des Energiesatzes aus dem Hamiltonschen Prinzip in der gewöhnlichen Mechanik herausgearbeitet wird. Ferner *H. Weyl,* Raum — Zeit — Materie, 1. Aufl. 1918, § 25, p. 165; 3. Aufl. 1920, § 25, p. 175.

Nun bekommen aber diese Feldgesetze einen neuen physikalischen Inhalt durch folgenden entscheidenden Ansatz: *Die Vektoren H^{ik} und s^k sollen universelle Funktionen von F_{ik} und φ_i sein:*

(467a) $$H^{ik} = u_{ik}(F, \varphi), \quad s^k = v_k(F, \varphi).$$

Die ersten sechs Beziehungen unterscheiden sich von denen der phänomenologischen Elektrodynamik wesentlich dadurch, daß H^{ik} auch explizite von φ_i abhängt. In der *Mie*schen Theorie haben nicht nur Potentialdifferenzen, sondern auch der Absolutwert des Potentials eine reale Bedeutung. Die Gleichungen bleiben nicht unverändert, wenn man φ durch $\varphi +$ konst. ersetzt. Wir werden später sehen, daß aus diesem Umstand der *Mie*schen Theorie eine ernstliche Schwierigkeit erwächst. Die letzten vier Gleichungen (467a) sind für die Existenz und die Bewegungsgesetze der materiellen Teilchen (Elektron und H-Kern) wesentlich. In mehr oder weniger willkürlicher Weise nennt *Mie* φ_i und F_{ik} *Intensitätsgrößen*, s^k und H^{ik} *Quantitätsgrößen*.

Durch (467a) werden nicht weniger als zehn universelle Funktionen in die Theorie eingeführt. Hier bringt jedoch das Energieprinzip, wie *Mie* gefunden hat, eine große Vereinfachung mit sich, indem es gestattet, die zehn unbekannten universellen Funktionen auf eine einzige zu reduzieren. Es zeigt sich nämlich, daß aus (206) und (467) nur dann eine Gleichung von der Form

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{S} = 0 \quad (W = \text{Energiedichte}, \ \mathfrak{S} = \text{Energiestrom})$$

gefolgert werden kann, wenn eine Invariante $L(F, \varphi)$ (zunächst relativ zur Lorentz-Gruppe) existiert, aus der H^{ik} und s^i durch Differentiation abgeleitet werden können:

(468) $$H^{ik} = \frac{\partial L}{\partial F_{ik}}, \quad s^i = -\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial \varphi_i},$$

so daß also gilt:

(468a) $$\delta L = H^{ik} \delta F_{ik} - 2 s^i \delta \varphi_i.$$

Eine einfache Rechnung zeigt dann, daß die Gleichungen (467) aus dem Wirkungsprinzip

(469) $$\delta \int L \, d\Sigma = 0$$

folgen, wenn die Variation die Bedingung erfüllt, daß die Beziehungen (206) auch für das variierte Feld gültig bleiben.

Über die Invariante L, die oft auch Weltfunktion genannt wird, lassen sich einige allgemeine Aussagen machen. Zunächst sind die einzigen voneinander unabhängigen Invarianten, die sich aus dem Flächentensor F_{ik} und dem Vektor φ_i bilden lassen, diese:

1. Das Quadrat des Flächentensors F_{ik}: $\frac{1}{2} F_{ik} F^{ik}$.
2. Das Quadrat des Vektors φ_i: $\varphi_i \varphi^i$.
3. Das Quadrat des Vektors $F_{ik}\varphi^k$: $F_{ir}\varphi_s F^{is}\varphi^r$.
4. Das Quadrat des Vektors $F^{*}_{ik}\varphi^k$ oder, was dasselbe ist, des Raumtensors $F_{ik}\varphi_l + F_{kl}\varphi_i + F_{li}\varphi_k$.

L muß also eine Funktion dieser vier Invarianten sein. Wird L gleich der ersten der genannten Invarianten, so degenerieren die Feldgleichungen der *Mie*schen Theorie in die gewöhnlichen Gleichungen der Elektronentheorie für den ladungsfreien Raum. *Es wird also L nur innerhalb der materiellen Teilchen von* $\frac{1}{2} F_{ik} F^{ik}$ *merklich verschieden sein können.* Weitere Aussagen lassen sich über die Weltfunktion L nicht machen. Es gelingt nicht, die Möglichkeiten so weit einzuschränken, daß man mit Notwendigkeit auf eine ganz bestimmte Weltfunktion geführt wird, vielmehr bleibt noch eine unendliche Mannigfaltigkeit von Möglichkeiten übrig.

Wir müssen nun noch den Impuls-Energietensor T_{ik} als Funktion der Feldgrößen ermitteln. Die zugehörigen Rechnungen vereinfachen sich nach *Hilbert*[383]) und *Weyl*[384]) außerordentlich, wenn man die *Mie*schen Feldgleichungen in einer der allgemeinen Relativitätstheorie angepaßten Form schreibt und dann die in Nr. 55 eingeführte Methode des Variierens der g_{ik} anwendet. Erst dann treten die formalen Zusammenhänge klar hervor. Wir haben dies durch die Schreibweise der vorangehenden Formeln schon vorbereitet und sind darin formal von *Mie* abgewichen, der sich in seinen Arbeiten von 1912 und 1913 natürlich auf den Boden der speziellen Relativitätstheorie stellte. Zunächst bleibt genau wie bei der gewöhnlichen Elektrodynamik in Nr. 54 das Gleichungssystem (203), (208) auch in einem beliebigen G-Feld bestehen, dagegen sind (197), (467) zu ersetzen durch

$$(197a) \qquad \frac{\partial \mathfrak{s}^i}{\partial x^i} = 0,$$

$$(467b) \qquad \mathfrak{s}^i = \frac{\partial \mathfrak{H}^{ik}}{\partial x^k}.$$

Wir bemerken mit *Weyl*, daß die „Quantitätsgrößen“ jetzt als Tensor*dichten* (d. h. mit $\sqrt{-g}$ multipliziert) auftreten, während die „Intensitätsgrößen“ gewöhnliche Tensoren bleiben. Die Beziehungen (468), (468a) und das Hamiltonsche Prinzip (469) bleiben ebenfalls bestehen, letzteres kann natürlich auch geschrieben werden

$$(469a) \qquad \delta \int \mathfrak{L}\, dx = 0.$$

383) *D. Hilbert*, Grundlagen der Physik I, l. c. Anm. 99).

384) *H. Weyl*, Raum — Zeit — Materie, 1. Aufl. 1918, p. 184f.; 3. Aufl. (1920), p. 199.

Um den Energietensor T_{ik} zu finden, brauchen wir nur die Variation der Wirkungsfunktion bei Variation des G-Feldes zu bestimmen. Da hier L von den Ableitungen der g_{ik} unabhängig ist, muß bei konstant gehaltenem elektromagnetischen Feld einfach gelten

$$\delta \mathfrak{L} = \mathfrak{T}_{ik} \delta g^{ik},$$

also

$$T_{ik} = \frac{\partial L}{\partial g^{ik}} - \frac{1}{2} L g_{ik}, \quad T_i^k = \frac{\partial L}{\partial g^{ik}} g^{kr} - \frac{1}{2} L \delta_i^k. \tag{470}$$

Setzt man andererseits in den aus (468a) resultierenden allgemeinen Ausdruck

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial g^{ik}} \delta g^{ik} + H^{ik} \delta F_{ik} - 2 s^i \delta \varphi_i$$

speziell eine solche Variation der Feldgrößen, die einer infinitesimalen Koordinatentransformation entspringt, so wie sie durch (163), (164) gegeben wird, so muß δL identisch verschwinden. D. h. es muß gelten

$$2 \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} \left(\frac{\partial L}{\partial g^{ir}} g^{rk} - H^{kr} F_{ir} + s^k \varphi_i \right) \equiv 0,$$

was nur möglich ist, wenn die Klammer selbst identisch verschwindet. Setzt man endlich den hieraus folgenden Wert für $\frac{\partial L}{\partial g^{ik}} g^{rk}$ in (470) ein, so erhält man

$$T_i^k = H^{kr} F_{ir} - s^k \varphi_i - \tfrac{1}{2} L \delta_i^k. \tag{470}$$

Aus der Ableitung geht hervor, daß die zughörigen kovarianten Komponenten T_{ik} symmetrisch sind. Ferner können wir auf Grund der Ergebnisse der Nr. 55 ohne weiteres sagen, daß der Impulsenergiesatz, der bei Abwesenheit von Gravitationsfeldern die Form

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x_k} = 0 \tag{341}$$

und in Gravitationsfeldern die Form

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_i^k}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \mathfrak{T}^{rs} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i} = 0 \tag{341a}$$

annimmt, eine Folge der Feldgleichungen ist. Der Ausdruck (470) für den Impuls-Energietensor ist identisch mit demjenigen, zu dem bereits *Mie* durch direkte Ausrechnung gelangt war.

Wir wenden uns nun wieder zur Frage nach dem Bewegungsgesetz und der Existenzmöglichkeit von materiellen Teilchen. In der gewöhnlichen Elektrodynamik ist die elektrische Feldstärke definiert als die auf die (ruhende) Ladung wirkende Kraft. Diese einfache Bedeutung der Feldstärke ist in der Mieschen Theorie im Innern der materiellen Teilchen nicht mehr vorhanden, vielmehr ist ja die ponderomotorische Kraft überall stets gleich Null. Dennoch bleibt die praktische Bedeutung der Gesamtladung des Teilchens bestehen. Betrachten

wir nämlich ein elektrisches Elementarteilchen, das sich in einem äußeren Feld befindet. Für diesen Fall folgt aus (341) für $i = 1, 2, 3$:

$$\frac{d}{dx^4}\int T_i^4\, dx^1\, dx^2\, dx^3 = -\int (T_i^k \mathfrak{n}_k)\, d\sigma \qquad (k = 1, 2, 3)$$

($\mathfrak{n}_k$ = Einheitsvektor in Richtung der Flächennormale.)

Hierin erstrecken wir das zweite Integral über eine hinreichend vom materiellen Teilchen entfernte Fläche. Da auf ihr die gewöhnliche Elektrodynamik gilt, hat das Oberflächenintegral den gleichen Wert wie in dieser, d. h. es stellt die Lorentzsche Kraft dar. Wir haben hiermit nach dem Vorgang von *Mie* eine elektrodynamische Begründung des Bewegungsgesetzes (210) für das Elektron gegeben. Zugleich sehen wir, daß die Ruhmasse m_0 des materiellen Teilchens gemäß dem Satz der Trägheit der Energie sich bestimmt aus

$$m_0 = \frac{E_0}{c^2} = -\int T_4^4\, dx^1\, dx^2\, dx^3. \tag{471}$$

Für T_4^4 ist der aus (470) resultierende Ausdruck einzusetzen.

Mie setzt das Feld des ruhenden Elektrons statisch und kugelsymmetrisch an. Letztere Annahme ist zwar, wie in der vorigen Nr. erläutert wurde, durch unser tatsächliches Wissen allein nicht gerechtfertigt, empfiehlt sich aber doch wegen ihrer Einfachheit. Man hat dann diejenigen Lösungen der Feldgleichungen aufzusuchen, die überall — sowohl für $r = 0$, als auch für $r = \infty$ — regulär sind. Von derjenigen Weltfunktion, die der Wirklichkeit entspricht, hat man zu fordern, daß sie für jede Elektrizitätsart eine und nur eine solche Lösung ergibt. *Es ist bisher nicht gelungen, eine Weltfunktion zu finden, die diese Forderung erfüllt.* Die bisher diskutierten Ansätze für L führen vielmehr zu der der Erfahrung widersprechenden Folgerung, daß Elementarteilchen mit beliebigen Werten der Gesamtladung möglich sind. Man darf aber deshalb die Miesche Elektrodynamik noch nicht verwerfen, weil durchaus nicht nachgewiesen ist, ob es nicht doch eine Weltfunktion gibt, die mit der Existenz *bestimmter* Elementarteilchen im Einklang ist.

Eine viel ernstere Schwierigkeit scheint uns in folgendem bereits von *Mie* bemerkten Umstand zu liegen. Wenn wir eine Lösung für das elektrostatische Potential φ eines materiellen Teilchens von der verlangten Art gefunden haben, so wird φ + konst. nicht wieder eine Lösung sein, weil in die Feldgesetze der Mieschen Theorie der Absolutwert des Potentiales eingeht. *Das materielle Teilchen wird also in einem konstanten äußeren Potentialfeld nicht existenzfähig sein.* Es scheint uns dies ein sehr schwerwiegender Einwand gegen die Miesche

Theorie zu sein. Bei den in den folgenden Nrn. zu besprechenden Theorien tritt eine derartige Schwierigkeit nicht auf.

Es muß noch ein Versuch von *Weyl* erwähnt werden, die Asymmetrie der beiden Elektrizitätsarten auf Grund der Mieschen Theorie verständlich zu machen. Ist die Weltfunktion L keine rationale Funktion von $\sqrt{\varphi_i \varphi^i}$, so kann man

$$\text{für} \quad \varphi_i \varphi^i > 0, \qquad L = \tfrac{1}{2} F_{ik} F^{ik} + w(+\sqrt{\varphi_i \varphi^i})$$

und

$$\text{für} \quad \varphi_i \varphi^i < 0, \qquad L = \tfrac{1}{2} F_{ik} F^{ik} + w(-\sqrt{\varphi_i \varphi^i})$$

setzen. w bedeutet darin irgendeine nicht gerade Funktion. Die Feldgleichungen bleiben dann im statischen Fall bei Vertauschung von φ mit $-\varphi$ (positiver und negativer Elektrizität) nicht invariant. Allgemein ist die Möglichkeit vorhanden, wenn L eine *mehrdeutige* Funktion der 4 oben erwähnten Fundamentalinvarianten ist, für die positive Elektrizität den einen, für die negative den anderen eindeutigen Zweig dieser Funktion als Weltfunktion zu wählen. Wir kommen in Nr. 67 auf diese Möglichkeit zurück.

65. Die Theorie von Weyl. In einer Reihe von Arbeiten[385]) hat *Weyl* eine überaus tiefgehende, auf einer Verallgemeinerung der Riemannschen Geometrie basierende Theorie entwickelt, die beansprucht, alles physikalische Geschehen auf Gravitation und Elektromagnetismus und diese Erscheinungen selbst wieder auf die Weltmetrik zurückzuführen. Ihre Grundlagen und bisherigen Ergebnisse mögen an *dieser* Stelle besprochen werden, weil die Theorie auch über die Natur der materiellen Teilchen bestimmte Aussagen macht.

a) *Reine Infinitesimalgeometrie. Eichinvarianz.* Der Übergang der euklidischen Geometrie zur Riemannschen wird nach Abschn. II dadurch vollzogen, daß die Übertragung der *Richtung* eines Vektors vom Punkt P zum Punkt P' nicht mehr als vom Zwischenweg unabhängig angenommen wird. *Weyl* geht nun noch einen Schritt weiter, indem er auch eine entsprechende Abhängigkeit der Längenübertragung zuläßt. Es ist dann nur mehr möglich, *an einem und demselben Weltpunkt* gemessene Längen miteinander zu vergleichen, nicht aber solche in verschiedenen Weltpunkten. Dem entspricht es, daß nur mehr die Verhältnisse der g_{ik} zu einander durch Messungen ermittelbar sind, nicht diese Größen selbst. Legen wir zunächst die Absolutwerte der g_{ik} irgendwie *willkürlich* (in stetiger Weise) fest und definieren

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

---

385) *H. Weyl*, Berl. Ber. 1918, p. 465; Math. Ztschr. 2 (1918), p. 384; Ann. d. Phys. 59 (1919), p. 101; Raum—Zeit—Materie, 3. Aufl. (1920), II. Kap. und IV. Kap. § 34 u. 35, p. 242 ff.; Phys. Ztschr.

als das Längenquadrat eines Maßstabes, wenn dx^i die Koordinatendifferenzen seiner Enden sind. (Wir sprechen hier und im folgenden der Kürze halber von der Länge eines Maßstabes, natürlich gilt aber im Fall eines zeitartigen Linienelementes das gleiche für die Periode einer Uhr.) Verschiebt man dann den Maßstab längs einer bestimmten Kurve $x^i = x^i(t)$ vom Punkt $P'(t)$ zum Punkt $P'(t + dt)$, so wird sich das Längenquadrat $ds^2 = l$ dabei verändern, und zwar wollen wir axiomatisch annehmen, daß es sich immer um einen bebestimmten Bruchteil von l ändern wird:

$$\frac{dl}{dt} = -l\frac{d\varphi}{dt}, \tag{472}$$

wo φ eine bestimmte Funktion von t ist, die nicht mehr von l abhängt. Als zweites Axiom führen wir ein, daß $\frac{d\varphi}{dt}$ nur von den ersten Differentialquotienten $\frac{dx^i}{dt}$ der Koordinaten abhängt. Da ferner die Gleichung (472) für eine beliebige Wahl des Parameters t gültig sein muß, *muß* $\frac{d\varphi}{dt}$ *eine homogene Funktion ersten Grades der* $\frac{dx^i}{dt}$ *sein.* Wir können diese Funktion weiter spezialisieren, wenn wir den in Nr. **14** erläuterten Begriff der Parallelverschiebung in unsere Betrachtungen mit einbeziehen. Dieser Begriff wurde dort durch zwei Forderungen festgelegt, von denen die eine die Unveränderlichkeit der Komponenten eines Vektors bei *infinitesimaler* Parallelverschiebung *in einem passend gewählten Bezugssystem* ausspricht, während die zweite die Unveränderlichkeit der Länge eines Vektors bei der Parallelverschiebung zum Ausdruck bringt. Die erste Annahme können wir unverändert beibehalten; sie führt zum Ausdruck (64) für die Änderung der Vektorkomponenten:

$$\frac{d\xi^i}{dt} = -\Gamma^i_{rs}\frac{dx^s}{dt}\xi^r \tag{64}$$

mit

$$\Gamma^i_{rs} = \Gamma^i_{sr}. \tag{65}$$

Die zweite Annahme aber verliert hier offenbar ihren Sinn, weil zwei Vektoren in verschiedenen Punkten der Länge nach nicht mehr verglichen werden können. Sie ist vielmehr zu ersetzen durch die Forderung, daß sich bei Parallelverschiebung die Länge gemäß (472) verändern soll:

$$\frac{d}{dt}(g_{ik}\xi^i\xi^k) = \frac{d}{dt}(\xi_i\xi^i) = -g_{ik}\xi^i\xi^k\frac{d\varphi}{dt}. \tag{473}$$

Setzt man (64) ein, so folgt zunächst, daß $\frac{d\varphi}{dt}$ eine Linearform der $\frac{dx^i}{dt}$ sein muß:

$$d\varphi = \varphi_i dx^i. \tag{474}$$

Nur dann ist also eine Parallelverschiebung möglich. Weiter ergibt sich mit

(66) $$\Gamma_{i,rs} = g_{ik}\Gamma^k_{rs}, \quad \Gamma^i_{rs} = g^{ik}\Gamma_{k,rs},$$

(475) $$\frac{\partial g_{ir}}{\partial x^s} + g_{ir}\varphi_s = \Gamma_{r,is} + \Gamma_{r,is}.$$

Die geodätischen Komponenten der Weylschen Geometrie sind also von denen der Riemannschen verschieden. Wir wollen immer die Ausdrücke der letzteren, die im Fall $\varphi_i = 0$ aus ersteren hervorgehen, durch einen Stern kennzeichnen. Sind also $\Gamma^*_{i,rs}$ die Größen (69), so ist

(476) $$\Gamma_{i,rs} = \Gamma^*_{i,rs} + \tfrac{1}{2}(g_{ir}\varphi_s + g_{is}\varphi_r - g_{rs}\varphi_i).$$

Wir hatten die Absolutwerte der g_{ik} vollständig willkürlich festgelegt. Statt des Wertesystems g_{ik} hätten wir ebenso gut ein Wertesystem λg_{ik} verwenden können, wo λ eine beliebige Ortsfunktion ist. Alle Längenelemente wären dann mit λ zu multiplizieren, und nach (472) hätten wir statt φ_i das Wertesystem $\varphi_i - \frac{\partial \log \lambda}{\partial x^i} = \varphi_i - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x^i}$ gefunden. Das Festlegen des Faktors λ, der Eichung, in der Geometrie von *Weyl* ist nun der Wahl der Koordinaten in der Riemannschen Geometrie durchaus an die Seite zu stellen. *So wie wir dort die Invarianz aller geometrischen Beziehungen und physikalischen Gesetze gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen gefordert haben, müssen wir hier außerdem noch ihre Invarianz gegenüber den Substitutionen*

(477) $$\bar{g}_{ik} = \lambda g_{ik}, \quad \bar{\varphi}_i = \varphi_i - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x^i},$$

d. i. Abänderungen der Eichung fordern (Eichinvarianz).

b) *Elektromagnetisches Feld und Weltmetrik.* Aus (472) folgt durch Integration

$$\log l \Big|_P^{P'} = -\int_P^{P'} \varphi_i \, dx^i,$$

(478) $$l_{P'} = l_P e^{\int_P^{P'} \varphi_i \, dx^i}.$$

Ist die Linearform $\varphi_i dx^i$ ein vollständiges Differential, so ist die Länge eines Vektors, vom Weg, auf dem er transportiert wird, unabhängig, und wir kommen auf den Riemannschen Fall zurück. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist das Verschwinden der Ausdrücke

(479) $$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k}.$$

In der Tat läßt sich in diesem Fall nach (477) der Vektor φ_i durch passende Wahl der Eichung stets vollständig zum Verschwinden bringen.

Im allgemeinen Fall werden jedoch die Größen F_{ik} von Null verschieden sein. Sie bilden dann die kovarianten Komponenten eines Flächentensors, die überdies bei Änderungen der Eichung nach (477) unverändert bleiben. Sie genügen ferner den Gleichungen

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0, \tag{480}$$

die eine Folge von (479) sind. Man sieht, daß die Beziehungen (479), (480) vollständig gleichlauten mit den Gleichungen (206), (203) der Elektronentheorie. Die Analogie geht aber noch weiter. Wenn man (entgegen den Annahmen der *Mie*schen Theorie) der Ansicht ist, daß die elektromagnetischen Erscheinungen primär nur durch den örtlichen und zeitlichen Wechsel der Feldstärken bedingt werden, die Potentiale dagegen nur die Bedeutung von mathematischen Hilfsgrößen haben, so sind alle Potentialwerte φ_i, die zu den gleichen Feldstärken F_{ik} führen, physikalisch vollkommen gleichwertig, so daß in ersteren ein Gradient $\frac{\partial \psi}{\partial x^i}$ unbestimmt bleibt. Genau das gleiche gilt aber, wie wir gesehen haben, für den metrischen Vektor φ_i. Dies führt dazu, mit *Weyl* beide Größenreihen φ_i, F_{ik} zu identifizieren: *Der metrische Vektor* φ_i, *der nach* (478) *das Verhalten der Längen bestimmt, soll (bis auf einen numerischen Faktor) mit dem elektromagnetischen Viererpotential identisch sein.* So wie in der Einsteinschen Theorie die Gravitationswirkungen mit dem Verhalten von Maßstäben und Uhren innig verknüpft sind, derart, daß jene aus diesem eindeutig folgen, gilt in der Weylschen Theorie für die elektromagnetischen Wirkungen das gleiche. In dem angegebenen Sinne erscheinen Gravitation und Elektrizität in dieser Theorie beide als Ausfluß der Weltmetrik.

Diese Auffassung muß *Weyl* jedoch nachträglich modifizieren. Die Grundannahmen der Theorie führen nämlich in dieser Gestalt, wie *Einstein*[386]) betont hat, zunächst zu Folgerungen, welche der Erfahrung zu widersprechen scheinen. Denken wir uns ein elektrostatisches Feld verbunden mit einem statischen G-Feld. Die räumlichen Komponenten φ_i $(i = 1, 2, 3)$ verschwinden dann, und die zeitliche Komponente $\varphi_4 = \varphi$ sowie die g_{ik} sind von der Zeit unabhängig. Die Eichung ist dadurch bis auf einen *konstanten* Faktor festgelegt. Wenden wir die Beziehung (478) auf die Periode τ von ruhenden Uhren an, so folgt sofort

$$\tau = \tau_0 e^{\alpha \varphi t}, \tag{481}$$

wo α ein Proportionalitätsfaktor ist. Der Sinn dieser Gleichung ist

386) *A. Einstein*, Berl. Ber. 1918, p. 478, mit der nachfolgenden Erwiderung *Weyls*.

dieser. Es mögen sich zuerst zwei gleich beschaffene Uhren U_1, U_2 mit gleicher Ganggeschwindigkeit an der Stelle P_1 mit dem elektrostatischen Potential φ_1 befinden. Die Uhr U_2 möge dann t sec. lang an eine Stelle P_2 mit dem Potential φ_2 und dann wieder nach P_1 zurückgebracht werden. Das Resultat wird sein, daß die Ganggeschwindigkeit der Uhr U_2 gegenüber der von U_1 um den Faktor $e^{-\alpha(\varphi_2-\varphi_1)t}$ vergrößert bzw. verkleinert sein wird (je nach dem Vorzeichen von α und von $\varphi_2 - \varphi_1$). Insbesondere müßte sich dieser Effekt bei den Spektrallinien einer bestimmten Substanz zeigen, und es könnte überhaupt nicht Spektrallinien von bestimmter Frequenz geben. Denn wenn auch α noch so klein ist, so würden nach (481) die Unterschiede im Laufe der Zeit beliebig anwachsen. Demgegenüber nimmt *Weyl* jetzt folgenden Standpunkt ein. *Der ideelle Prozeß der kongruenten Verpflanzung von Weltstrecken, wie er durch* (472) *festgelegt wird, hat nichts zu tun mit dem realen Verhalten von Maßstäben und Uhren; das metrische Feld darf nicht direkt durch die diesen Meßinstrumenten entnommenen Angaben definiert werden.* Die Größen g_{ik} und φ_i sind dann im Gegensatz zum Linienelement ds^2 der Einsteinschen Theorie prinzipiell nicht mehr durch direkte Beobachtungen ermittelbar. Dieser Verzicht erscheint sehr schwerwiegend. Wenn jetzt auch kein direkter Widerspruch zur Erfahrung vorhanden ist, so scheint die Theorie dadurch doch vom physikalischen Standpunkt aus ihrer inneren Überzeugungskraft beraubt.[387]) So ist jetzt z. B. der Zusammenhang zwischen Elektromagnetismus und Weltmetrik kein eigentlich physikalischer, sondern ein rein formaler. Denn es besteht gar kein unmittelbarer Zusammenhang mehr zwischen den elektromagnetischen Erscheinungen und dem Verhalten von Maßstäben und Uhren, sondern nur mehr ein Zusammenhang zwischen jenen und dem durch mathematische Definition als kongruente Vektorverpflanzung bezeichneten ideellen Prozeß. Übrigens lassen sich ja für einen Zusammenhang zwischen Weltmetrik und Elektrizität nur formale, keine physikalischen Gründe geltend machen, ganz im Gegensatz zu dem Zusammenhang zwischen Weltmetrik und Gravitation, welcher in der Gleichheit von schwerer und träger Masse eine kräftige empirische Stütze findet und eine zwingende Konsequenz des Äquivalenzprinzips und der speziellen Relativitätstheorie ist.

c) *Der Tensorkalkül in Weyls Geometrie.* Bevor wir zur Aufstellung der Feldgesetze schreiten, müssen wir noch die formalen Regeln zur Aufstellung eichinvarianter Gleichungen kurz darlegen.

387) *A. Einstein* glaubt, daß die Theorie auch in dieser Fassung der Wirklichkeit gegenüber nicht standhalten wird (Phys. Ztschr. 21 (1920), p. 651, ferner „Äther und Relativitätstheorie", Berlin 1920; Rede gehalten in Leiden.)

Es ist klar, daß in der Weylschen Theorie der Tensorbegriff so modifiziert werden muß, daß ein Gleichungssystem, welches das Verschwinden aller Komponenten eines Tensors ausdrückt, nicht nur bei beliebiger Änderung der Koordinaten, sondern auch bei beliebiger Änderung der Eichung nach (477) invariant bleibt. Und zwar erweist es sich als zweckmäßig, nur diejenigen Größen Tensoren zu nennen, die sich bei einer Transformation (477) bloß mit einer Potenz λ^e von λ multiplizieren; e heißt das Gewicht des Tensors. So ist g_{ik} vom Gewicht 1, g^{ik} vom Gewicht -1, $\sqrt{-g}$ in einer vierdimensionalen Welt vom Gewicht 2, Γ^r_{ik} ist nach (64) oder (476) *absolut* eichinvariant, d. h. vom Gewicht 0.

Alle diejenigen Operationen, die allein auf dem Begriff der Parallelverschiebung fußen, lassen sich naturgemäß sofort auf die Weylsche Geometrie übertragen, nur muß man für die Γ^r_{ik} statt der Ausdrücke (66), (69) die Ausdrücke (66), (476) setzen. So lassen sich auch hier geodätische Linien definieren durch die Forderung, daß ihre Tangenten stets sich selbst parallel bleiben sollen; sie genügen wieder den Gleichungen (80). Die Gleichungen (77a) $[u_i u^i = \text{konst.}]$ sind jedoch nach (472), (474) zu ersetzen durch

$$\frac{d}{d\tau}(u_i u^i) = -(u_i u^i)(\varphi_k u^k).$$

Ist speziell an einer Stelle der geodätischen Linie $u_i u^i = 0$, so bleibt diese Beziehung dauernd bestehen. Hierauf beruht die Möglichkeit, geodätische Nullinien festzulegen. Die Eigenschaft der geodätischen Linien, zugleich die kürzesten zu sein, fällt in der Weylschen Geometrie weg, weil der Begriff der Kurvenlänge hier sinnlos wird. Wie in Nr. **16** gelangt man ferner durch Parallelverschieben eines Vektors längs einer geschlossenen Kurve zum Krümmungstensor

$$R^h_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^h_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^h_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^h_{k\alpha}\Gamma^\alpha_{ij} - \Gamma^h_{j\alpha}\Gamma^\alpha_{ik}. \tag{86}$$

Die hier angeschriebenen Komponenten sind vom Gewicht 0, die Komponenten R_{hijk} infolgedessen vom Gewicht 1. Die Symmetrieverhältnisse bei diesem Krümmungstensor sind jedoch andere als die beim Riemannschen, die durch (92) bestimmt sind. *Weyl* hat dies noch näher ausgeführt und auch den Ausdruck (86) für den Krümmungstensor durch Einsetzen von (476) explizite ausgerechnet. Ebenso wie in Nr. **17** ergibt sich auch der verjüngte Krümmungstensor R_{ik} (94), dessen kovariante Komponenten das Gewicht Null haben, sowie die Invariante R (95) vom Gewicht -1. Schließlich bleiben alle Operationen der Nr. **19** und **20** auch in der Tensoranalysis der *Weyl*schen Theorie

bestehen, wenn erstens die differenzierten Komponenten von Tensoren oder Tensordichten von Gewicht 0 sind und zweitens für die Größen Γ^r_{ik} wie oben die durch (66) und (476) bestimmten Ausdrücke genommen werden. Man wird bemerken, daß es zum Beweis der meisten angeführten Sätze vollständig ausreicht zu wissen, daß mit Hilfe der Größen Γ^r_{ik} der Begriff der Parallelverschiebung gemäß (64) in invarianter Weise festgelegt wird, ohne daß der Zusammenhang mit den metrischen Größen g_{ik}, φ_i bekannt zu sein braucht. In den letzten Darstellungen seiner Theorie hat *Weyl* diesen Umstand stark betont, indem er den Aufbau der Geometrie in drei Stufen vollzieht. In der ersten werden diejenigen Sätze entwickelt, die in einer beliebigen Mannigfaltigkeit gelten, in der zweiten die auf dem Begriff der Parallelverschiebung („affiner Zusammenhang" nach *Weyl*) fußenden Beziehungen und endlich in der dritten die Folgerungen aus der Existenz der beiden metrischen Fundamentalformen: der quadratischen $g_{ik}dx^i dx^k$ (Gravitation) und der linearen $\varphi_i dx^i$ (Elektrizität). Die Verknüpfung dieser beiden in den früheren Theorien getrennten Erscheinungsgebiete kommt auch formal dadurch zum Ausdruck, daß die g_{ik} und φ_i in den geodätischen Komponenten Γ^r_{ik} und somit auch in den meisten anderen eichinvarianten Gleichungen beide gleichzeitig vorkommen.

Von besonderer Wichtigkeit für die physikalischen Anwendungen sind die Modifikationen und Erweiterungen, welche die in Nr. **23** angestellten Überlegungen über infinitesimale Koordinatentransformationen und Integralinvarianten in der *Weyl*schen Theorie erfahren. Zunächst treten neben die infinitesimalen Koordinatentransformationen als gleichberechtigt die infinitesimalen Änderungen der Eichung. Für diese gilt nach (477) mit $\lambda = 1 + \varepsilon\pi(x)$:

$$\text{(482)} \qquad \delta g_{ik} = \varepsilon\pi g_{ik} \quad (\delta g^{ik} = -\varepsilon\pi g^{ik}), \qquad \delta\varphi_i = -\varepsilon\frac{\partial\pi}{\partial x^i}.$$

Sodann führen in der Weylschen Theorie offensichtlich nur skalare Dichten $\mathfrak{W}$ vom Gewicht Null zu Integralinvarianten $\int \mathfrak{W}\,dx$. Die zugehörigen Skalare sind dann wegen des Faktors $\sqrt{-g}$ in einer vierdimensionalen Welt vom Gewicht -2. Skalare von dieser Art werden deshalb im folgenden eine wichtige Rolle spielen. Unter ihnen gibt es vier, die rational aus den Komponenten des Krümmungstensors gebildet sind:

$$\text{(483)} \qquad \tfrac{1}{2}F_{ik}F^{ik}, \quad R_{hijk}R^{hijk}, \quad R_{ik}R^{ik}, \quad R^2.$$ [388]

---

388) Daß die angegebenen Invarianten die einzigen dieser Art sind, beweist *R. Weitzenböck*, Wien. Ber. math.-nat. Kl., IIa, 129 (1920).

Die im Wirkungsprinzip der Einsteinschen Theorie auftretende Invariante R ist dagegen vom Gewicht -1. *Weyl* hebt hervor, daß durch den Umstand, daß die zu (483) gehörenden skalaren Dichten das Gewicht 0 haben, eine vierdimensionale Welt vor einer metrischen Mannigfaltigkeit von anderer Dimensionszahl ausgezeichnet ist. In der Tat ließen sich in letzteren keine skalaren Dichten mit dem Gewicht 0 von so einfachem Bau konstruieren.

d) *Feldgesetze und Wirkungsprinzip. Physikalische Folgerungen.* Wir müssen nun die eichinvarianten Naturgesetze aufsuchen. Nach *Weyl* müssen sich alle Vorgänge auf elektromagnetische und Gravitationswirkungen zurückführen lassen. Es sind also die 14 unabhängigen Zustandsgrößen φ_i, g_{ik} vorhanden. Da aber zur Invarianz gegenüber Koordinatentransformationen noch die Eichinvarianz hinzukommt, müssen in der allgemeinen Lösung der Feldgleichungen jetzt 5 statt 4 willkürliche Funktionen vorkommen, weshalb auch zwischen den 14 Feldgleichungen 5 Identitäten bestehen müssen. Wir werden sehen, daß analog wie in der Einsteinschen Theorie die 4 Identitäten den Impuls-Energiesatz aussprechen, hier die 5. Identität den Satz von der Erhaltung der Ladung ausspricht.

Man wird zunächst versuchen, die Maxwell-Lorentzschen Gleichungen beizubehalten und auch den Energietensor der Materie mit dem Maxwellschen zu identifizieren und in den Einsteinschen Gleichungen bloß den Krümmungstensor der Riemannschen Geometrie durch den der Weylschen Theorie zu ersetzen. Es zeigt sich jedoch, daß nur ersteres, nicht aber letzteres möglich ist. Untersuchen wir zuerst die Maxwellsche Theorie. Das erste System der Maxwellschen Gleichungen ist, wie schon bemerkt wurde, von Haus aus erfüllt. Da aber die Feldstärken F_{ik} vom Gewicht Null sind, gilt in einer vierdimensionalen Welt dasselbe von den kontravarianten Komponenten $\mathfrak{F}^{ik}$ der zugehörigen Tensordichte. Die Gleichungen

$$\frac{\partial \mathfrak{F}^{ik}}{\partial x^k} = \mathfrak{f}^i$$

sind deshalb eichinvariant: *Die Maxwellschen Gleichungen bleiben invariant, wenn man g_{ik} durch λg_{ik} ersetzt.* Der Satz von *Bateman*, daß die Maxwellschen Gleichungen gegenüber konformen Transformationen invariant sind (Nr. 28), ist hierin als Spezialfall enthalten. In der Tat führt eine solche Transformation die Normalwerte δ_i^k der g_{ik}, die in der speziellen Relativitätstheorie Geltung haben, in $\lambda\delta_{ik}$ über. Die Eichinvarianz der Maxwellschen Gleichungen hängt damit zusammen daß das Wirkungsintegral $J = \int \frac{1}{4} F_{ik} \mathfrak{F}^{ik} dx$, aus dem sie hervorgehen,

selbst eichinvariant ist. — Wir wollen hier noch die Bemerkung einfügen, daß das in Nr. **30**, Gl. (223) als scheinbar zufällig erwähnte Verschwinden des Skalars des Maxwellschen Energietensors ebenfalls in der Eichinvarianz dieses Wirkungsintegrals seinen Grund hat. Die Variation desselben liefert nämlich nach Nr. **55** bei konstant gehaltenen F_{ik}:

$$\delta J = \int \mathfrak{S}_{ik} \delta g^{ik} dx.$$

Sucht man nun die Bedingung dafür, daß J bei der infinitesimalen Eichänderung $\lambda = 1 + \varepsilon\pi(x)$ unverändert bleibt, so folgt nach (482) direkt $\mathfrak{S}_i^i = 0$, w. z. b. w.[389]).

Ganz anders wie mit der Maxwellschen verhält es sich mit der Einsteinschen Theorie. Schon das Gesetz, daß die Weltlinien von Massenpunkten und Lichtstrahlen geodätisch sind, gilt in der Weylschen Theorie nicht allgemein. Der Massenpunkt bewegt sich nur bei Abwesenheit von elektromagnetischen Feldern auf einer geodätischen Weltlinie, und für den Lichtstrahl verliert die Gleichung der geodätischen Linie ihren Sinn, weil schon bei Abwesenheit von Gravitationsfeldern die Glieder, welche das Viererpotential φ_i enthalten, oszillierende Funktionen von der Periode des Lichtes in die Gleichung der geodätischen Linie hineinbringen. Nur die eichinvariante Gleichung

$$g_{ik} dx^i dx^k = 0$$

des Nullkegels bleibt für die Weltlinien der Lichtstrahlen zu Recht bestehen. Der Versuch, die *Feldgleichungen* der Einsteinschen Theorie für die Theorie von *Weyl* dadurch nutzbar zu machen, daß man an Stelle der Riemannschen Krümmungsgrößen die allgemeineren Weylschen setzt, scheitert endlich daran, daß in der Gleichung

$$G_{ik} = -\varkappa T_{ik}$$

389) Da nämlich J die φ_i nur in Gestalt der eichinvarianten F_{ik} enthält, brauchen wir hier die φ_i nicht zu variieren. — Dieser Zusammenhang läßt eine interessante Anwendung auf die *Nordström*sche Gravitationstheorie zu. Da hier das Linienelement, wie in Nr. **56** erwähnt wurde, die Form

$$ds^2 = \Phi \sum_i (dx^i)^2$$

annimmt, folgt zunächst aus der Eichinvarianz der Maxwellschen Gleichungen, daß diese in der *Nordström*schen Theorie auch in Gravitationsfeldern unverändert gültig bleiben, daß somit Gravitationsfelder elektromagnetische Vorgänge nicht beeinflussen (z. B. keine Krümmung der Lichtstrahlen). Umgekehrt erzeugt wegen des Verschwindens des Maxwellschen Energieskalars in der *Nordström*schen Theorie die elektromagnetische Energie keine Gravitationsfelder, da in die Feldgleichungen der Gravitation nur der Energieskalar eingeht. Nach Obigem hat auch dieser Umstand seinen formalen Grund in der Eichinvarianz der Maxwellschen Gleichungen.

die linke Seite vom Gewicht 0, die rechte vom Gewicht — 1 wäre; letzteres sieht man leicht am Beispiel des Maxwellschen Energietensors. Es liegt dies daran, daß das Wirkungsintegral $\int \mathfrak{R}\, dx$, aus dem die Einsteinschen Feldgleichungen hervorgehen, nicht eichinvariant ist, da der Integrand das Gewicht 1 statt 0 hat. Wenn man also am Prinzip der Eichinvarianz festhält, muß man die Einsteinschen Feldgleichungen verlassen. Die letzte Bemerkung deutet aber bereits auf den Weg hin, wie man zu eichinvarianten Feldgleichungen gelangen kann. Man hat ein Wirkungsprinzip

$$\delta \int \mathfrak{W}\, dx = 0 \tag{484}$$

aufzustellen, in dem das Integral auch gegenüber Abweichungen der Eichung invariant ist. Ist allgemein bei Variieren von φ_i und g_{ik}, falls die Variationen am Rand verschwinden:

$$\delta \int \mathfrak{W}\, dx = \int (\mathfrak{w}^i \delta \varphi_i + \mathfrak{W}^{ik} \delta g_{ik})\, dx, \tag{485}$$

so sind

$$\mathfrak{w}_i = 0, \quad \mathfrak{W}^{ik} = 0 \tag{486}$$

die Naturgesetze. Indem man die Bedingungen dafür aufsucht, daß das $\int \mathfrak{W}\, dx$ gegenüber infinitesimalen Koordinatentransformationen und infinitesimalen Änderungen der Eichung invariant ist, erhält man 5 Identitäten zwischen diesen 14 Gleichungen, sowie es oben aus Gründen der Kausalität gefordert wurde, nämlich:

$$\frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x^i} + \mathfrak{W}_i^{\,i} \equiv 0 \tag{487}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{W}_i^{\,k}}{\partial x^k} - \Gamma_{si}^{r} \mathfrak{W}_r^{\,s} + \tfrac{1}{2} F_{ik} \mathfrak{w}^k \equiv 0. \tag{488}$$

Ferner folgt aus der Betrachtung von solchen Variationen des Wirkungsintegrals, die am Rande nicht verschwinden, die Möglichkeit, aus der Wirkungsinvariante in bestimmter Weise eine Vektordichte $\mathfrak{s}^i$ und die Dichte eines *Affin*tensors $\mathfrak{S}_i^{\,k}$ zu konstruieren, welche die Beziehungen

$$\frac{\partial \mathfrak{s}^i}{\partial x^i} \equiv \frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x^i} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{S}_i^{\,k}}{\partial x^k} \equiv \frac{\partial \mathfrak{W}_i^{\,k}}{\partial x^k} \tag{489}$$

identisch erfüllen, ohne selbst zufolge der Naturgesetze zu verschwinden. *Weyl* bezeichnet deshalb $\mathfrak{s}^i$ als den Viererstrom, $\mathfrak{S}_i^{\,k}$ als Energiekomponenten. Wir sehen daraus: *Der Satz von der Erhaltung der Ladung tritt dem Satz von der Erhaltung der Energie in der Weylschen Theorie als formal durchaus gleichberechtigt an die Seite. Beide Sätze folgen auf doppelte Weise aus den Naturgesetzen, was die notwendigen*

5 Identitäten zwischen denselben liefert. Die Komponenten der Totalenergie, die auch schon in der Einsteinschen Theorie nur einen Affintensor bilden, d. h. nur gegenüber *linearen* Transformationen kovariant sind, können jetzt nicht mehr in einen von der Gravitation und einen von der eigentlichen Materie herrührenden Anteil zerlegt werden; einen Impuls-Energietensor $\mathfrak{T}_i^k$ der Materie gibt es hier also überhaupt nicht mehr. Man muß zugeben, daß das Wirkungsprinzip diese Zusammenhänge in überaus einfacher und übersichtlicher Weise erkennen läßt. Wir möchten jedoch hinzufügen, daß es vom physikalischen Standpunkt durchaus nicht selbstverständlich ist, daß sich die Naturgesetze aus einem Variationsprinzip ableiten lassen. Vielmehr scheint es naturgemäßer, die Naturgesetze aus rein physikalischen Forderungen abzuleiten, so wie es für die Einsteinsche Theorie in Nr. 56 geschehen ist.

Um weitere Folgerungen ziehen zu können, muß man nun spezielle Ansätze für die Wirkungsfunktion machen. Die Zahl der Möglichkeiten ist hier zwar nicht so groß wie in der Theorie von *Mie*. Während dort nämlich aus irgendwelchen Invarianten $J_1, J_2, \ldots$ durch eine *beliebige* Funktion $f(J_1, J_2, \ldots)$ eine neue Invariante abgeleitet werden konnte, ist dies hier nicht mehr der Fall, weil die Invarianten vom Gewicht -2 sein müssen, damit die zugehörigen skalaren Dichten das Gewicht 0 haben. Es führt deshalb höchstens eine *homogene* Funktion *ersten Grades* dieser Invarianten zu einer neuen zulässigen Wirkungsfunktion. Immerhin bleibt die Mannigfaltigkeit der zulässigen Wirkungsfunktionen noch ziemlich beträchtlich. Die nächstliegende Annahme ist die, daß die Wirkungsinvariante rational aus den Krümmungskomponenten gebildet sein soll. Nach dem, was unter c) gesagt wurde, muß sich dann die Wirkungsfunktion linear aus den Invarianten (483) zusammensetzen.[390]) Die Ausrechnung ergibt dann zunächst die *Gültigkeit der Maxwellschen Gleichungen*

$$\frac{\partial \mathfrak{F}^{ik}}{\partial x^k} = \mathfrak{s}^i, \tag{211'}$$

sodann den Ausdruck

$$s_i = k\left(\frac{\partial R}{\partial x^i} + R\varphi_i\right) \tag{490}$$

für den Viererstrom (R bedeutet die Krümmungsinvariante der *Weyl*schen Geometrie, k eine Konstante). Für den statischen Fall folgt daraus

$$R = \text{konst.} \tag{491}$$

Ist überhaupt Ladung vorhanden, so kann die const. nicht verschwin-

390) *H. Weyl* (Ann. d. Phys. 59 und Raum — Zeit — Materie, 3. Aufl., l. c. Anm. 385) hält es für wahrscheinlich, daß speziell die Annahme $W = \frac{1}{2} F_{ik} F^{ik} + c R_{hijk} R^{hijk}$ der Wirklichkeit entspricht.

den. Nimmt man überdies an, daß sie positiv ist, so *folgt die positive Krümmung des Raumes und somit die Geschlossenheit der Welt von selbst*, ohne daß es nötig ist, ein besonderes λ-Glied zu den Gravitationsgleichungen hinzuzunehmen. Es ist dies ein wesentlicher Vorzug der Weylschen Theorie. Was endlich die Gravitationsgleichungen anlangt, so sind sie auch für den Fall der Abwesenheit eines elektromagnetischen Feldes ($\varphi_i = 0$) mit den Einsteinschen Gleichungen nicht identisch, wie es nach den früheren Überlegungen zu erwarten war, auch sind sie von höherer als zweiter Ordnung. Es läßt sich jedoch zeigen, daß für den praktisch allein wichtigen Fall des statischen, kugelsymmetrischen Feldes im Außenraum eines „Massenpunktes", der für die Perihelbewegung des Merkur und die Krümmung der Lichtstrahlen maßgebend ist, das Gravitationsfeld (421) der Einsteinschen Theorie zugleich eine Lösung der Gravitationsgleichungen der Theorie von Weyl ist. *Diese ist daher ebensogut wie jene imstande, die Perihelbewegung des Merkur und die Krümmung der Lichtstrahlen im Schwerefeld zu erklären.*[391])

Es bleiben noch die Folgerungen für das Problem der Materie zu besprechen. Die Aufgabe ist wieder, diejenigen statischen, kugelsymmetrischen Lösungen der Feldgleichungen zu ermitteln, die nirgends singulär sind. Von derjenigen Wirkungsfunktion, die der Wirklichkeit entspricht, muß man wieder verlangen, daß sie nur je *eine* solche Lösung für jede der beiden Elektrizitätsarten zuläßt. Als wesentlich neues Moment gegenüber der Theorie von *Mie* kommt hinzu, daß wegen der Geschlossenheit der Welt nicht Regularität im Unendlichen, sondern auf dem „Äquator" der Welt zu fordern ist. So kommt man dazu, einen Zusammenhang zwischen der Größe der Welt und der des Elektrons zu vermuten, was immerhin etwas phantastisch erscheinen mag. Die Kräfte, die das Elektron zusammenhalten, sind hier nur teilweise elektrischer Natur, teilweise aber Gravitationskräfte. Schon bei den hier speziell näher diskutierten Ansätzen für die Wirkungsfunktion werden jedoch die Differentialgleichungen so kompliziert, daß die Integration bisher nicht ausgeführt werden konnte. Außerdem sind die Differentialgleichungen die gleichen für positive und negative Elektrizität (vgl. dazu Nr. 67), so daß die tatsächlich völlig asymmetrischen Verhältnisse jedenfalls nicht richtig wiedergegeben werden. *Zusammenfassend kann man also sagen, daß es der Theorie von Weyl bisher nicht gelungen ist, das Problem der Materie der Lösung näher zu bringen.*

---

391) Man vgl. dazu außer den in der Anm. 385) zitierten Arbeiten von *Weyl* auch *W. Pauli jr.*, Verh. d. deutschen phys. Ges. 21 (1919) p. 742, wo speziell das in Anm. 390) erwähnte Wirkungsprinzip zugrunde gelegt wird.

Wie in Nr. **67** noch näher erörtert werden wird, spricht im Gegenteil manches dafür, daß eine Lösung des Problems auf diesem Wege überhaupt nicht gefunden werden kann.

66. Die Theorie von Einstein. Von einem ganz verschiedenen Gesichtspunkt aus suchte *Einstein*[392]) die Frage nach dem Bau der materiellen Teilchen in Angriff zu nehmen. Die Feldgleichungen (401) resp. (452) fußten auf der Annahme eines materiellen Impuls-Energietensors $\mathfrak{T}_i^k$, welcher die Gleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_i^k}{\partial x^k} - \frac{1}{2}\mathfrak{T}^{rs}\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i} = 0 \tag{341a}$$

erfüllt. An dieser Annahme wollen wir hier festhalten. Da der Maxwellsche Energietensor

$$\mathfrak{S}_i^k = F_{ir}\mathfrak{F}^{kr} - \frac{1}{4}F_{rs}\mathfrak{F}^{rs}\delta_i^k \tag{222a}$$

(vgl. Nr. **54**) nur im ladungsfreien Raum dieser Bedingung genügt, müssen noch weitere Glieder zu $\mathfrak{S}_i^k$ hinzugenommen werden. *Mie* nahm nun an, daß diese Glieder elektrischer Natur, d. h. Funktionen der elektrischen Zustandsgrößen F_{ik}, φ_i seien. Dagegen nimmt *Einstein* an, daß *die materiellen Teilchen allein durch Gravitationskräfte zusammengehalten* werden, also die Zusatzglieder von den g_{ik} und ihren Ableitungen abhängen sollen. Obwohl der Maxwellsche Tensor $\mathfrak{S}_i^k$ jetzt nicht als der totale Energietensor der Materie bezeichnet werden kann und der Gleichung (341a) nicht genügt, geht *Einstein* auch hier analog wie in Nr. **56** von dem Ansatz aus, daß *dieser Maxwellsche Energietensor* $\mathfrak{S}_i^k$ *proportional sein soll einem aus den* g_{ik} *allein gebildeten Differentialausdruck zweiter Ordnung.* Dieser einfache Ansatz ist für die Einsteinsche Theorie ausschlaggebend. Man schließt daraus, im Verein mit der Forderung der allgemeinen Kovarianz wie in Nr. **56**, daß die Feldgleichungen die Form haben müssen:

$$R_{ik} + \bar{c}Rg_{ik} = -\varkappa S_{ik}.$$

Hier noch ein zu g_{ik} proportionales Glied hinzuzufügen, wird sich als überflüssig erweisen. Da aber die Gleichung (341a) für S_{ik} nicht gilt, haben wir kein Recht mehr, so wie früher $\bar{c} = -\frac{1}{2}$ zu setzen, vielmehr ist für die Bestimmung von $\bar{c}$ ein anderer Umstand maßgebend. Nach (223) verschwindet der Skalar S_i^i; damit auch der Skalar der linken Seite der Feldgleichungen identisch verschwindet, muß $\bar{c} = -\frac{1}{4}$ gesetzt werden, so daß die Feldgleichungen lauten:

$$R_{ik} - \frac{1}{4}g_{ik}R = -\varkappa S_{ik}. \tag{492}$$

---

392) *A. Einstein*, Berl. Ber. **1919**, p. 349; auch in der Sammlung *Lorentz-Einstein-Minkowski*, Das Relativitätsprinzip, 5. Aufl., Berlin 1920.

Außerdem sollen die Gleichungen

(203) $$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0$$

und

(208) $$\frac{\partial \mathfrak{F}^{ik}}{\partial x^k} = \mathfrak{s}^i$$

der Elektronentheorie ihre Gültigkeit behalten. Eine einfache Abzählung lehrt, daß (203) und (492) gerade 4 unabhängige Gleichungen weniger als Unbekannte enthalten, wie es in einer allgemein relativistischen Theorie verlangt werden muß. Es sei noch bemerkt, daß sich die Feldgleichungen in diesem Fall, wie es scheint, nicht aus einem Wirkungsprinzip herleiten lassen. Da ferner nach Nr. **54** die Divergenz von S_{ik} auf Grund von (203) und (208) den Wert

$$-F_{ik}\mathfrak{s}^k$$

des negativen Lorentzschen Kraftvektors annimmt und die Divergenz von $R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R$ verschwindet, liefert die Divergenz der Feldgleichungen (492) die Beziehung

(493) $$F_{ik}s^k - \frac{1}{4\varkappa}\frac{\partial R}{\partial x^i} = 0.$$

Sie zeigt, daß bei den zugrunde gelegten Feldgleichungen in der Tat den Coulombschen Abstoßungskräften durch einen Gravitationsdruck das Gleichgewicht gehalten wird. Setzt man $s^k = \varrho_0 u^k$, so folgt überdies

(494) $$\frac{\partial R}{\partial x^i}u^i = \frac{dR}{d\tau} = 0,$$

d. h. R bleibt auf der Weltlinie eines und desselben Materieelementes konstant. Im ladungsfreien Raum wird nach (493)

$$\frac{\partial R}{\partial x^i} = 0,$$

also

(495) $$R = \text{konst.} = R_0.$$

Im Innern der materiellen Teilchen sinkt R vom Wert R_0 ständig zu immer kleineren Werten bis zum Mittelpunkt des Teilchens. $\frac{1}{4\varkappa}R$ stellt nach (493) direkt die potentielle Energie der das Teilchen zusammenhaltenden Gravitationskräfte dar.

Wir müssen nun den Impuls-Energietensor T_{ik} der Materie aufsuchen. *Für diesen soll die das λ-Glied enthaltende Gleichung* (452) *bestehen bleiben.* Nach (453) wird hier für den materiefreien Raum $R = -4\lambda$. Der Vergleich mit (495) zeigt, daß

(496) $$R_0 = -4\lambda, \quad \lambda = -\frac{R_0}{4}$$

zu setzen ist. Es ist ein Hauptvorzug der neuen Formulierung, daß

die Konstante λ hier nicht dem Grundgesetz an sich eigentümlich ist, sondern die Bedeutung einer *Integrationskonstante* hat. Die Gleichung (453) schreibt sich dann

$$G_{ik} + \frac{1}{4} R_0 g_{ik} = - \varkappa T_{ik},$$

während (492)

$$G_{ik} + \frac{1}{4} R g_{ik} = - \varkappa S_{ik}$$

ergibt. Durch Vergleich folgt

(497) $$T_{ik} = S_{ik} + \frac{1}{4\varkappa}(R - R_0) g_{ik}.$$

Dieser Tensor erfüllt also zufolge von (492) von selbst die frühere Gleichung (452) und somit auch die Gleichung (341a), außerdem verschwindet er im materiefreien Raum. Es ist deshalb auch vom physikalischen Standpunkt durchaus berechtigt, ihn als Energietensor der Materie zu bezeichnen. Die materielle Energiedichte — $\mathfrak{T}_4^{\ 4}$ setzt sich aus zwei Teilen, einem elektromagnetischen und einem vom Gravitationsfeld herrührenden Teil zusammen, von denen beide positiv sind. Es ist leicht zu sehen, daß die räumlich geschlossene Welt mit konstanter ruhender Massendichte ($T_1^{\ 1} = T_2^{\ 2} = T_3^{\ 3} = 0$, $T_4^{\ 4} = - \mu_0 c^2$) eine Lösung der neuen Feldgleichungen ist. Alle Beziehungen der Nr. **62** b) bleiben unverändert bestehen. Der elektromagnetische Tensor S_i^k berechnet sich allgemein aus (497) zu

(498) $$S_i^k = T_i^k - \frac{1}{4} T \delta_i^k,$$

also in unserem Fall

(499) $$S_1^{\ 1} = S_2^{\ 2} = S_3^{\ 3} = \frac{1}{4} \mu_0 c^2, \quad S_4^{\ 4} = - \frac{3}{4} \mu_0 c^2$$

Die Energie der räumlich geschlossenen Welt rührt zu $\frac{3}{4}$ *vom elektromagnetischen, zu* $\frac{1}{4}$ *vom Gravitationsfeld her.* Dieser Anteil der elektromagnetischen an der Gesamtenergie ist genau der gleiche, wie er in Nr. **63** auf Grund spezieller (nicht notwendig zutreffender) Annahmen für das Elektron hergeleitet wurde.

Versucht man nun auf Grund der Differentialgleichungen (203) bzw. (206), (208) und (492) das Feld eines materiellen Teilchens zu ermitteln, so findet man, daß zur Bestimmung der Unbekannten im statischen kugelsymmetrischen Fall eine Gleichung zu wenig vorhanden ist. *Nach der hier entwickelten Einsteinschen Theorie ist jede statische, kugelsymmetrische Verteilung der Elektrizität im Gleichgewicht.* So befriedigend also auch die Grundlagen dieser Theorie sind, auch sie ist nicht imstande, das Problem der Materie zu lösen.

67. Allgemeines über den gegenwärtigen Stand des Problems der Materie. Jede der besprochenen Theorien hat ihre besonderen Vorzüge und Nachteile. Ihr gemeinsamer Mißerfolg veranlaßt uns

jedoch, diejenigen Mängel und Schwierigkeiten besonders zusammenzufassen, die ihnen allen gemeinsam sind.

Das Ziel aller Kontinuumstheorien ist, den Atomismus der Elektrizität darauf zurückzuführen, daß die Differentialgleichungen, welche die Naturgesetze ausdrücken, nur eine diskrete Zahl von überall regulären, statischen und kugelsymmetrischen Lösungen haben, und zwar speziell je eine solche Lösung für die positive und die negative Elektrizitätsart. Es ist klar, daß Differentialgleichungen, welche diese Eigenschaft haben, äußerst kompliziert gebaut sein müssen. Es scheint uns, daß diese Verwickeltheit der Naturgesetze schon an sich gegen die Kontinuumstheorien spricht, denn man wird vom physikalischen Standpunkt wohl verlangen müssen, daß die an sich so einfache und grundlegende Tatsache des Atomismus auch einfach und elementar von der Theorie zu deuten ist und nicht sozusagen als ein Kunststück der Analysis erscheint.

Ferner haben wir gesehen, daß die Kontinuumstheorien gezwungen sind, besondere Kräfte einzuführen, welche den Coulombschen Abstoßungskräften im Innern der elektrischen Elementarteilchen das Gleichgewicht halten. Nimmt man an, daß diese Kräfte *elektrischer Natur* sind, so muß man dem elektromagnetischen Viererpotential eine absolute Bedeutung zusprechen, was zu den in Nr. 64 erörterten Schwierigkeiten führt. Gegen die andere Möglichkeit, daß die elektrischen Elementarteilchen durch *Gravitationskräfte* zusammengehalten werden, spricht aber ein sehr gewichtiges empirisches Argument. Man würde nämlich in diesem Fall erwarten, daß die schwere Masse des Elektrons zu seiner Ladung in einer einfachen Zahlenbeziehung steht. In Wirklichkeit ist aber die betreffende dimensionslose Zahl $\frac{e}{m\sqrt{k}}$ ($k =$ gewöhnliche Gravitationskonstante) von der Größenordnung 10^{20}! (s. auch Nr. 59).

Von den Feldgleichungen ist überdies zu verlangen, daß sie von der Asymmetrie (Verschiedenheit der Massen) der beiden Elektrizitätsarten Rechenschaft geben. Es ist jedoch leicht zu sehen, daß dies mit ihrer allgemeinen Kovarianz in formaler Hinsicht im Widerspruch steht.[393]) Für den statischen Fall enthalten die Feldgleichungen neben den g_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$ oder $i = k = 4$) nur das elektrostatische Potential φ als Variable. Als ein spezieller Fall der allgemeinen Kovarianz müssen nun die Differentialgleichungen insbesondere auch bei Umkehrung der Zeit $x'^4 = -x^4$ kovariant sein. Dabei geht aber φ in $-\varphi$ über, während die g_{ik} unverändert bleiben (es ist in unserem

393) *W. Pauli jr.*, Phys. Ztschr. 20 (1919), p. 457.

Fall $g_{i4} = 0$ für $i = 1, 2, 3$). Ist also $\varphi, g_{ik} (g_{i4} = 0)$ eine Lösung der Feldgleichungen, so ist auch $-\varphi, g_{ik} (g_{i4} = 0)$ eine Lösung, im Widerspruch zur Asymmetrie der beiden Elektrizitätsarten. Man könnte versuchen, dieser Konsequenz dadurch zu entgehen, daß man nicht rationale Wirkungsinvarianten einführt, so wie es am Ende der Nr. **64** angegeben wurde. Aber erstens werden dann die Feldgleichungen noch komplizierter, und zweitens geschieht die Auswahl des eindeutigen Zweiges der Wirkungsfunktion nicht in allgemein kovarianter Weise, indem z. B. gegenüber einer Umkehr der Zeit $x'^4 = -x^4$ jetzt keine Kovarianz mehr vorhanden ist.

Endlich ist auch noch ein begriffliches Bedenken zu erwähnen.[394]) Die Kontinuumstheorien operieren ohne weiteres mit dem gewöhnlichen Begriff der elektrischen Feldstärke auch für die innerelektronischen Felder. Diese Feldstärke ist jedoch definiert als die Kraft auf einen Probekörper, und da es keine kleineren Probekörper gibt als Elektron und Wasserstoffkern, scheint die Feldstärke in einem bestimmten Punkt im Innern eines solchen Teilchens prinzipiell nicht beobachtbar, also eine physikalisch inhaltslose Fiktion zu sein.

Wie immer man sich im Einzelnen zu diesen Argumenten stellen mag, so viel scheint sicher zu sein, daß zu den Grundlagen der bisher aufgestellten Theorien erst neue, der Kontinuumsauffassung des Feldes fremde Elemente hinzukommen müssen, damit man zu einer befriedigenden Lösung des Problems der Materie gelangt.

394) Vgl. dazu *W. Pauli jr.*, Verh. d. phys. Ges., l. c. Anm. 391) und die Nauheimer Diskussion, Phys. Ztschr. 21 (1920), p. 650.

(Abgeschlossen im Dezember 1920.)

(Die später erschienene Literatur konnte nachträglich nur teilweise berücksichtigt werden.)







V 20. ELEKTRONENTHEORIE DER METALLE.

Von

RUDOLF SEELIGER

IN GREIFSWALD.

Inhaltsübersicht.

1. Einleitung; historische Übersicht; Abgrenzung des Gebietes.

I. Die gaskinetischen Theorien der Wärme- und Elektrizitätsleitung.

2. Allgemeine Grundlagen der Theorien von *Riecke* und *Drude*.
3. Theorie von *Riecke*.
4. Theorie von *Drude*.
5. Vervollkommnung der Theorie durch *Lorentz*.
6. Allgemeine Statistik von *Debye*.
7. Theorie von *Bohr*.
8. Ergänzungen und Erweiterungen.

II. Anwendungen und Folgerungen der gaskinetischen Theorien.

9. Das Gesetz von *Wiedemann* und *Franz*; Temperaturkoeffizient des elektrischen Leitvermögens.
10. Thermoelektrische Effekte und Voltaeffekt.
11. Thermomagnetische und galvanomagnetische Effekte.
12. Legierungen, Halbleiter.
13. Optik der Metalle.

III. Das Elektronengas.

14. Freie Elektronen im Innern des Metalls; die Elektronenkonstanten.
15. Thermoionische Untersuchungen.
16. Thermodynamische Arbeiten von *v. Laue* und *Schottky*.

IV. Semigaskinetische und quantentheoretische Ansätze.

17. Kritik der gaskinetischen Theorien.
18. Theorie von *Thomson*.
19. Die Gittertheorien.
20. Die phoretische Elektronentheorie von *Benedicks*.
21. Quantentheoretische Ansätze.
22. Theorie von *Wien*.
23. Beziehungen zur Atomphysik. Ausblick.

1. Einleitung; historische Übersicht; Abgrenzung des Gebietes. Die Fähigkeit der Metalle, elektrische Ströme fortzuleiten, mußte nicht nur wegen des hohen Wertes dieser elektrischen Leitfähigkeit an sich und der dadurch bedingten außerordentlichen praktischen Bedeutung schon frühzeitig die Aufmerksamkeit auf sich lenken und zu ausgedehnten, zunächst experimentellen Untersuchungen Veranlassung geben, sondern sie forderte auch bald die theoretische Spekulation durch physikalisch überraschende Ergebnisse heraus. Erwähnt seien hier nur der augenscheinlich innige Zusammenhang mit dem Wärmeleitvermögen, das Fehlen jeglichen gleichzeitigen Transports von Materie und der ganze Komplex der thermoelektrischen Erscheinungen, an welche sich bis in die letzte Zeit die Auffindung stets neuer und verhältnismäßig einfacher Gesetzmäßigkeiten und Zusammenhänge angeschlossen hat; demgemäß ist die experimentelle Literatur eine ungemein reichhaltige, und es ist nicht leicht, aus der Menge namentlich der älteren Einzeldaten das für die Theorie Brauchbare und Wesentliche herauszusuchen. Zudem hat sich der Schwerpunkt des Interesses im Laufe der Zeit verschoben und liegt heute in Fragen wie etwa den Messungen bei tiefsten Temperaturen und der Untersuchung der Legierungen und der sogenannten Halbleiter.

Anfangs konnte man sich mit primitiven etwa an hydrodynamische Analoga anschließenden Vorstellungen zufrieden geben oder im Geist der herrschenden Kontinuitätstheorien phänomenologisch-formal einen Teil der beobachteten Erscheinungen mathematisch zu beschreiben versuchen, wohl auch thermodynamische integrale Betrachtungen mit Nutzen heranziehen. Erst der Ausbau des atomistischen physikalischen Weltbildes forderte auch hier die Ausarbeitung eines detaillierten Modells für den Mechanismus der beobachteten elektrischen und thermischen Erscheinungen. Merkwürdig früh schon setzten dahingehende Bestrebungen mit einer Arbeit von *W. Weber*[1]) ein, der in erstaunlicher Weise nicht nur den Grundgedanken der neuen Theorien vorwegnimmt — nämlich die Zurückführung der Elektrizitäts- und im gewissen Umfang auch der Wärmeleitung auf den Transport elektrisch geladener, von den Metallatomen abdissoziierter Teilchen — sondern auch im einzelnen schon vielerlei Berührungspunkte mit den modernen Anschauungen aufweist; zugleich gibt sie einen Mechanismus für die kurz vorher von *Kohlrausch*[2]) entwickelte phänomenologische Mitführungstheorie speziell der thermoelektrischen Erscheinungen, der ebenfalls eine beachtenswerte Stellung

1) *W. Weber,* Pogg. Ann. 156 (1875), p. 1.

2) *F. Kohlrausch,* Gött. Nachr. 1874, p. 65.

in der Geschichte der fraglichen Probleme zukommt. Die Theorie von *Riecke* (1898), die schon früher von *Giese*[3]) in ihren Grundlagen skizziert worden war, bringt aber erst eine eingehende und geschlossene Durcharbeitung und Erweiterung der *Weber*schen Ideen und schließt einerseits so die erste Periode der theoretischen Forschung ab, während sie andererseits die zweite Periode, die der gaskinetischen Theorien, eröffnet, sofern man als deren wesentliches Merkmal die Annahme von frei zwischen den Metallatomen beweglichen Ladungsträgern, die zugleich Träger der Energie sind, ansieht; den vollständigen physikalischen Anschluß an die kinetische Theorie der Gase liefern dann endlich die grundlegenden Arbeiten von *Drude* (1900). Die nun folgenden theoretischen Arbeiten[4]), beginnend mit *H. A. Lorentz'* Untersuchung (1905), bringen bezüglich der physikalischen Grundanschauung mit einer Ausnahme zwar nicht allzuviel Neues, leisten aber die exakte mathematische und statistische Durchführung; man könnte etwa die Entwicklung von der ersten Untersuchung *Drude*s zu diesen letzteren Arbeiten vergleichen mit der der kinetischen Gastheorie von den einfachen Ansätzen von *Clausius* zu den Arbeiten von *Maxwell*, *Boltzmann* und ihren Nachfolgern. Eine Reihe kritischer und allgemein statistischer, wesentlich mathematisch orientierter Untersuchungen haben nun auch diesen Teil der Entwicklung zu einem gewissen Abschluß gebracht (*Bohr* 1911, *Livens* 1915). Die genannte Ausnahme wird man in dem kühnen Gedanken sehen müssen (den *Lorentz* zwar nicht zuerst ausgesprochen[5]), aber doch zuerst bis in alle seine Folgerungen konsequent durchgeführt hat), nur eine Art von Leitungsträgern anzunehmen und diese mit den bereits anderwärts bekannten und studierten Elektronen gleichzusetzen; auch im Sinne einer erstrebenswerten Vereinfachung und Vereinheitlichung des gesamten physikalischen Weltbildes wird man darin einen allgemeinen großen Fortschritt sehen müssen.

Inzwischen erfuhr die Theorie der Leitung von Wärme und Elektrizität in Metallen eine wesentliche Förderung und Klärung der Grundlagen noch von anderer Seite her, nämlich durch die eingehende

3) *W. Giese*, Wied. Ann. 37 (1889), p. 576.

4) Eine kurze Besprechung der hierher gehörigen Arbeiten gibt *N. Bohr* in seiner Dissertation, Kopenhagen 1911 (dänisch). Eine Übersicht über alle Elektronentheorien hat kürzlich *P. Sutter* in den beiden ersten Abschnitten seiner Schrift: Die Elektronentheorie der Metalle ... (Bern 1920) gegeben.

5) Die Gleichsetzung der negativen Ladungsträger mit den Elektronen findet sich bereits bei *Riecke*, der aber daneben noch die positiven, mit den Kanalstrahlenteilchen von ihm gleichgesetzten, annahm. Vgl. auch *J. J. Thomson*, Rapports Congr. Phys. (Paris 1900), d. d. III, p. 150.

Betrachtung der sogenannten thermoionischen Effekte. Man kann die hierher gehörenden Untersuchungen etwa bezeichnen als die Physik des Elektronengases in den Metallen, deren Zusammenhang mit den an *Drude* anschließenden Vorstellungen zwar klarliegt, die aber insofern noch einen Schritt weitergingen, als sie die Loslösung von allen speziellen Vorstellungen über die Verhältnisse im Metall gewissermaßen auf die Spitze treiben und die statistische Gesamtheit der freien Elektronen, eben das hypothetische Elektronengas, als solches betrachten. Teils im Anschluß an gaskinetische Vorstellungen, teils mehr thermodynamisch orientiert, versuchten die in dieser Richtung arbeitenden Forscher neben der Deutung der thermoionischen Effekte selbst das Verständnis namentlich der thermoelektrischen Probleme zu fördern (*Krüger*, *Baedeker*, *Richardson*, *Wilson*), vor allem aber die Prinzipienfrage nach der Existenz und Berechtigung eines solchen Elektronengases kritisch zu studieren; die Arbeiten von *v. Laue* und *Schottky* (1919) scheinen auch hier einen gewissen Abschluß erzielt zu haben.

Trotz der vielen schönen Erfolge der gaskinetischen Theorie mußte man derselben aber bei objektiver physikalischer Überlegung skeptisch gegenüberstehen; die Zweifel mehrten sich, als namentlich die experimentellen Arbeiten bei tiefsten Temperaturen Erscheinungen kennen lehrten, deren Deutung diese Theorien machtlos gegenüberstehen. Damit beginnt die Abkehr von der gaskinetischen Theorie und die dritte Periode der Entwicklung, die eben erst begonnen, allerdings noch weit von einem befriedigenden Abschluß entfernt ist. Neben quantentheoretischen Überlegungen (z. B. *W. Wien* und tastenden Versuchen in verschiedenster Richtung) steht eine Klasse von Theorien, die man als Gittertheorie bezeichnen könnte, und die allen Anzeichen nach auf den richtigen Weg führen (*Stark*, *Haber*). Sie schließen eng an die neuesten Ergebnisse der metallographischen, namentlich der röntgenographischen Forschung an und betrachten im wesentlichen das Metall als ein Elektronengitter im Gitter der Atome; von der Vorstellung der frei nach Art der Moleküle eines Gases beweglichen Elektronen, von Gleichverteilung der Energie u. dgl. ist wenig übrig geblieben, und vollkommen neue Bilder sind an Stelle der alten getreten.

Was nun die Abgrenzung des Stoffes in dem vorliegenden Artikel anlangt, ist folgendes zu bemerken. Da es sich in erster Linie um eine Darstellung der theoretischen Forschung auf dem Gebiete der Wärme- und Elektrizitätsleitung handeln soll, sind die Ergebnisse der experimentellen Forschung nur so weit gegeben, als sie zur Be-

urteilung der einzelnen Theorien notwendig sind; auf die experimentellen Methoden ist dagegen überhaupt nicht eingegangen, und ebenso ist das sehr ausgedehnte experimentelle Zahlenmaterial nicht im einzelnen mitgeteilt. Eine wesentliche Einengung hat der behandelte Stoff ferner durch die Beschränkung auf stationäre Zustände erfahren, die Untersuchungen über zeitlich veränderliche Felder in Metallen wurden nur verhältnismäßig kurz erwähnt, da sie in das Gebiet der Optik der Metalle und der Strahlungstheorie gehören. Dagegen wurde andererseits das Gebiet der eigentlichen Elektronentheorie der Metalle überschritten durch einige Bemerkungen über die analogen Erscheinungen in Halbleitern und Legierungen, die sachlich hierher gehören. Eine gewisse Schwierigkeit liegt endlich in der Abgrenzung des Stoffes gegen manche Nachbargebiete, z. B. gegen die Thermoionik und die rein thermodynamischen Arbeiten über das Elektronengas. Da diese an anderen Stellen bereits in voller Ausführlichkeit monographisch dargestellt sind, schien ein kurzer Auszug lediglich unter Betonung des hier unmittelbar Interessierenden geboten.

I. Die gaskinetischen Theorien der Wärme- und Elektrizitätsleitung.

2. Grundlagen der Theorien von Riecke und Drude. Wie bereits in der Einleitung erwähnt, hat *Riecke* die erste wirklich durchgeführte Theorie der Elektrizitäts- und Wärmeleitung in Metallen und daran anschließend der thermoelektrischen, der kontaktelektrischen Effekte, des Halleffekts usw. gegeben. Die Ansätze *Riecke*s hat dann *Drude* in seinen schon zwei Jahre später veröffentlichten grundlegenden Untersuchungen im wesentlichen übernommen und weiter ausgebaut, vor allem aber durch den glücklichen Gedanken einer universellen Temperaturabhängigkeit der kinetischen Energie der im elektrischen und im Wärmestrom bewegten Teilchen den unmittelbaren Anschluß an die kinetische Theorie der Gase hergestellt. Beiden Theorien gemeinsam ist die Vorstellung[6]), daß die Elektrizität im Innern der Metalle zum Teil an freibewegliche Träger in bestimmten Quanten gebunden ist, deren absolute Größe gleich ist dem elektrischen Elementarquantum $4{,}77 \cdot 10^{-10}$ statische Einheiten. Die verschiedenen Träger unterscheiden sich voneinander durch das Vorzeichen der Ladung und durch das Verhältnis der Ladung zur Masse,

6) *E. Riecke*, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 3 (1906), p. 24; Phys. Ztschr. 10 (1909), p. 508. Namentlich der letztere Bericht enthält eine sehr schöne Übersicht über die Grundlagen der Theorie.

ihre räumliche Dichte ist in verschiedenen Metallen verschieden und charakteristisch für das betreffende Metall, sie hängt außerdem ab von der Temperatur. *Riecke* nimmt nur zwei verschiedene Arten von Trägern an, die positiven und die negativen, während *Drude* allgemeiner beliebig viele Trägerarten zuläßt und in seine Rechnungen einführt. Diese Träger bewegen sich nun vollkommen frei zwischen den Atomen des Metalls, ähnlich den Molekülen eines Gases in der Auffassung der kinetischen Theorie der Gase, es kommt ihnen eine der dort eingeführten analoge mittlere Geschwindigkeit und mittlere freie Weglänge, die beide Funktionen der Temperatur sind, zu. Ist das Metall homogen, und zwar homogen im weiteren Sinne, d. h. bezüglich der thermischen und physikalischen Eigenschaften (z. B. also auch der Temperatur), so ist der Lage- und Geschwindigkeitsraum jener Teilchen isotrop und die Statistik des Ensembles der Teilchen prinzipiell verhältnismäßig einfach. Beide Forscher umgehen aber hier eine eigentliche statistische Untersuchung überhaupt, indem sie von vornherein für alle ein Teilchen charakterisierenden Größen Mittelwerte einführen; doch geschieht dies in verschiedener Weise, welche die beiden Theorien prinzipiell unterscheidet.[7]) Physikalisch ist diese Verschiedenheit letzten Endes darin begründet, daß *Riecke* die Teilchendichte als sehr klein gegen die Dichte der Metallatome voraussetzt und demgemäß nur Zusammenstöße der Teilchen mit den Atomen, nicht aber Zusammenstöße der Teilchen untereinander in Rechnung zieht, während *Drude* gerade umgekehrt nur die Zusammenstöße der Teilchen untereinander berücksichtigt. Diese verschiedene Auffassung hat zur Folge, daß *Riecke* beim Ausbau seiner Theorie im einzelnen sozusagen Geometrie der Teilchenbahnen treiben muß, während *Drude* seine Überlegungen unmittelbar an die entsprechenden der kinetischen Gastheorie anschließt, da er mit dem Begriff eines den gewöhnlichen Gasen weitgehend analogen Elektronengases operieren kann. Diese Analogie kommt insbesondere auch dadurch zum Ausdruck, daß *Drude* das Gleichverteilungsprinzip quantitativ auf sein Elektronengas überträgt und die mittlere kinetische Energie der Teilchen gleich αT setzt mit derselben universellen Konstanten α wie in der Gastheorie.[8]) *Riecke* hingegen nimmt zwar auch die Proportiona-

7) Vgl. die in Anm. 6) genannten Ausführungen von *Riecke*.

8) Da in der Literatur die Bezeichnungen schwanken, sei darauf hingewiesen, daß die Konstante α eingeführt ist durch $\frac{m}{2} v^2 = \alpha T$; die *Boltzmann*sche Konstante k ist eingeführt durch $mv^2 = 3kT$, so daß also $k = \frac{2}{3}\alpha$ zu setzen ist (α gleich $2{,}02 \cdot 10^{-16}$ erg grad^{-1}).

lität mit der Temperatur an, macht aber über den Proportionalitätsfaktor a priori keinerlei einschränkende Voraussetzungen (er weist hier übrigens mit Recht darauf hin, daß in Strenge die Energie der geladenen Teilchen nicht nur vom Quadrat, sondern auch von höheren Potenzen der Geschwindigkeit abhängt). Aus diesen Verschiedenheiten der Grundlagen ergibt sich bereits eine generelle Bewertung der beiden Theorien: Die Theorie von *Riecke* muß sich wegen der größeren Zahl der verfügbaren Konstanten auszeichnen durch größere Anschmiegsamkeit[9]) ihrer Resultate an die Erfahrung, die Theorie von *Drude* hat den großen Vorteil des universellen Standpunktes.

Ist nun das Metall nicht, wie bisher angenommen, homogen, so sind der Lage- und Geschwindigkeitsraum anisotrop, sei es, daß die Dichte, die mittlere Weglänge, die mittlere Energie der Teilchen mit dem Ort sich ändert, und zwar explizite oder implizite (z. B. durch Abhängigkeit von der Temperatur). Es lagert sich dann über die ungeordnete Bewegung der Teilchen eine gerichtete Strömung, die z. B. im chemisch-inhomogenen gleichtemperierten Metall zu Potentialdifferenzen, im homogenen Metall mit Temperaturgefälle zu einem Energietransport, d. h. zur Wärmeleitung führt. Ist endlich das Metall physikalisch inhomogen infolge eines in ihm ausgebreiteten elektrischen Feldes, so lagert sich über die ungeordnete Bewegung der Teilchen eine gerichtete Strömung infolge der auf die Teilchen wirkenden elektrischen Feldkräfte; es resultiert ein elektrischer Konvektionsstrom.

Eine Modifikation dieser Grundlage unter weitgehender Vermeidung statistischer Betrachtungen, die *G. Jäger*[10]) durchgeführt hat, sei nur anhangsweise erwähnt, da neue Resultate dabei nicht zum Vorschein gekommen sind. *Jäger* berücksichtigt nur die Zusammenstöße der Elektronen untereinander und nimmt an, daß sich die Elektronen im Metall gewissermaßen wie in den Hohlräumen eines Schwammes bewegen; beachtenswert ist, daß die Endformeln weitgehend mit der Theorie von *Lorentz* übereinstimmen, weil dies die (für die Kritik

9) Es zeigt sich diese Anschmiegungsfähigkeit deutlich in den erfolgreichen späteren Bemühungen von *Riecke*, seine Theorie zu vervollkommnen und an die inzwischen entwickelte Theorie von *H. A. Lorentz* anzuschließen. In seiner letzten Arbeit, *Elster-Geitel*-Festschrift 1915, p. 71, hat *Riecke* in vollendeter Form diese Entwicklung zum Abschluß gebracht. (Ausführliches Referat darüber bei *W. Schottky*, Beibl. 39 (1915), p. 639.) Die Darstellung in der folgenden Nr. gibt schon des historischen Interesses wegen die 1. Fassung der Theorie von 1898 bzw. eine Anlehnnng an die mit beliebig vielen Trägerarten operierende Theorie von *Drude*.

10) *G. Jäger*, Wien. Ber. 117 (1908), p. 843, 869.

aller gaskinetischen Theorien wichtige) erlaubte Unbestimmtheit der Grundlagen aufzeigt. (Weiteres dazu vgl. Nr. **17**.)

3. Die Theorie von Riecke.[11]) Die ladungstragenden Teilchen, als welche in den ursprünglichen Arbeiten nur positive und negative, später im Anschluß an Drude beliebig viele Arten in Betracht kommen, bewegen sich zwischen den Metallatomen in geradlinigen Bahnen von der mittleren Weglänge l_ν, sie werden aber, wenn sie in die Nähe eines Metallatoms kommen, von diesem abgelenkt und umkreisen es in einem größeren oder kleineren Bogen. Das Wegstück zwischen dem Beginn zweier aufeinanderfolgender geradliniger Wegstücke ist demnach größer als l_ν, es wird gemessen durch die Zeit $k\tau_\nu$, in der es durchlaufen wird, wenn τ_ν die Zeit zum Durchlaufen von l_ν und k ein Zahlenfaktor größer als 1 ist. Für l_ν und die mittlere Geschwindigkeit u_ν setzt *Riecke* von vornherein an

$$(1) \qquad l_\nu = l_\nu^0(1-\beta t), \quad u_\nu = c_\nu\sqrt{T}(1+\delta t),$$

worin T die absolute, t die Temperatur in Celsiusgraden ist. Ebenso wird für die Teilchenanzahl postuliert

$$(2) \qquad N_\nu = N_\nu^0(1+\alpha_0 t).$$

Die Wärmeleitfähigkeit ergibt sich nach dem Muster der gaskinetischen Transportgleichung aus dem Verhältnis der transportierten Energie zum Temperaturgradienten. *Riecke*[11a]) findet dafür nach ziemlich langwierigen Rechnungen ($\mathfrak{A}$ gleich mechanisches Wärmeäquivalent)

$$(3) \quad \varkappa = \frac{1}{4\mathfrak{A}k}\sum(m_\nu N_\nu^0 c_\nu^3 l_\nu^0)\cdot\sqrt{T}[1+(\alpha_0-\beta+3\delta)t+\tfrac{2}{3}(\alpha_0+3\delta)T].$$

Dieser Wärmestrom ist begleitet von einem galvanischen Strom, dessen Stärke proportional der Stärke des Wärmestroms ist; der Proportionalitätsfaktor ω, die sogenannte Mitführungszahl für Elektrizität, ist natürlich ebenfalls durch die Teilchenkonstanten auszudrücken.

Wesentlich komplizierter verläuft die Berechnung der elektrischen Leitfähigkeit, da die vordem geradlinigen Teilchenbahnen im elektrischen Feld nun zu Parabeln gekrümmt sind. Gewisse Unstimmigkeiten und Vernachlässigungen bei den einschlägigen Rechnungen veranlaßten hier *Riecke*[12]), einen unbestimmten Korrektionsfaktor x einzuführen; die elektrische Leitfähigkeit schreibt sich dann im elektromagnetischen Maßsystem (v = Lichtgeschwindigkeit):

$$(4) \qquad \sigma = \frac{x}{k}\frac{1}{v^2}\sum\left(\frac{e_\nu^2 N_\nu^0 l_\nu}{m_\nu c_\nu}\right)\cdot\left\{\frac{1+(\alpha_0-\beta-\delta)t}{\sqrt{T}}\right\}.$$

11) *E. Riecke,* Ann. d. Phys. 66 (1898), p. 353, 545; vgl. auch Fußn. 6), p. 781.

11a) Ein Rechenfehler ist hier nach Fußn. 12) bereits berücksichtigt.

12) Man vgl. jedoch eine Verbesserung, Ann. d. Phys. 66 (1898), p. 1199, wo für x ein fester Wert berechnet ist.

Mit dem elektrischen Strom ist auch hier ein Wärmestrom verbunden, der jenem wiederum proportional ist. Der Proportionalitätsfaktor η heißt analog dem früheren die Mitführungszahl für Wärme. Hat man es mit einem Metallzylinder zu tun, dessen Enden isoliert sind, so werden sich diese, wenn ein Wärmestrom fließt, aufladen, bis der elektrische Strom verschwindet. Die Wärmeleitfähigkeit in diesem stationären Endzustand, also die Wärmeleitfähigkeit ohne elektrischen Strom, ist dann kleiner als die oben berechnete Wärmeleitfähigkeit mit Strom und zwar im Verhältnis $(1 - \omega\eta) : 1$, und Analoges müßte für den experimentell allerdings kaum zu realisierenden Fall der elektrischen Leitfähigkeit ohne Wärmestrom gelten.

In dem p. 781 in Fußn. 6) zitierten Bericht hat *Riecke* die Endformeln durch formalen Anschluß an die *Drude*sche Theorie etwas übersichtlicher gestaltet. Es interessiert daran besonders die Formulierung des *Wiedemann-Franz*schen Gesetzes, weil sie deutlich zeigt, wie und wieweit die recht allgemeinen Ansätze durch Spezialisierung der eingehenden Konstanten zu einer Anschmiegung an die Erfahrung zu bringen sind.[13]) Für das Verhältnis der Leitfähigkeiten ergibt sich nun, wenn man von Anfang an $\delta = \beta = 0$ und $\frac{mu^2}{2} = \alpha T$ setzt, e_ν für alle Teilchen gleich annimmt, und x geeignet wählt,

$$\frac{\varkappa}{\sigma} = \frac{3}{2}\frac{T}{\mathfrak{A}}\frac{v^2\alpha^2}{e^2}\left(1 + \frac{2}{3}\alpha_0 T\right), \tag{5}$$

vorausgesetzt, daß die Änderung der Teilchendichte mit der Temperatur für alle Teilchen dieselbe ist. Benutzt man das Wärmeleitvermögen ohne Strom, so kommt dazu auf der rechten Seite der Faktor $1 : (1 + \omega\eta)$. Unbekannt ist auf der rechten Seite der Gleichung (5) also nur die Größe α_0 (und eigentlich auch x), die durch Vergleich mit der Erfahrung zu bestimmen ist.

4. Theorie von Drude.[14]) *Drude* hat seine Theorien in drei Arbeiten mitgeteilt und in großer Vollendung entwickelt, von denen hier zunächst die erste Arbeit in Betracht kommt. Wie bereits in Nr. 2 betont wurde, steht an der Spitze der Überlegungen der universelle Ansatz für die kinetische Energie der Teilchen:

$$\frac{m_\nu u_\nu^2}{2} = \alpha T. \tag{6}$$

13) Die Bezeichnungen in beiden Arbeiten weichen zum Teil voneinander ab und sind hier in einheitlicher Weise an die Annalen-Arbeit angeschlossen. Ein Fehler in dem dort stehenden Ausdruck für $\frac{\varkappa}{\sigma}$ ist von *Riecke* selbst verbessert, Phys. Ztschr. 10 (1909), p. 514.

14) *P. Drude,* Ann. d. Phys. 1 (1900), p. 566; 3 (1900), p. 370; 7 (1902), p. 687; man vgl. dazu auch den in Fußn. 6) genannten Bericht von *E. Riecke*.

(*Drude* sucht diesen Ansatz zu rechtfertigen durch die Überlegung, daß für ein in einen Elektrolyten eingetauchtes Metall die freien Teilchen im Metall für den Fall des Temperaturgleichgewichtes dieselbe kinetische Energie besitzen müssen wie die freien Ionen im Elektrolyten, für diese aber, hinreichende Verdünnung vorausgesetzt, die Gasgesetze gelten.[15])

Betrachten wir zuerst mit *Drude* die Folgerung aus der einfacheren Annahme, daß die Teilchenzahl N pro Volumeinheit unabhängig von der Temperatur sei, so folgt aus der Transportgleichung der Gastheorie

$$\Gamma = \frac{ulN}{3}\frac{\partial T}{\partial x} \tag{7a}$$

sofort der Wärmefluß durch die auf der X-Richtung senkrecht stehende Flächeneinheit und daraus die Wärmeleitfähigkeit $\varkappa$ zu

$$\varkappa = \frac{1}{3}\alpha \sum u_\nu l_\nu N_\nu . \tag{7}$$

Ein elektrischer Strom, d. h. gerichteter Transport elektrischer Ladung, ist mit dem Wärmestrom in diesem Fall nicht verbunden.

Die elektrische Leitfähigkeit folgt in analoger Weise, wenn man annimmt, auf die Teilchen wirke die elektrische Kraft E pro Ladungseinheit. Die Integration der Bewegungsgleichung eines im Felde freifliegenden Teilchens ergibt, daß zu der ungeordneten Geschwindigkeit eine in der Richtung der Kraft liegende gerichtete Geschwindigkeitskomponente u_ν' kommt:

$$u_\nu' = \frac{1}{2} e_\nu E \frac{\tau_\nu}{m_\nu}, \tag{8a}$$

worin τ_ν die mittlere Stoßzeit, d. h. die Zeit zwischen zwei Zusammenstößen, ist. Da nun $u_\nu \tau_\nu = l_\nu$ ist, so wird dies

$$u_\nu' = e_\nu u_\nu l_\nu \frac{E}{4\alpha T}. \tag{8b}$$

Der Strom, welcher von allen Kernen getragen wird, ist dann

$$J = \frac{E}{4\alpha T}\sum e_\nu^2 l_\nu u_\nu N_\nu \tag{8c}$$

und die elektrische Leitfähigkeit also

$$\sigma = \frac{1}{4\alpha T}\sum e_\nu^2 l_\nu u_\nu N_\nu . \tag{8}$$ [16]

15) Wegen einer Vertiefung dieses Gedankenganges vgl. Nr. **14**.

16) Es ist dieser Ausdruck nach einer Bemerkung von *v. Everdingen*, die *Riecke* (Fußn. 12) mitgeteilt hat, nicht streng; der Faktor $1/4\alpha T$ muß vielmehr bei Berücksichtigung des Umstandes, daß τ_ν für die mit dem Feld und gegen dasselbe laufenden Elektronen verschieden ist, umgeändert werden in $1/6\alpha T$, d. h. es fehlt der Faktor $\frac{2}{3}$, wie dies neuerdings auch *E. Kretschmann* in Ann. d. Phys. 65

Das Verhältnis der beiden Leitfähigkeiten ist aus (7) und (8) sofort zu bilden. Ist die Ladung e_ν aller Teilchen dieselbe, nämlich gleich der Elementarladung e, so folgt das Gesetz von *Wiedemann-Franz* und von *Lorenz* in der Form

$$\frac{\varkappa}{\sigma} = \frac{4}{3}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^2 T. \tag{9}$$

Etwas komplizierter werden die Verhältnisse, wenn man nun die Teilchendichte als Funktion der Temperatur ansieht. In einem Metall mit Temperaturgefälle strömt dann nicht nur wie bisher Energie von Stellen höherer Temperatur ab, sondern es findet auch ein Transport von Teilchen in einem dem gaskinetischen ganz analogen Diffusionsstrom statt. Die Folge ist, daß mit dem Wärmestrom wie in der Theorie *Rieckes* stets ein elektrischer Strom verbunden ist. *Drude* betrachtet nun nur die Wärmeleitung ohne elektrischen Strom, also die Vorgänge in einem nicht geschlossenen, beiderseits isolierten Metallstück und findet für zwei Arten von Teilchen die Wärmeleitfähigkeit in der Form:

$$\varkappa = \frac{4}{3}\alpha^2 T^2 \left\{\frac{v_1 N_1 + v_2 N_2}{T} + \frac{2 v_1 v_2}{v_1 N_1 + v_2 N_2} \cdot \frac{\partial (N_1 N_2)}{\partial T}\right\}, \tag{10}$$

worin allgemein ist

$$v_\nu = \frac{l_\nu u_\nu}{4 \alpha T}. \tag{10a}$$

Für die elektrische Leitfähigkeit gilt dieselbe Ableitung wie früher, so daß für das Leitfähigkeitsverhältnis folgt:

$$\frac{\varkappa}{\sigma} = \frac{4}{3}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^2 T \left\{1 + \frac{2 v_1 v_2 T}{(N_1 v_1 + N_2 v_2)^2} \frac{\partial (N_1 N_2)}{\partial T}\right\}, \tag{11}$$

das natürlich für Unabhängigkeit der Teilchendichte von der Temperatur in den früheren Ausdruck übergeht. *Drude* knüpft an Gleichung (11) einige interessante allgemeine Bemerkungen, auf die wir später (in Nr. **10**) noch zurückkommen. Hier ist die eine von Wichtigkeit, daß nun Ausnahmen vom universellen *Wiedemann-Franz*schen Gesetz und von der *Lorenz*schen Regel möglich sind, daß aber solche nur

(1921), p. 720 ausführlich begründet hat. Dadurch wird auch in Gleichung (9) der Faktor $\frac{8}{9}$ statt $\frac{4}{3}$, was mit *Lorentz* übereinstimmt. Eine ähnliche Korrektion hat später *F. S. Swann* angebracht [Phil. Mag. 27 (1914), p. 441] und mit Recht darauf hingewiesen, daß bereits eine Dimensionsbetrachtung für σ als Funktion von $N, u, l, e, \alpha T$ Proportionalität mit $e^2 N l u / \alpha T$ ergibt und daß also der Zahlenwert des Proportionalitätsfaktors durchaus nicht unwesentlich, sondern im Gegenteil beweisend für die Richtigkeit der Theorie ist. Ein ausführlicher Bericht von *H. F. Mayer* über die Theorie der Wanderung kraftgetriebener Partikel unter besonderer Berücksichtigung der Arbeiten von *P. Lenard* im Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 18 (1921) geht ebenfalls auf diese Fragen ein.

auftreten können in Metallen, welche mindestens zwei verschiedene Teilchenarten enthalten; denn ist N_1 oder N_2 Null, so fällt das Korrektionsglied zum universellen Gesetz fort.

5. Vervollkommnung der Theorie durch H. A. Lorentz.[17]) Eine Vervollkommnung und Verfeinerung der Theorie unter Beibehaltung des wesentlichen physikalischen Inhalts verdanken wir den Untersuchungen von *H. A. Lorentz*. Zugleich ist in der *Lorentz*schen Theorie zuerst, wie dies bereits in der Einleitung zu diesem Artikel betont wurde, der Versuch unternommen, nur eine Art von Trägern zu Hilfe zu nehmen und diese mit den Elektronen zu identifizieren.[18]) Wenn sich auch nachträglich die Theorien von *Drude* und *Riecke* ebenfalls daraufhin spezialisieren lassen, darf man den Fortschritt, der in dieser Vereinfachung liegt, doch nicht gering schätzen, da sie den Übergang zu der heute allgemein anerkannten unitarischen Auffassung bedeutet. Im übrigen liegt die eingangs genannte Verfeinerung wesentlich auf statistischem Gebiet und zwar im folgenden. Während *Drude* von vornherein Mittelwerte für die gaskinetischen Größen, insbesondere für die Geschwindigkeit der Ladung tragenden Teilchen einführt, geht *Lorentz* aus von einem allgemeinen statistischen Verteilungsgesetz für dieselben; im physikalisch isotropen homogenen Metall soll dies Verteilungsgesetz das *Maxwell*sche der Gastheorie sein. *Lorentz* untersucht dann, wie die *Maxwell*sche Verteilung zu modifizieren ist bei Gegenwart von elektrischen Feldern und Temperaturgradienten und erhält unter der Annahme nur kleiner Änderungen der Geschwindigkeiten additive Korrektionsglieder und endlich aus dem modifizierten Verteilungsgesetz durch Integration den Ladungs- bzw. Wärmetransport. Methodisch ist der Gang der Untersuchung den entsprechenden Teilen der Gastheorie (z. B. Gas im Schwerefeld) nachge-

17) *H. A. Lorentz*, Arch. Nerl. (2) 10 (1905), p. 336; Proc. Acad. Amsterdam 7 (1905), p. 438, 585, 684; Theory of Elektrons (Teubner 1909), Note 29; *Wolfskehl*-Vortrag, Göttingen 1914, p. 167.

18) Es ist bemerkenswert, daß diese an sich sehr kühne Annahme neben den aus der konsequenten Durchführung fließenden und an der Erfahrung mittelbar prüfbaren Folgerungen auch eine unmittelbare experimentelle Bestätigung erfahren hat. *R. C. Tolman* und *T. D. Stewart* scheint es durch ihre merkwürdigerweise wenig beachteten Versuche gelungen zu sein [J. Am. Chem. Soc. 36 (1914), p. 466; Phys. Rev. 8 (1916), p. 97; Proc. Am. Nat. Acad. 3 (1917), p. 58] die Masse der Ladungsträger zu bestimmen und in guter Übereinstimmung mit dem auf anderem Weg gefundenen Wert zu 1 : 1900 bis 1 : 1940 des Wasserstoffatoms festzulegen. Der Grundgedanke dieser Versuche ist, die Masse zu bestimmen aus der Trägheitswirkung, und zwar mit Hilfe der zwischen den Enden eines beschleunigt bewegten Metalldrahtes sich ausbildenden Potentialdifferenz.

bildet und läuft darauf hinaus, das Verteilungsgesetz aus den Bedingungen für den stationären Zustand zu gewinnen.

Es führt also *Lorentz* den Anschluß an die Gastheorie bis ins einzelne durch und leistet damit für die Elektronenstatistik dasselbe wie seinerzeit etwa *Boltzmann* und *Maxwell* in ihrem Ausbau der ursprünglichen Ansätze von *Clausius*. Aus dieser Analogie, die sich übrigens auch auf die recht erheblichen Komplikationen und mathematischen Schwierigkeiten erstreckt, läßt sich der Erfolg der *Lorentz*schen Untersuchung voraussehen; er besteht lediglich in einer Änderung der Zahlenfaktoren in den Endformeln gegenüber den aus der elementaren Theorie sich ergebenden und läßt sich vorerst noch nicht durch die Erfahrung nachprüfen. Demgegenüber ist auch physikalisch von prinzipieller Bedeutung ein Punkt, von dem in Nr. 1 kurz die Rede war, nämlich die von *Lorentz* vorgenommene Reinigung der Elektronentheorie der Metalle von allem fremden Beiwerk[19]) und die exakte Fassung der physikalischen Voraussetzungen der Theorie, die namentlich in dem *Wolfskehl*-Vortrag klar herausgearbeitet ist. In der allgemeinsten Form lassen sie noch Raum für die Einbeziehung der Dissoziation und Assoziation der Elektronen von und an den Metallatomen, reichen aber nicht zu einer vollständigen Beschreibung des Ladungs- und Energietransports aus.

Der mathematische Teil der Untersuchung kommt darauf hinaus, die Verteilungsfunktion $f(\xi, \eta, \zeta, x, y, z)$ im Lage-Geschwindigkeitsraum aus der auch in der Gastheorie bekannten Differentialgleichung

$$(12\text{a}) \qquad b - a = \frac{\partial f}{\partial \xi} x + \frac{\partial f}{\partial \eta} y + \frac{\partial f}{\partial \zeta} z + \frac{\partial f}{\partial x} \xi + \frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial z} \zeta$$

in der Form

$$(12\text{b}) \qquad f = A \cdot e^{-h(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} + \Phi(\xi, \eta, \zeta)$$

zu bestimmen. Dabei sind mX, mY, mZ die Komponenten der elektrischen auf die Elektronen wirkenden Triebkraft, $a\,dS\,d\lambda\,dt$ ist die Zahl der Elektronen, welche im Zeitelement durch Zusammenstöße ihre Geschwindigkeit so ändern, daß sie aus dem Element $d\lambda$ des Verteilungsraumes herausgeworfen werden, $b\,dS\,d\lambda\,\delta t$ ebenso die Zahl der Elektronen, welche in $d\lambda$ hineingelangen, A und h sind die Konstanten $n\sqrt{\frac{h^3}{\pi^3}}$ und $\frac{3m}{4\alpha T}$ der *Maxwell*schen Verteilung. Die beiden Größen a und b sind aus der Geometrie der Stöße zwischen Elektronen und Metallatomen, die allein berücksichtigt werden, unter der Annahme derselben Stoßgesetze wie für vollkommen harte und elastische Ku-

19) Vgl. auch Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 4 (1907), p. 125.

geln in bekannter Weise anzugeben. Beschränkt man sich auf das lineare Problem, in dem alles nur von einer Koordinate x abhängt, so erhält man als Ergebnis der Rechnung

$$(12)\qquad f = A \cdot e^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}$$
$$+ l\left\{2hAX - \frac{dA}{dx} + A\frac{dh}{dx}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\right\}\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}e^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)},$$

worin die Größe l der reziproke Wert des Produktes aus der Anzahl der Atome in der Volumeneinheit und der Wirkungssphäre ist, also physikalisch die Bedeutung der üblichen mittleren freien Weglänge hat. Damit ist der Weg zur Berechnung des Ladungs- und Energietransportes ν und w frei, und es ergibt sich

$$(13)\qquad \begin{cases} \nu = \int \xi f d\lambda = \frac{2}{3}\pi l\left\{\frac{1}{h^2}\left(2hAX - \frac{dA}{dx}\right) + 2\frac{A}{h^3}\frac{dh}{dx}\right\}, \\ w = \frac{m}{2}\int \xi(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)f\cdot d\lambda \\ \quad = \frac{2}{3}\pi m l\left\{\frac{1}{h^3}\left(2hAX - \frac{dA}{dx}\right) + 3\frac{A}{h^3}\frac{dh}{x}\right\}, \end{cases}$$

woraus die elektrische und thermische Leitfähigkeit nun sofort abzuleiten sind. Für ein homogenes, gleich temperiertes Metall ist $\frac{dA}{dx} = \frac{dh}{dx} = 0$ und $X = \frac{e\cdot E}{m}$, wo E die elektrische Kraft ist; damit wird

$$(14a)\qquad \nu = \frac{4\pi l A e}{3hm}E,$$

und somit die elektrische Leitfähigkeit

$$(14)\qquad \sigma = \frac{\nu e}{E} = \frac{4\pi l A e^2}{3hm}.$$

In derselben Weise folgt aus w die thermische Leitfähigkeit ohne Strom, wenn man die Potentialdifferenz zwischen den Enden des Metallstabes so bestimmt, daß $\nu = 0$ ist, zu

$$(15)\qquad \varkappa = \frac{8\pi l A\alpha}{9h^2},$$

und endlich aus beiden für das Verhältnis der Leitfähigkeiten

$$(16)\qquad \frac{\varkappa}{\sigma} = \frac{8}{9}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^2 T,$$

wenn man für h wiederum $\frac{3m}{4\alpha T}$ benutzt.

Die Theorie von *Lorentz* wurde, wie anhangsweise gleich bemerkt sei, von *Richardson*[20]) erweitert auf beliebige Zentralkräfte umgekehrt proportional der s^{ten} Potenz der Entfernung. Da sich *Richardsons*

---

20) *C. W. Richardson,* Phil. Mag. 23 (1912), p. 594.

Arbeit durchaus in der Methode und dem Gang der Rechnung an *Lorentz* anschließt, die Resultate zudem mit den entsprechenden der auf wesentlich breiterer Basis aufgebauten Theorie von *Bohr* übereinstimmen, bietet sie kein prinzipielles Interesse, und die Diskussion der Ergebnisse kann mit der von *Bohrs* Theorie zusammen erfolgen. Bemerkenswert ist der Versuch, die Konstante K des Kraftgesetzes $\frac{K}{r^s}$ durch die elektrische Leitfähigkeit auszudrücken, wofür sich für $s = 3$, welcher Wert durch das Gesetz von *Wiedemann-Franz* nahegelegt ist[21]), ergibt

$$(16a) \qquad K = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{N}{n} \left(\frac{R}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^2}{\sigma}\, 0{,}396,$$

worin N die Zahl der freien Elektronen, n die Zahl der Kraftzentra in der Volumeneinheit und R die Gaskonstante ist. Setzt man etwa $N = \gamma \cdot p$ und $n = \delta \cdot p$, wo p die Zahl der Metallatome pro Volumeneinheit ist, so erhält man z. B. für Silber

$$(16b) \qquad \frac{\delta}{\gamma} \cdot K = 8{,}5 \cdot 10^{-26}.$$

Aus der Strahlungstheorie hatten *Thomson* und *Jeans* die Werte $2 \cdot 10^{-27}$ bzw. $3 \cdot 10^{-27}$ erhalten[21]), was mit dem Obigen der Größenordnung nach gut übereinstimmt bei durchaus plausiblen Annahmen für δ und γ. Quantitativ allerdings würde für $\gamma = \frac{1}{3}$, wie dies nach anderweitigen Daten für die Elektronendichte anzunehmen ist, für δ die Größenordnung 10 sich ergeben, es würden also im Atom mehrere Kraftzentren sitzen müssen.

6. Allgemeine Statistik von Debye.[22]) Die bisher allgemeinste Behandlung elektronen-statistischer Probleme hat *Debye* geliefert. Er benutzt nicht, wie *H. A. Lorentz*, die *Boltzmann*sche, sondern die *Gibb*sche Betrachtungsweise und damit deren Vorteile insofern, als er unmittelbar Energie und Entropie des Systems aus der Wahrscheinlichkeit erhält und spezielle Annahmen erst zur Ableitung der statistischen Verteilungsfunktion selbst notwendig werden; außerdem ist auch physikalisch insofern größere Allgemeinheit erreicht, als die Zahl der freien Elektronen nicht von vornherein gegeben wird, sondern durch den Prozeß der Dissoziation bestimmt wird. In dieser Nummer sollen nur die Grundlagen und die Theorie der Wärme- und Elektrizitäts-

21) Zu diesem Kraftgesetz wird man auch geführt in der Theorie der Metallstrahlung. Vgl. *J. J. Thomson*, Phil. Mag. 14 (1907), p. 217; 20 (1910), p. 238; *Jeans*, ebd. 20 (1910), p. 642.

22) *P. Debye*, Ann. d. Phys. 33 (1910), p. 441.

leitung gegeben werden, deren Endresultate übrigens vollkommen mit den von *Lorentz* erhaltenen übereinstimmen.

Allgemeine statistische Betrachtungen geben für die Verteilungsfunktion, die maßgebend ist für die Verteilung der Systempunkte im 2ν-dimensionalen Raum der Lagenparameter $q_1 \ldots q_\nu$ und der dazu gehörigen Impulse $p_1 \ldots p_\nu$ den Ausdruck

$$(17a) \qquad f = n \frac{\int e^{-BU} dq_{s+1} \ldots dq_\nu \cdot dp_{s+1} \ldots dp_\nu}{\int e^{-BU} dq_1 \ldots dq_\nu \cdot dp_1 \ldots dp_\nu},$$

worin n die Zahl der Teilchen des Systems, U die Energie, B die Konstante $\frac{1}{kT}$ ist und $d\sigma = dq_1 \ldots dq_s \cdot dp_1 \ldots dp_s$ das Volumelement ist, auf das sich die Verteilungsfunktion f bezieht. Um die spezielle Verteilungsfunktion zu erhalten, sind naturgemäß auch spezielle Annahmen notwendig, von denen *Debye* zwei betrachtet; Endziel ist, aus derartigen Annahmen mit Hilfe von (17a) das Dissoziationsgleichgewicht zwischen freien (für den Ladungs- bzw. Energietransport allein in Betracht kommenden) und gebundenen Elektronen zu berechnen. Das Metall bestehe aus Atomen, die fähig sind, unter Arbeitsleistung ein oder mehrere Elektronen abzuspalten, welche also die abgespaltenen Elektronen anziehen. Die erste Annahme setzt nun die anziehende Kraft unabhängig von dem Ionisationsgrad des Atoms und beschreibt dieses als bestehend aus einem inneren undurchdringlichen Kern, um den herum nach außen der Bereich der anziehenden Kräfte sich ausdehnt. Sind v das mittlere ein Atom enthaltende Volumen, v_1 und v_0 die Volumina zweier mit den Radien a_1 bzw. a_0 um den Atommittelpunkt geschlagenen Kugeln, die so gewählt sind, daß a_0 etwa zusammenfällt mit dem Radius des undurchdringlichen Kerns und der Bereich zwischen a_1 und a_0 in treppenförmiger Näherung als der Bereich der anziehenden Kräfte angesprochen werden kann, so läßt sich die Zahl der Elektronen berechnen, die außerhalb a_1 und derer, die zwischen a_0 und a_1 liegen. Jene als freie, diese als gebundene Elektronen zu definieren, führt zu Unzuträglichkeiten, da die genannten Definitionen naturgemäß von der Temperatur abhängen. *Debye* zählt deshalb zu den freien Elektronen auch noch die Elektronen, die zwar im Bereich zwischen a_0 und a_1 liegen, deren Geschwindigkeiten aber so groß sind, daß sie dort nur kurze Zeit verweilen, d. h. analytisch gefaßt, welche Impulse in der Richtung des Radius besitzen, die größer sind als ein durch die potentielle Energie ε in dem Bereich $(a_1 - a_0)$ zu messender Impuls. Die rechnerische Durchführung dieser Überlegung ergibt für das Verhältnis der An-

zahl der freien bzw. der gebundenen Elektronen zur Anzahl aller die Ausdrücke

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{N_f}{N} = \dfrac{1 + \sigma \cdot e^{\frac{T_0}{T}} \psi\left(\frac{T_0}{T}\right)}{1 + \sigma e^{\frac{T_0}{T}}}, \\[2ex] \dfrac{N_g}{N} = \dfrac{1 - \psi\left(\frac{T_0}{T}\right)}{1 + \sigma e^{\frac{T_0}{T}}} \cdot \sigma e^{\frac{T_0}{T}}. \end{cases}$$

worin $\sigma = \frac{(v_1 - v_0)}{(v - v_0)}$, $T_0 = \frac{\varepsilon}{k}$ und die Transzendente ψ gegeben ist durch

$$(17\text{b})\qquad \psi\left(\frac{T_0}{T}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{T_0}{T}}^{\infty} e^{-U}\, U^{-\frac{1}{2}} dU.$$

Die zweite Annahme setzt voraus, daß die anziehenden Kräfte wesentlich vom Ionisationszustand des Atoms abhängen. Vereinfacht man die Annahme dahin, daß ein Atom nur ein Elektron verlieren kann und daß das Restatom sich genau verhalten soll wie die bisher betrachteten Atome, das neutrale Atom wie die bisher betrachteten undurchdringlichen Kerne vom Volumen v_0 und Radius a_0, so kann man wiederum[23]) das Dissoziationsgleichgewicht bestimmen, das jetzt außer der Anzahl n_1 der freien Elektronen (bzw. der dissoziierten Atome) noch die Anzahl n_0 der undissoziierten Moleküle enthält. Die Verhältnisse $\frac{n_0}{n}$ und $\frac{n_1}{n}$ sind zu entnehmen aus der trivialen Beziehung

$$(18\text{a})\qquad \frac{n_0}{n} + \frac{n_1}{n} = 1$$

und aus der aus der Durchrechnung sich ergebenden Beziehung

$$(18\text{b})\qquad \frac{\left(\frac{n_1}{n}\right)^2}{\frac{n_0}{n}} = \frac{e^{-\frac{T_0}{T}}}{\sigma}.$$

Nachdem so die Berechnung der Anzahl der freien Elektronen geleistet ist, läßt sich unter den vereinfachenden auch von *Lorentz*, wie wir sahen gezwungenermaßen, gemachten Voraussetzungen, daß die Verteilungsfunktion gegenüber der für den stationären Zustand geltenden nur wenig geändert ist (was mathematisch bei einem linearen Leiter in Richtung x auf eine Entwicklung bis zu Gliedern erster Ordnung

23) *Debye* geht hier einen etwas anderen Weg als bei der Durchrechnung der ersten Annahme und benutzt eine aus der allgemeinen Statistik folgende Formel für die freie Energie.

in x hinauskommt), die Berechnung der elektrischen und thermischen Leitfähigkeit mit Hilfe der Transportgleichung durchführen und ergibt für den Koeffizienten der elektrischen und thermischen Leitfähigkeit und also auch für den Zahlkoeffizienten des *Wiedemann-Franz*schen Gesetzes genau dieselben Formeln wie *Lorentz* (Nr. 5), wenn für die Elektronenzahlen nur die der freien Elektronen genommen werden. Physikalisch wesentlich ist nun aber eine Erweiterung aller dieser Betrachtungen; während nämlich bisher nur die Zusammenstöße der Elektronen mit den Atomen berücksichtigt, die der Elektronen untereinander als unwesentlich vernachläßigt wurden, weist eine Betrachtung der numerischen Verhältnisse darauf hin, daß diese Annahme den wirklichen Verhältnissen nicht gerecht wird. Es zeigt dies bereits eine einfache Überschlagsrechnung aus Gleichung (19); für ν ergibt sich die Größenordnung von μ, d. h. etwa 10^{23}, also für den mittleren Abstand der freien Elektronen $\sqrt[3]{10^{-23}} = 2{,}1 \cdot 10^{-8}$. Die Kraft zweier Elektronen aufeinander in diesem Abstand ist $0{,}5 \cdot 10^{-3}$ Dynen, so daß z. B. bei $T = 300^0$ abs. die kinetische Energie der Elektronen bei zentralem Stoß den obigen Abstand gegen die abstoßende Kraft nur um etwa ein Prozent verkleinern könnte, daß also die Elektronen sich beim gegenseitigen Zusammenstoß verhalten müßten wie starre Kugeln von etwa 10^{-8} cm Radius. Die Berücksichtigung dieser Elektronenstöße hat zur Folge, daß sich nun für die elektrische und die thermische Leitfähigkeit einzeln (nicht aber im *Wiedemann-Franz*schen Gesetz) eine andere Temperaturabhängigkeit ergibt als bei der obigen einfachen Theorie. Während nach dieser die Endformeln sind

$$(19)\qquad \begin{cases} \sigma = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \cdot \dfrac{\nu e^2}{\pi a^2 \mu} \cdot \dfrac{1}{(mkT)^{\frac{1}{2}}}, \\[2ex] \varkappa = \dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\, \dfrac{\nu}{\pi a^2 \mu} \cdot \dfrac{k}{m} \cdot (mkT)^{\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

erhält man nun die folgenden Ausdrücke für die beiden Leitfähigkeiten

$$(20)\qquad \begin{cases} \sigma = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \cdot \dfrac{\nu}{\pi a^2 \mu + 4\nu\pi a_1^2}\, \dfrac{1}{(mkT)^{\frac{1}{2}}}, \\[2ex] \varkappa = \dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\, \dfrac{\nu}{\pi a^2 \mu + 4\nu\pi a_1^2} \cdot \dfrac{k}{m} \cdot (mkT)^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Es bedeuten darin ν die Anzahl der im Sinn der Theorie freien Elektronen, μ die der Atome in 1 ccm, k die *Boltzmann*sche Konstante der Gastheorie, a bzw. a_1 die Radien der für die Stöße Elektron-Atom bzw. Elektron-Elektron maßgebenden Wirkungssphären.

7. Theorie von Bohr.[24]) Die Untersuchung *Bohrs* über die Theorie der Elektronen in Metallen wird man in vielen Beziehungen als den vorläufigen Abschluß der gaskinetischen Theorie überhaupt bezeichnen können, und zwar sowohl was die Allgemeinheit der physikalischen und statistischen Voraussetzungen, wie auch was die Durchführung im einzelnen anlangt. Allerdings muß diese Allgemeinheit aufgegeben werden, es müssen auch hier namentlich bezüglich des Mechanismus des Zusammenstoßes zwischen den Elektronen und den Metallatomen spezielle Annahmen gemacht werden, wenn greifbare quantitative Resultate abgeleitet werden sollen. Neben der Voraussetzung eines durch äußere Kräfte unbeeinflußten Wärmegleichgewichts zwischen den freien Elektronen im Metall und den Metallatomen und der Isotropie der einzelnen Metallatome ebenfalls unabhängig von äußeren Kräften[25]), decken sich die Annahmen der Theorie durchaus mit dem bisher Besprochenen, sie gehen aber über diese hinaus durch die Berücksichtigung nicht nur der Zusammenstöße der Elektronen mit den Metallatomen, sondern auch der Elektronen untereinander und vor allem durch die Betrachtung nicht nur des Falles, daß die Elektronen zwischen je zwei Zusammenstößen größtenteils freie Bahnen durchlaufen, sondern auch des Falls, daß die Elektronen wegen der dichten Packung der Metallatome den größten Teil ihres Lebens sich in der Wirkungssphäre derselben befinden. Naturgemäß bietet die Behandlung dieses letzteren Falles insofern erheblich größere Schwierigkeiten, als die Wahrscheinlichkeit eines Zusammenstoßes und alle statistisch daraus fließenden Folgen dann nicht mehr allein abhängen von der momentanen Geschwindigkeit der Elektronen, sondern auch von ihrem Weg; statistisch gesprochen sind die genannten Schwierigkeiten in der Hauptsache dadurch bedingt, daß eine Anhäufung der Elektronen vor den Metallatomen stattfindet, d. h. daß die Elektronen während ihrer Bewegung sich in größerer Zahl an Orten befinden, wo die Kräfte der Metallatome der Bewegung entgegengerichtet sind als an Orten, wo sie in derselben Richtung wirken. Demgemäß lassen sich die Betrachtungen für diesen zweiten Fall auch nicht in der vollen Allgemeinheit wie vorher durchführen, sondern nur auf Grund von vereinfachten Annahmen.[26]) Statistisch benutzt *Bohr* im wesent-

24) *N. Bohr,* Diss. Kopenhagen 1911 (dänisch). Eine englische Übersetzung, die der Verf. im Manuskript freundlichst zur Verfügung stellte, soll demnächst erscheinen; eine eingehende Darstellung findet man in der in Anm. 4) genannten Schrift von *P. Sutter.*

25) In Übereinstimmung mit *Lorentz* und *Debye*, im Gegensatz zum Beispiel zu *Thomson* (Nr. 18).

26) Stationäres Feld der Metallatome; Zusammenstöße der Elektronen unter-

lichen denselben Weg wie *Debye*, geht also aus von der *Gibbs*schen Verteilungsfunktion f_0, ergänzt diese aber für den Fall äußerer Kräfte durch ein additives Zusatzglied $f = f_0 + \psi$ und wählt als Grundlage der Rechnung abweichend von seinen Vorgängern den Ausdruck für das gesamte Bewegungsmoment der Elektronen bzw. seiner zeitlichen Änderung. Wie bereits bemerkt, erfordert die Durchrechnung im einzelnen spezielle Annahmen über den Mechanismus der Stöße, von denen der rein elastische Stoß, der Stoß unter Wirkung einer allgemeinen Zentralkraft und eine Spezialisierung in Richtung der von *Gruner* (vgl. Nr. 8) vorgeschlagenen zu erwähnen sind. Die allgemeinen Formeln für die Verteilungsfunktion, das Moment und den Ladungs- sowie den Energietransport lassen sich ohne weitläufige Erklärung der eingehenden vielerlei Beziehungen und Hilfsfunktionen nicht in Kürze angeben. Bezeichnet man das Moment in der Richtung x aller Elektronen im Volumelement dv, deren Geschwindigkeitspunkte zwischen zwei Kugeln mit den Radien r und $r + dr$ liegen, mit $G_x(r)\,dr\,dv$, so drückt sich der Ladungsfluß i_x und der Energiefluß w_x durch die zur X-Achse senkrecht stehende Flächeneinheit aus durch

$$(21\text{a})\qquad i_x = \frac{e}{m}\int_0^\infty G_x(r)\,dr, \quad w_x = \frac{1}{2}\int_0^\infty r^2 G_x(r)\,dr,$$

worin für G die genannten allgemeinen Ausdrücke oder speziellen Formen einzusetzen sind, die durch eine Integralgleichung vom *Fredholm*schen Typus bestimmt sind. Die allgemeinen Endformeln nehmen dann die Gestalt an:

$$(21\text{b})\qquad \begin{cases} i_x = -A_1\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{kT}{eK}\dfrac{\partial K}{\partial x}\right) - A_2\dfrac{\partial T}{\partial x}, \\ w_x = -A_2 T\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{kT}{eK}\dfrac{\partial K}{\partial x}\right) - A_3\dfrac{\partial T}{\partial x}. \end{cases}$$

Die physikalische Bedeutung dieser Formeln wird verständlich durch die Angaben, daß K eine in der Verteilungsfunktion f multiplikativ auftretende Konstante ist, welche den Zustand des Metalls thermisch und chemisch charakterisiert, φ das Potential der äußeren Kräfte ist und die Größen A_1, A_2, A_3 sehr komplizierte, die Natur des Metalls an dem betreffenden Punkt beschreibende Funktionen (Konstanten) bedeuten. Der Umstand, daß A_2 sowohl in i_x wie in w_x auftritt, deutet in dieser allgemeinen Formulierung bereits darauf hin, daß zwischen der elektrischen und der thermischen Leitfähigkeit

---

einander selten im Vergleich zu den Zusammenstößen zwischen Elektronen und Metallatomen.

ein Zusammenhang besteht. Die Formeln (21b) gelten für den einfacheren Fall großer freier Wege der Elektronen; im zweiten Fall dichter Packung der Metallatome lassen sich analoge Ausdrücke nur unter der obengenannten Vereinfachung ableiten. Es ist bemerkenswert, daß diese Ausdrücke mit den Ausdrücken (21b) formal übereinstimmen, sich aber in der Form der Größen A von diesen unterscheiden, da naturgemäß G sich bezieht auf die gesamte, d. h. die kinetische + potentielle Energie der Elektronen. Für die elektrische Leitfähigkeit σ ergibt sich nun sofort bei chemischer und thermischer Homogenität des Metalls $\sigma = A_1$ (22a), woraus z. B. für den ersten der genannten beiden Fälle und für Zentralkräfte umgekehrt der n^{ten} Potenz der Abstände zwischen Elektronen und Metallatomen explizite folgt:

$$\sigma = \frac{4Ne^2}{3\sqrt{\pi}\cdot m\cdot C}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{n-5}{2(n-1)}}\cdot\Gamma\left(\frac{2n}{n-1}\right), \tag{22}$$

welcher Ausdruck für $n = \infty$, d. h. für elastische Zusammenstöße harter Kugeln, in den von *Lorentz* übergeht.

Die Wärmeleitfähigkeit läßt sich nur explizite angeben, wenn man die Nebenbedingung $i_x = 0$ ansetzt; dann nämlich kann man $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ aus $i_x = 0$ und dem Ausdruck für w_x eliminieren und erhält:

$$\varkappa = \frac{A_3A_1 - TA_2^2}{A_1}, \tag{23a}$$

oder wiederum im speziellen Fall der Zentralkräfte

$$\varkappa = \frac{8\pi Nk^2T}{2\sqrt{\pi}(n-1)mC}\cdot\frac{m}{2kT}\cdot\frac{n-5}{2(n-1)}\,\Gamma\left(\frac{2n}{n-1}\right), \tag{23}$$

was für $n = \infty$ ebenfalls mit der Formel von *Lorentz* übereinstimmt. Das Verhältnis $\frac{\varkappa}{\sigma}$ ist aus (22a) und (23a) bzw. aus (22) und (23) dann unmittelbar gegeben; es enthält die zunächst unbekannten Größen N und C[27]) nicht mehr, hängt aber ab von der Form des Gesetzes der Zentralkräfte. Wesentlich komplizierter liegen die Verhältnisse bezüglich der beiden Leitfähigkeiten im einzelnen; ein quantitativer Vergleich mit der Erfahrung ist nicht möglich, und auch ein qualitativer Vergleich bezüglich der Temperaturabhängigkeit ist erst durchführbar auf Grund bestimmter Annahmen über die Temperaturabhängigkeit von N und C.

Wie sich die Verhältnisse gestalten, wenn die Dimensionen der

---

27) Die Konstante C, welche von der Natur und Temperatur des Metalls abhängt, setzt *Bohr* gleich der reziproken freien Weglänge der Elektronen; k gleich *Boltzmann*sche Konstante.

Metallatome nicht mehr klein sind gegen ihre gegenseitigen Abstände, läßt sich bei Vernachlässigung der Zusammenstöße der Elektronen untereinander leicht übersehen bezüglich des Quotienten $\frac{\varkappa}{\sigma}$. Verhalten sich die Metallatome bei den Stößen wie harte, vollkommen elastische Kugeln, so resultiert wieder der *Lorentz*sche Wert, während in allen anderen Fällen ein größerer Wert für diesen Quotienten herauskommt; umgekehrt resultiert im allgemeinen ein kleinerer Wert, wenn die gegenseitigen Zusammenstöße der Elektronen eine wesentliche Rolle spielen.

8. Ergänzungen und Erweiterungen. Die bisher besprochenen Untersuchungen haben in der Folge verschiedentlich eine Weiterbildung erfahren, die teils den mathematisch-statistischen, teils den physikalischen Teil ihrer Grundlagen und ihrer Durchführung betreffen. Wie nämlich die Ableitung spezieller Resultate und deren Prüfung an der Erfahrung zeigte, treten neben vielen unzweifelhaften schönen Erfolgen auch manche recht bedenkliche Unstimmigkeiten auf, die gebieterisch nach Abhilfe verlangen. Soweit man nicht versuchte, durch eine radikale Änderung der Grundlagen weiterzukommen (vgl. hierüber Abschnitt IV), sondern sich im wesentlichen immer noch an das gaskinetische Bild der Vorgänge im Innern des Metalls hielt, sollen nun die dahin zielenden Arbeiten in dieser Nummer zusammengefaßt werden. Doch soll es sich dabei nur handeln um die Besprechung der Untersuchungen, die wenigstens einigermaßen durchgeführt sind; gelegentliche Bemerkungen, wie sie sich vielfach in der Literatur finden, werden besser später von Fall zu Fall untergebracht werden. Auch eine große Klasse von Arbeiten, welche die Erweiterung der Theorie auf zeitlich veränderliche Felder, d. h. die elektronentheoretische Erfassung der Optik der Metalle zum Ziel haben, soll hier nicht besprochen werden.

Man kann Mängel der Theorie in zweierlei Richtungen aufzudecken hoffen, nämlich in dem statistischen Teil oder in den eigentlich physikalischen Grundlagen. Was zunächst den mehr statistischen Teil anlangt, so sind hier zu erwähnen eine Reihe von Arbeiten von *Livens*[28]), eine Untersuchung von *Reinganum*[29]) und eine von *Enskog*[30]), wenngleich das Hauptziel der letzteren die später zu besprechende Erweiterung auf zeitlich veränderliche Felder ist, und in gewissem Sinne auch eine Arbeit von *Lorentz*[31]), die bereits er-

28) *S. H. Livens*, Phil. Mag. 29 (1915), p. 173, 425; 30 (1915), p. 112, 287, 549.

29) *M. Reinganum*, Heidelberger Akad. 1911, Nr. 10.

30) *D. Enskog*, Ann. d. Phys. 38 (1912), p. 731.

31) *H. A. Lorentz*, *Wolfskehl*-Vorträge, Göttingen 1914, p. 167.

wähnt wurde, in diesem Zusammenhang aber nochmals herangezogen werden muß. *Livens* kommt zwar in seinen Arbeiten im wesentlichen nicht über die Ergebnisse der *Lorentz*schen Theorie hinaus; er diskutiert hauptsächlich die Frage, unter welchen Voraussetzungen allgemeinster Natur über den Mechanismus der Stöße man zu einem wohl definierten Verteilungsgesetz der Lage und Geschwindigkeitskoordinaten überhaupt kommen kann, wie dieses bei bestimmten Annahmen sowohl energetischer wie rein statistischer Art über die Wirkung der Stöße lautet und daraus die Berechtigung der *Maxwell*schen Verteilung und der Abweichungen von derselben statistisch zu verstehen ist.

Auch bei *Enskog* steht im Mittelpunkt des Interesses die Frage nach dem Verteilungsgesetz der Geschwindigkeit. Unter der allgemeinen Annahme beliebiger Zentralkräfte zwischen Elektronen und Metallatomen, jedoch mit der Einschränkung, daß die Abstände der letzteren im Mittel so groß sind, daß die Zeit, in welcher ein Elektron merklicher Kraftwirkung ausgesetzt ist, zu vernachlässigen ist, und daß ferner die Wechselwirkungen zwischen den Elektronen und die Geschwindigkeiten der Metallatome ebenfalls zu vernachlässigen sind — die beiden ersteren Einschränkungen sind sicher als erheblicher Mangel der Theorie zu bezeichnen —, läßt sich im unmittelbaren Anschluß an die entsprechenden Entwicklungen *Boltzmanns* für das gaskinetische Problem die partielle Differentialgleichung für die Verteilungsfunktion f anschreiben. Abweichend von der Methode von *Lorentz* ist nur die mathematische Behandlung dieser Gleichung, die von *Enskog* zunächst allgemein, später in Spezialisierung auf einige Kraftgesetze gegeben wird. Wenn nämlich in der üblichen Weise f im Falle des Gleichgewichts die Form hat

$$f = f_0 = Ae^{-hr^2}, \qquad (r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}) \tag{24a}$$

so wird nun f entwickelt nach Potenzen der Geschwindigkeitskomponenten ξ, η, ζ:

$$f = f_0 \{1 + \xi\varphi_x(r) + \cdots + \xi^2\psi_{xx}(r) + \cdots + \xi\eta\psi_{xy}(r) + \cdots\}, \tag{24}$$

und es werden die Funktionen φ und ψ so bestimmt, daß der Differentialgleichung für f genügt wird. Ist auf diese Weise f bestimmt, so ist die elektrische und thermische Leitfähigkeit in der üblichen Weise durch Berechnung des mittleren Ladungs- bzw. Energieflusses zu finden, wofür die Endformeln je nach der Form des Kraftgesetzes zwischen den Elektronen und Metallatomen verschieden ausfallen, für den Fall elastischer Stöße jedoch mit den von *Lorentz* übereinstimmen. Bemerkenswert ist, daß im allgemeinen der Temperaturkoeffizient im

Gesetz von *Wiedemann* und *Franz*[32]) keine absolute Konstante ist, sondern individuelle Eigenschaften des betreffenden Metalls und implizite die Temperatur enthält.

In mancher Beziehung tiefer geht noch die Untersuchung von *Lorentz*; sie gibt eine Darstellung der notwendigen Voraussetzungen einer kinetischen Theorie und zeigt, unter welchen sehr allgemeinen Annahmen die thermoelektrischen Größen den bekannten thermodynamischen Beziehungen genügen.

Endlich sei hier noch auf die Untersuchung von *Reinganum* hingewiesen, die nach verschiedenen Richtungen hin die statistische Seite des Problems klärt. Das von *Lorentz* gefundene Verteilungsgesetz vergleicht *Reinganum* mit dem Verteilungsgesetz, wie es aus einer direkten Übertragung der *Stefan*schen Diffusionstheorie auf die Elektronen in einem Metall folgt. Man kann nämlich die Bewegung derselben auffassen als die Bewegung eines Gases aus Molekülen von sehr kleiner Masse durch ein Gas aus Molekülen von relativ dazu sehr großer Masse und die hierfür aus der Gastheorie folgenden Formeln in hypothetischer Weise übertragen auf die Verhältnisse im Metall. Die Resultate, z. B. die Formeln für die elektrische Leitfähigkeit, weichen im Zahlenfaktor etwas von den Resultaten der *Lorentz*schen Theorie ab und führen auch zu einem anderen Verteilungsgesetz, obwohl die Mechanik der Stöße (elastische Reflexion an den Metallatomen ohne direkte Energieübertragung) in beiden genau dieselbe ist. Ein prinzipieller Unterschied besteht nur insofern, als die Diffusionstheorie auch die Stöße der Moleküle derselben Gasart untereinander berücksichtigt, während die *Lorentz*sche Theorie nur die Stöße der Moleküle der einen Art mit denen der anderen Art in Rechnung zieht oder, mit anderen Worten, annimmt, daß die ersteren Stöße die der *Lorentz*schen Theorie eigentümliche Verteilung nicht ändern. *Reinganum* schließt hier die Vermutung an, daß ein Einfluß der Zusammenstöße zwischen den Elektronen auf die Verteilung diese wohl in dem Sinne der Diffusiontheorie ändern müßte.

Da nun bei *Lorentz* die Elektronen weder miteinander zusammenstoßen noch auch bei den Stößen gegen die Metallatome ihre Energie der Größe nach ändern, so ist zunächst, wie *Reinganum* bemerkt, die Entstehung *Joule*scher Wärme unverständlich und sogar nicht zu verstehen, wie überhaupt eine bestimmte von der Temperatur abhängige Geschwindigkeitsverteilung zustande kommt; auch der Mechanismus der Wärmeleitung bedarf physikalisch von diesem Ge-

32) Man vgl. auch *D. Enskog,* Phys. Ztschr. 12 (1911), p. 539.

sichtspunkte aus einer Erläuterung. Die erstgenannte Schwierigkeit erledigt sich mathematisch dadurch, daß die durch eine elektrische Kraft erzeugte gerichtete Komponente der Elektronenbewegung durch die Stöße in ungerichtete, mit einer Temperaturerhöhung äquivalente Bewegung übergeführt wird, physikalisch natürlich auch dadurch, daß die Voraussetzungen der Theorie in Wirklichkeit nicht strenge erfüllt sind.[33]) Im Zusammenhang mit dem zweiten der obengenannten Punkte diskutiert *Reinganum* die Frage, ob nicht im Rahmen der *Lorentz*schen Theorie neben einem Transport von kinetischer Energie im Wärmestrom noch ein solcher von potentieller Energie stattfindet, welcher geeignet wäre, den zahlenmäßigen Unterschied zwischen Theorie und Erfahrung zu verkleinern. Die diesbezüglichen Überlegungen *Reinganums* schließen an das bekannte hydrostatische Paradoxon der kinetischen Gastheorie und basieren auf folgendem Grundgedanken. Wenn ein Gas unter dem Einfluß einer äußeren Kraft X sich im nicht isothermen hydrostatischen Gleichgewicht befindet, so leistet die äußere Kraft keinen Wärmetransport, wenn die Dichte und die Temperatur so variieren, daß

$$(25\text{a}) \qquad X = \frac{1}{2hAm}\left\{\frac{dA}{dx} - \frac{5}{2}\frac{A}{h}\frac{dh}{dx}\right\},$$

während nach dem Ansatz von *Lorentz* für die Wärmeleitung ohne Strom die analoge Beziehung lautet

$$(25\text{b}) \qquad X = \frac{2}{2hAm}\left\{\frac{dA}{dx} - 2\frac{A}{h}\cdot\frac{dh}{dx}\right\}.$$

Die Differenz dieser beiden Kräfte könnte nach *Reinganum* nun dazu dienen, den Elektronen Energie zu erteilen und dadurch die Temperatur zu erhöhen. Resultieren würde eine Erhöhung des (berechneten) Wärmeleitvermögens, wie sie z. B. durch den beobachteten Zahlenwert des Koeffizienten im *Wiedemann-Franz*schen Gesetz gefordert wird (Nr. 9).

Größere Bedeutung als den mehr formalen statistischen Erweiterungen der ursprünglichen Theorie wird man den Erweiterungen der physikalischen Grundlagen zuschreiben müssen und an sie die Hoffnung knüpfen können, die Ergebnisse der Theorie mit der Erfahrung weiter auszusöhnen. In erster Linie wird man daran denken, die Prozesse der Dissoziationen und Absorption und die Mechanik der Stöße einer genaueren Analyse zu unterziehen. In gewissem Sinne hat eine solche Analyse bereits *Lorentz* selbst in seinem mehrfach genannten *Wolfskehl*-Vortrag vorgenommen. Wirklich in Rechnung gesetzt hat

33) Vgl. auch *E. Riecke,* Phys. Ztschr. 10 (1910), p. 511.

aber die physikalische Sachlage wenigstens in gewissem Maße *Gruner*[34]), allerdings unter Zuhilfenahme einer Reihe von recht künstlichen Hypothesen, die jedoch in einer Überarbeitung sich weitgehend vereinfachen ließen.

Die grundsätzliche Neuerung in dieser zweiten Fassung der Theorie besteht darin, neben den neutralen Metallatomen noch eine weitere Gattung zu betrachten, nämlich die positiven Restatome; die Stöße zwischen den letzteren und den Elektronen werden als vollkommen elastisch angesetzt, zwischen den neutralen Atomen und den Elektronen aber die Gesetze des elastischen Stoßes nur unterhalb eines Grenzwertes G der Relativgeschwindigkeit als gültig betrachtet, oberhalb der Grenzgeschwindigkeit aber ungehinderte Durchquerung vorausgesetzt. Dadurch findet in der Tat wenigstens eine erste Annäherung an die Verhältnisse statt, wie sie auf Grund der experimentellen Befunde an Kathodenstrahlen[35]) zu erwarten sind und zur Grundlage einer physikalisch befriedigenden Theorie gemacht werden müßten. Enthält das Metall bei der Temperatur T N_n neutrale und N_p positive Metallatome in der Volumeinheit, ferner $n = N_p$ Elektronen, sind die Wirkungssphären der beiden Atomarten R_n und R_p und ist allgemein

$$\frac{R_p^2 N_p}{R_n^2 N_n} = \Phi(T), \tag{26}$$

wobei $\Phi(0) = 0$ ist und mit T ständig wächst, so kann man wie bei *Lorentz* ein Verteilungsgesetz und aus diesem die *Lorentz*schen Größen W und ν finden. Die daraus resultierenden Ausdrücke für die elektrische und thermische Leitfähigkeit, die thermoelektrischen Größen usw. enthalten natürlich alle die noch unbekannte Funktion Φ. Für $N_n = 0$, $\Phi = \infty$ gehen die Formeln über in die der *Lorentz*schen Theorie.

Andere Möglichkeiten einer Erweiterung der klassischen Elektronentheorie endlich haben bereits *Riecke, Drude* und *Lorentz* selbst versucht, nämlich die Annahme von mehr als einer Trägergattung; *Lorentz* ist dabei aber auf die bedenklichsten Schwierigkeiten bezüglich des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik gestoßen.[36]) — Auch

---

34) *P. Gruner*, Verh. d. deutsch. phys. Gesellsch. 10 (1908), p. 509; Phys. Ztschr. 10 (1909), p. 48.

35) In Betracht kommen hier in erster Linie die zahlreichen Arbeiten *Lenards* und seiner Schule, die zusammengefaßt sind in Heidelberger Akad. 1918, Nr. 5. Vgl. ferner *P. Lenard,* Ann. Phys. 40 (1913), p. 393; 41 (1913), p. 53; 60 (1919), p. 329; 61 (1920), p. 665.

36) Vgl. auch *H. A. Lorentz,* Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 4 (1907), p. 125.

eine ergiebige Durchbildung einer weiteren Möglichkeit, nämlich der Unterscheidung von freien und halbfreien oder lose gebundenen Elektronen, liegt bisher noch nicht vor.[37])

II. Anwendungen und Folgerungen der gaskinetischen Theorie.

9. Das Gesetz von Wiedemann und Franz; Temperaturkoeffizient des elektrischen Leitvermögens. a) Als der schönste Erfolg der gaskinetischen Theorien wird die Ableitung des Gesetzes von *Wiedemann* und *Franz* betrachtet, so daß ein eingehender Vergleich mit der Erfahrung hier wünschenswert erscheint. Für das Verhältnis der thermischen zur elektrischen Leitfähigkeit liefern die einzelnen in Abschnitt I behandelten Theorien die folgenden Ausdrücke, die nochmals zusammengestellt seien:

Riecke (Wärmeleitfähigkeit mit Strom) $\frac{3}{2}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^2 T(1+\frac{2}{3}\beta T)$,

Riecke (Wärmeleitfähigkeit ohne Strom) $\frac{3}{2}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^2 T(1+\frac{2}{3}\beta T)(1+\omega\eta)$,

Drude[38]) $\frac{4}{3}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^2 T$,

Lorentz, *Debye* $\frac{8}{9}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^2 T$,

Bohr, *Livens* (Zentralkräfte wie r^{-n}) $\frac{8}{9}\,\frac{n}{n-1}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^2 \cdot T$,

Gruner (Grenzspannung G) $\frac{8}{9}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^2 T\cdot f(G,T)$.

Setzt man in diesen Formeln für $\frac{\alpha}{e}$ den Wert $1{,}29\cdot 10^4$ ein, der sich mit großer Genauigkeit aus der Gaskonstante und dem elektrochemischen Äquivalent bestimmen läßt, so erhält man für $\frac{\varkappa}{\sigma}\cdot\frac{1}{T}$, wo die Leitfähigkeit nun elektromagnetisch zu messen ist, nach *Riecke* I (für $\beta=0$) $2{,}51\cdot 10^8$, nach *Drude* $2{,}27\cdot 10^8$ und nach *Lorentz* (bzw. nach *Bohr* für $n=\infty$) $1{,}49\cdot 10^8$ für alle Metalle. Zunächst ist mit diesem Ergebnisse die Erfahrung zu vergleichen, und zwar wird dies nach drei Richtungen hin zu geschehen haben, nämlich: a) bezüglich

37) *M. Reinganum*, Verh. d. deutsch. phys. Gesellsch. 1906, p. 593; *R. Gans*, Ann. d. Phys. 20 (1906), p. 324; *H. A. Lorentz*, *Wolfskehl*-Vortrag, Göttingen 1914, p. 171; *J. Königsberger* u. *J. Weiß*, Ann. d. Phys. 35 (1911), p. 1.

38) Vgl. jedoch die Bemerkung hierzu in Fußn. 16); nach Korrektion würde der Faktor $\frac{8}{9}$ folgen.

der numerischen Größe[39]), b) der Konstanz bei allen Metallen, c) bezüglich der Konstanz mit der Temperatur (*Lorenz*sche Regel). Während bei tiefen Temperaturen nach keiner der drei Richtungen Übereinstimmung mit der Erfahrung vorhanden ist, scheint mit steigender Temperatur eine Annäherung an die theoretischen Verhältnisse stattzufinden, insofern wenigstens, als für alle Metalle $\frac{\varkappa}{\sigma} \cdot \frac{1}{T}$ demselben konstanten Wert von etwa $2{,}4 \cdot 10^8$ zustrebt, der also zwischen den von *Riecke* und *Drude* errechneten und überraschenderweise am weitesten entfernt von dem *Lorentz*schen nach den strengsten Methoden erhaltenen Wert liegt. Im übrigen zeigen die einzelnen Metalle sowohl hinsichtlich der Größe von $\frac{\varkappa}{\sigma} \cdot \frac{1}{T}$ ein individuelles Verhalten (geben aber im Mittel immerhin Werte, die sich nicht weit von den theoretischen Werten *Riecke*s und *Drude*s entfernen), als auch Abweichungen, und zwar wiederum spezifischer Art von der *Lorenz*schen Regel (doch ist auch hier die Größenordnung unverkennbar in recht guter Übereinstimmung mit der Temperatur).

Dieses, wenn auch nicht sehr ausgeprägte, so doch deutliche individuelle Verhalten, das in den Formeln von *Drude* und *Lorentz*, die nur universelle Konstanten enthalten, natürlich nicht zum Ausdruck kommen kann, läßt sich deuten unter der Annahme einer Teilchengattung (Elektronen) nach der Theorie von *Riecke* mit $\beta \neq 0$, allerdings nur, wenn die Teilchendichte sehr stark von der Temperatur abhängt und mit steigender Temperatur abnimmt, ferner in gewissem Umfang nach der Formel von *Bohr* und der von *Gruner*. Die *Bohr*sche Gleichung ist unter diesen formal insofern am wenigsten anschmiegungsfähig, als sie zwar für das Leitfähigkeitsverhältnis von Fall zu Fall durch geeignete Wahl des Kraftexponenten n die beobachteten Werte erzwingen läßt — die beste Übereinstimmung mit dem Mittelwert der beobachteten Werte ließe sich übrigens durch $n = 3$ in Übereinstimmung mit der *Thomson*schen Dublettvorstellung (Nr. **18**) erreichen — aber die Abweichungen von der *Lorenz*schen Regel nur gezwungen zu deuten erlaubt. Die verschiedenen Möglichkeiten, die sich aus der allgemeineren Grundlage seiner Theorie (und z. B. den daraus fließenden Formeln (22a) und (23a)) ergeben müßten, hat *Bohr* ausführlicher diskutiert und teils größere Werte, teils kleinere

39) Zahlenangaben wie überhaupt das empirische Material sind ausführlich gegeben bei *K. Baedecker,* Elektr. Ersch. in Metallen, p. 52ff., und bei *J. J. Thomson,* Corpsth. der Mat., p. 56. Besonders hingewiesen sei auf die schöne und eingehende Diskussion der Sachlag in der Diss. von *N. Bohr.*

als den *Lorentz*schen je nach Maßgabe der nun im einzelnen zugrunde gelegten Annnahmen erhalten; jedenfalls wird man, im Gegensatz z. B. zu *Debye* (vgl. p. 794), die Möglichkeit nicht verneinen dürfen, wenigstens bezüglich des numerischen Wertes des Leitfähigkeitsverhältnisses und wie es scheint zwangloser als bezüglich der *Lorenz*schen Regel (und mehr noch des Temperaturkoeffizienten der elektrischen Leitfähigkeit), die *Bohr*sche Theorie der Erfahrung anzuschließen. *Gruners* Formel ist, wenigstens unter gewissen Voraussetzungen, in der Lage, formal die notwendigen Korrektionen zu erzielen; man wird aber vorerst vielmehr umgekehrt die Größe des Korrektionsgliedes numerisch aus der Erfahrung ableiten müssen, ohne dabei eine wesentliche Vertiefung der Deutung desselben erreichen zu können. Die Theorie von *Drude* gibt Abweichungen vom universellen Gesetz nur unter der Annahme von mindestens zwei Teilchenarten; wie *Drude* gezeigt hat, werden die Abweichungen um so größer, je weniger die Einzelleitfähigkeiten der einzelnen Teilchengattungen voneinander verschieden sind. Sind für zwei Gattungen die Einzelleitfähiffkeiten σ_1 und σ_2, so kann man nämlich $\frac{\varkappa}{\sigma}$ in der Form schreiben[40])

$$(27\text{a}) \qquad \frac{\varkappa}{\sigma} = \frac{4}{3}\left(\frac{\alpha}{c}\right)^2\left(1 + \frac{6\,\sigma_1\sigma_2}{(\sigma_1+\sigma_2)^2}\right).$$

Es ist diese Formel auch insofern bemerkenswert, als sie aus Messungen von $\frac{\varkappa}{\sigma}$ das Verhältnis $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ zu berechnen erlaubt, das sich andererseits auch aus dem optischen Verhalten annähernd herleiten läßt.[41])

Es ist nun selbstverständlich, daß man bei dieser Lage der Dinge nach noch anderen physikalisch vielleicht befriedigenderen Erklärungen für diese Diskrepanz zwischen Theorie und Erfahrung gesucht hat. In erster Linie wird man an eine Mitwirkung der Metallatome bei der Wärmeleitung denken[42]), da diese ohne Transport von Materie möglich ist und außerdem auch Isolatoren thermische Leitfähigkeit zeigen. Man muß dann von dem beobachteten Wert von $\varkappa$ den von den Atomen herrührenden Teil abziehen, d. h. man müßte erwarten, daß der theoretische Wert stets kleiner ist als der experimentell gefundene, und von diesem Standpunkt aus erscheint die größte Abweichung zwischen Theorie und Erfahrung bei der Theorie von *Lorentz* und *Debye* nun gerade als Stütze dieser Theorien. Bei

40) *P. Drude*, l. c. p 583.

41) *P. Drude*, Phys. Ztschr. 1 (1900), p. 161.

42) *P. Debye*, l. c. p. 487; *J. Königsberger*, Phys. Ztschr. 8 (1907), p. 237.

näherer Betrachtung treten aber auch diesem Ausweg die bedenklichsten Hindernisse entgegen; wie *Reinganum*[43]) bemerkt, müßte man nämlich für die Wärmeleitung der Isolatoren einen Wert annehmen, der etwa ein Drittel des Wertes für Silber beträgt. Auch die Heranziehung des Wärmeaustausches durch innere Strahlung reicht[44]) selbst der Größenordnung nach nicht aus, die *Lorentz*sche Theorie quantitativ der Erfahrung anzuschließen, so daß hier in der Tat eine wesentliche Lücke der Theorie vorhanden ist. Einen anderen Vorschlag unter Heranziehung der Magnetisierungselektronen zum Wärmeaustausch hat *Reinganum*[45]) anläßlich der Feststellung eines Zusammenhanges von $\frac{\varkappa}{\sigma}$ mit dem Atomgewicht und den magnetischen Eigenschaften gemacht.

b) Von fundamentaler Wichtigkeit für die Kritik der gaskinetischen Ansätze ist nun noch ein zweiter Punkt, nämlich der Temperaturkoeffizient des elektrischen Leitvermögens. Alle besprochenen Theorien geben das elektrische Leitvermögen proportional der Dichte N der freien Elektronen, der freien Weglänge l, der mittleren Geschwindigkeit u und umgekehrt proportional der absoluten Temperatur T. Setzt man u proportional $\sqrt{T}$, so wird also

$$\sigma \text{ prop. } Nl \cdot T^{-\frac{1}{2}}. \tag{27a}$$

Die Messungen[46]) ergeben im Gebiet von den höchsten Temperaturen herab bis etwa zur Temperatur der flüssigen Luft das sogenannte Gesetz von *Clausius*, nämlich Proportionalität mit T^{-1}, das recht genau gilt; der Temperaturkoeffizient des spez. Widerstandes ist merkwürdigerweise nahezu gleich dem reziproken Ausdehnungskoeffizienten der Gase. Um also Theorie und Erfahrung in Übereinstimmung zu bringen, müßte man eine beträchtliche Abhängigkeit von N oder l oder nahezu Unabhängigkeit von Nlu von der Temperatur annehmen. (Auch die erweiterte Theorie von *Debye* (p. 794) gibt ohne Hilfsannahmen nicht die beobachtete Abhängigkeit.) Da man füglich wird annehmen müssen, daß N mit steigender Temperatur zunimmt, so lassen sich alle Theorien mit der Erfahrung nur in Übereinstimmung bringen, wenn die freie Weglänge mit steigender Temperatur abnimmt. Näheres über diesen Punkt ist zusammengestellt in den

---

43) *M. Reinganum*, Heidelberger Akad. 1911, Abh. 10, p. 18.

44) *M. Reinganum*, Phys. Ztschr. 10 (1909), p. 355, 645; 11 (1910), p. 673; *E. Riecke*, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 3 (1916), p. 34.

45) *M. Reinganum*, Verh. d. deutsch. phys. Gesellsch. 8 (1906), p. 1593; Phys. Ztschr. 7 (1906), p. 787.

46) Literatur bei *K. Baedecker*, l. c. p. 21 ff.

Nr. **14** und **17** und, soweit die Verhältnisse bei tiefsten Temperaturen[47]) schon hereinspielen, hauptsächlich im Abschnitt IV.

10. Thermoelektrische Effekte. Voltaeffekt. Die enge Beziehung zwischen Wärmeleitung und Elektrizitätsleitung, die im *Wiedemann-Franz*schen Gesetz bereits unmittelbar hervortritt, zeigt sich nun weiterhin in besonders anschaulicher Weise in der Deutung der thermoelektrischen Effekte durch die kinetischen Theorien, wenn auch hier die Einheitlichkeit und Übersichtlichkeit bei der Durchführung derselben im einzelnen bereits etwas verloren geht. Bezüglich des Voltaeffektes ist hier und insbesondere auch in Nr. **14** und **15** zu beachten, daß die übliche und deshalb auch in diesem Artikel übernommene Bezeichnung „Voltaeffekt" sich stets bezieht auf den reinen Metalleffekt, seien nun zwei Metalle in unmittelbarem Kontakt oder im Vakuum sich frei gegenüberstehend, und daß diese aus der Theorie folgende Potentialdifferenz zwischen den beiden Metallen mit der in vielen unreinen Versuchen und auch im sog. *Volta*schen Fundamentalversuch auftretenden nichts zu tun hat. Diese letztere ist vielmehr eine elektrochemische Erscheinung der auf Metalloberflächen stets vorhandenen Flüssigkeitshaut und 1000 bis 10000 mal größer als jene, die hier gemeinte in reiner Form dagegen wohl überhaupt noch nicht untersucht. (Vgl. dazu *Schottky*, Verh. d. deutsch. Phys. Ges. 16 (1914), p. 482.) Sieht man ab von den rein thermodynamischen Theorien der genannten Effekte[48]) und gewissen, zunächst mehr schematischen Überlegungen[49]) und hält streng fest an der rein kinetischen Auffassungsweise, so lassen sich in ihren physikalischen Grundlagen die drei thermoelektrischen Effekte — Seebeckeffekt, Peltiereffekt und Thomsoneffekt — verstehen auf Grund der alten *Kohlrausch*schen Mitführungstheorie[50]), und die neueren kinetischen Theorien erscheinen im wesentlichen als eine exakte Durchführung derselben.[51]) Da nach der Mitführungstheorie jeder Wärmestrom mit einem elektrischen Strom verbunden ist, kann man die Entstehung des letzteren

---

47) Die experimentelle Literatur ist vollständig gesammelt in zwei Berichten von *J. Clay*, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 8 (1911), p. 383 und *W. Meisner*, ebd. 17 (1921), p. 229.

48) Zusammenfassende Darstellungen bei *K. Baedecker. Graetz,* Handb. d. Elektr. u. d. Magnet. 1, p. 699 ff.; *P. Cermak*, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 8 (1911), p. 241.

49) Z. B. *L. Benedicks,* Ann. d. Phys. 55 (1918), p. 137.

50) *F. Kohlrausch,* Pogg. Ann. 152 (1875), p. 601; *E. Riecke,* Ann. d. Phys. 66 (1898), p. 381 ff.

51) Vgl. die phänomenologische Darstellung von *H. A. Lorentz, Wolfskehl*-Vorträge, Göttingen 1914, p. 174 ff.

so auffassen, daß in jedem von einem Wärmestrom durchflossenen Volumelement eines Metalls eine elektromotorische Kraft erzeugt wird, und gelangt dann durch Summation über diese elementaren elektromotorischen Kräfte zu der thermoelektrischen Kraft eines Kreises. Da ferner jeder elektrische Strom von einem Wärmestrom begleitet ist, erhält man wegen der Verschiedenheit des Mitführungskoeffizienten in verschiedenen Metallen unmittelbar eine Wärmeabsorption in der Grenze zweier Metalle, d. h. den Peltiereffekt; und endlich erhält man den Thomsoneffekt durch Verbindung dieser beiden Überlegungen unter Einführung der Gefällkraft[52]) in einem homogenen ungleich temperierten Leiter.

Wenn so zwar die Untersuchung zwanglos angeschlossen werden kann an die Mitführungstheorie und alle bei der Durchrechnung auftretenden Formeln in diesem Sinn gedeutet werden können, so ist es doch im Interesse der kinetischen Theorien, diese von allem phänomenologischen Beiwerk zu befreien. In diesem Sinne ist es angebracht, nicht von dem Gedanken der Mitführung auszugehen, sondern als das Wesentliche die rein kinetische Diffusion der Ladungsträger als Ausgangspunkt zu wählen.[53]) Man erreicht so zugleich, daß nun die Erscheinung des Voltaeffekts physikalisch sich den thermoelektrischen Effekten beiordnet. Von diesem Gesichtspunkt aus sind das Primäre Diffusionsströme der freien Ladungsträger in dem thermisch oder chemisch inhomogenen Leiter, die im stationären Endzustand kompensiert werden durch entgegengesetzte Ströme infolge der entstehenden Potentialdifferenz (Thermo- bzw. Voltakräfte), und Ansätze für die Arbeit der inneren elektrischen Kräfte an den Ladungsträgern führen dann weiter zum Peltier- und Thomsoneffekt. Endlich ist noch eine dritte Möglichkeit denkbar, die Verhältnisse zu betrachten, die zwar nicht in demselben Maß wie die eben erwähnten Diffusionstheorien alle nicht rein kinetischen Elemente vermeidet, aber doch den Anschluß an die Vorstellungen der Gastheorie sehr weitgehend, in gewisser Beziehung sogar noch ausgeprägter zum Ausdruck bringt. Es gehören hierher alle Theorien, welche die Elektronen in Leitern wie ein ideales Gas behandeln, diesem Elektronengas einen bestimmten Druck zuschreiben und mit ihm thermodynamisch operieren. Wir werden darauf in Nr. **14** und **15** zurückkommen.[54])

---

52) *H. Hörig,* Phys. Ztschr. 15 (1914), p. 388; dort weitere Literatur.

53) Es kommen hier vor allem in Betracht die früher erwähnten Theorien von *Drude, Lorentz, Bohr* usw. Eine zusammenfassende Diskussion bei *J. Kunz,* Phil. Mag. 16 (1908), p. 767.

54) In gewisser Beziehung gehört hierher auch die Theorie von *Debye.*

Auf die Einzelheiten der verschiedenen Theorien kann hier nicht eingegangen werden; es sei vielmehr nur die eleganteste und allgemeinste Formulierung kurz besprochen, die *Lorentz*, a. a. O., den Entwicklungen gegeben hat und die, für den Fall wenigstens, daß nur Elektronen am Ladungs- und Energietransport beteiligt sind, das Wesentliche des Gedankenganges klar erkennen lassen. Ausgehend von Gleichung (13) für den Elektronenfluß erhält man, wenn man allgemein noch die potentielle Energie V der Elektronen gegen das Metallatom mit berücksichtigt und demgemäß die Kraft X zusammengesetzt denkt aus zwei Teilen

$$(28\,a) \qquad X = X_m + X_e = -\frac{1}{m}\frac{dV}{dx} - \frac{e}{m}\frac{d\Phi}{dx},$$

für den durch $\nu = 0$ gegebenen stationären Zustand durch Integration längs des Leiterkreises die Integralbeziehung

$$(29) \quad \Phi_1 - \Phi_2 = \frac{1}{e}(V_2 - V_1) + \frac{m}{e}\left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1}\right) = \frac{m}{2e}\int\limits_2^1 \frac{1}{h}\cdot\frac{d\ln A}{dx}\,dx,$$

aus welcher sofort die speziellen Fälle abzulesen sind:

1. Temperatur d. h. h konstant; Voltaeffekt.

2. Chemisch-homogener Kreis, A Funktion von h allein; Gefällkraft.

3. Kreis aus den Metallen $a\,b\,a$, Temperatur der Berührungsstelle (ab) etwa T_1, der Berührungsstelle (ba) etwa T_2; Thermoeffekt.

4. Der Peltier- und Thomsoneffekt ergeben sich durch Berechnung der in einem Volumelement $dx \cdot \Sigma$ entwickelten Wärme, wenn durch die Endflächen derselben der Strom i fließt. Ist w die Arbeit der elektrischen Kräfte an den Elektronen (in diesem Element), $W \cdot \Sigma$ der Wärmefluß durch die Endflächen, so ist die entwickelte Wärme

$$(30\,a) \qquad q = w - \frac{d}{dx}(W \cdot \Sigma)\,dx,$$

worin in der bisherigen Bezeichnung ist

$$(30\,b) \qquad w = \frac{miX}{e}\,dx; \quad X = \frac{1}{2h}\cdot\frac{d\ln A}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{h}\right) + \frac{ei}{m\sigma\Sigma}.$$

Damit zerfällt q in drei Teile, von denen einer unabhängig vom Strom ist (reine Wärmeleitung) und ein zweiter proportional dem Quadrat des Stromes (Joulewärme), die beide nicht weiter interessieren. Ein dritter Teil ist proportional der ersten Potenz von i und hat die Form

$$(30\,c) \qquad q_3 = \frac{mi}{2eh}\frac{d\ln A}{dx}\,dx.$$

Für den speziellen Fall, daß im Element $dx \cdot \Sigma$ der Übergang von einem Metall zu einem anderen liegt, die Temperatur aber konstant ist, gelangt man daraus sofort zum Peltiereffekt, für den speziellen

Fall, daß andererseits die Temperatur im Element $dx \cdot \Sigma$ um dT sich ändert, die chemische Natur des Metalls aber ungeändert bleibt zum Thomsoneffekt.

Nur auf eine von *J. J. Thomson*[55]) herrührende Ableitung der Thomsonwärme sei noch besonders hingewiesen, weil sie den für die Kritik der gaskinetischen Theorie wichtigen Zusammenhang (vgl. p. 853) zwischen der Thomsonwärme und der spezifischen Wärme der Elektronen besonders deutlich hervortreten läßt. *Thomson* schreibt den Elektronen im Metall denselben Druck wie einem Gas bei derselben Temperatur zu und findet zunächst aus der Betrachtung des Elektronenenflusses im Druckgefälle eines ungleich temperierten linearen Leiters, in welchem zugleich ein Strom i fließt, für das mechanische Äquivalent der Wärme, die dem Metall durch die Elektronen zwischen zwei Stellen mit der Temperatur T und $T + dT$ zugeführt wird,

$$\frac{i}{e}\left\{\alpha - \frac{2}{3}\frac{1}{N}\frac{d}{dT}(\alpha N T)\right\}. \tag{31}$$

Ist nun Q die „spezifische Wärme" der Elektronen, so muß diese Energie gleich sein $- iQdT$, woraus für Q, d. h. also für die Thomsonwärme, der Ausdruck folgt:

$$Q = \frac{2}{3}\frac{\alpha}{e}T\frac{d}{dT}\ln\left(NT^{-\frac{1}{2}}\right). \tag{31a}$$

Auch *Herzfeld*[56]) hat den Ausdrücken für Q eine sehr anschauliche Form dadurch gegeben, daß er die Energie E der Elektronen explizite einführte, nämlich:

$$Q = \frac{1}{e}\left\{\frac{dE}{dT} - \beta\frac{E}{T}\frac{\partial \ln N}{\partial T}\right\}, \tag{31b}$$

wo der Faktor β nach *Drude* den Wert $\frac{4}{3}$, nach *Lorentz* den Wert $\frac{2}{3}$ hat.

Die Ergebnisse aller Theorien im einzelnen hier aufzuführen, würde zu weit führen, um so mehr, als eine direkte quantitative Prüfung der Endformeln durch einen Vergleich mit der Erfahrung nicht möglich ist, weil in denselben die unbekannten Trägerkonzentrationen auftreten; man wird vielmehr mit Hilfe dieser Formeln und des empirischen Materials die Trägerkonzentrationen zu ermitteln suchen. Andererseits kann man aus einigen qualitativen Schlüssen einen Anhalt für die prinzipielle Richtigkeit und Vollständigkeit der theoretischen Grundlage gewinnen. Die Übereinstimmung mit den Ergebnissen der thermodynamischen Theorie, an die man

55) *J. J. Thomson,* Corpusculartheorie der Materie, p. 75 ff.

56) *K. Herzfeld,* Ann. d. Phys. 41 (1913), p. 27.

zunächst denken könnte[57]), ist für die Formel von *Lorentz* von selbst erfüllt, z. B. für die von *Drude* durch plausible Annahmen zu erzwingen, wenngleich hierauf wegen der bekannten Reversibilitätsfragen nicht soviel Gewicht zu legen ist. Ausführlich findet man diese Fragen diskutiert in der Arbeit von *Bohr* (Nr. 7), wo die wichtigsten diesbezüglichen Untersuchungen sowohl auf seiten der Elektronentheorie wie auf seiten der Thermodynamik kritisch besprochen sind. Die Ausführungen *Bohrs* scheinen wegen der großen Allgemeinheit seiner Voraussetzungen besonders bemerkenswert und umfassen bei geeigneter Spezialisierung natürlich auch die übrigen Theorien. Wichtiger ist, daß gewisse allgemeine Sätze, wie z. B. der von der thermoelektrischen Spannungsreihe, des Gesetzes von *Magnus*[58]) usw., durch die Formeln erfüllt sind. Dem stehen nun aber bedenkliche Mängel gegenüber, die gerade zum Teil die Erweiterungen der rein kinetischen Theorie veranlaßt haben. Am bedenklichsten scheint neben der Stetigkeit der Thermokräfte beim Durchgang durch den Schmelzpunkt, aus welcher nach den obigen Formeln Stetigkeit der Kernkonzentrationen folgen würde, und dem in allen Theorien zu großen Wert der Thomsonwärme (vgl. Nr. 17) das merkwürdige Verhalten gewisser Halbleiter in thermoelektrischer Beziehung zu sein. Von diesen geben einige sehr große Thermokräfte, z. B. gegen Kupfer, so daß man teils sehr große, teils sehr kleine Elektronenkonzentrationen im Vergleich zu der im Kupfer annehmen müßte. Auch die von *Baedecker* (a. a. O. Fußn. 48) vermerkte Unmöglichkeit, auf Grund der bisher behandelten Theorien das anisotrope thermoelektrische Verhalten mancher Kristalle zu verstehen, wird man hierher zählen dürfen, ebenso wie vielleicht die beträchtlichen Unterschiede zwischen den von *Hörig* (Fußn. 52) gemessenen und den theoretisch zu erwartenden elektromotorischen Kräften im Temperaturgefälle bei chemisch-homogenem Material. Eine zusammenfassende Kritik kann erst später (Abschnitt III und IV) erfolgen.

11. Thermomagnetische und galvanomagnetische Effekte.[59]) Eine ganz wesentliche Vertiefung erfährt nun die Kenntnis der Elek-

---

57) *L. Cermak*, Fußn. 48); *H. A. Lorentz*, *Wolfskehl*-Vorträge, Göttingen 1914, p. 178 ff., insbes. p. 188.

58) Die Frage nach der Gültigkeit dieses Gesetzes ist allerdings durch neuere Untersuchungen von *Benedicks*, Paris C. R. 163 (1916), p. 751; 165 (1917), p. 391, 425; Ann. d. Phys. 55 (1918), p. 1, 103, wieder aktuell geworden. Vgl. dazu jedoch *H. Haager* u. *F. Zernicke*, Ann. d. Phys. 61 (1920), p. 753.

59) Zusammenfassende Darstellungen bei *Baedecker* (Fußn. 39) und *H. Zahn*, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 5 (1908), p. 166, besonders aber bei *P. Suter* (Fußn. 4),

trizitäts- und Wärmeleitung in Metallen durch einen Komplex von Erscheinungen, die man gewöhnlich unter der als Überschrift dieses Abschnitts dienenden Bezeichnung zusammenfaßt und die sich charakterisieren lassen als eine Beeinflussung des Ladungs- und Wärmetransports durch ein äußeres magnetisches Feld. Neben einer ganz allgemein auftretenden Modifikation aller elektrischen und thermischen Eigenschaften eines Leiters zeigt sich nämlich eine Reihe neuartiger Erscheinungen, die durch die Vektornatur des magnetischen Feldes bedingt sind: Es treten in einem magnetischen Feld, das senkrecht zum Leiter gerichtet ist, auch transversale Wirkungen auf, d. h. solche, die senkrecht auf der Richtung der magnetischen Kraftlinien stehen. Im einzelnen lassen sich hierher gehörende Effekte, von denen im ganzen acht zu erwarten und auch in der Tat beobachtet wenn auch nur zum Teil genauer experimentell untersucht sind, in ein einfaches geometrisches Schema einreihen. Gemeinsames Kennzeichen ist das Auftreten eines elektrischen Stromes (Potentialdifferenz) oder eines Wärmestromes (Temperaturdifferenz) im transversalen Magnetfeld innerhalb eines Leiters, in welchem ein elektrischer Strom oder Wärmestrom fließt. Zur Bezeichnungsweise sei bemerkt, daß man den Effekt (in also nicht eindeutiger Weise) als galvano- oder thermomagnetischen bezeichnet, wenn der primäre Strom ein elektrischer oder ein Wärmestrom ist, und daß man ihn als transversal oder longitudinal bezeichnet, wenn primärer Strom und sekundärer Effekt senkrecht zueinander (und senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien) oder in derselben Richtung (und senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien) liegen; die einzelnen Effekte werden in der Literatur häufig mit den Namen ihrer Entdecker bezeichnet, doch scheint hier der Sprachgebrauch zu schwanken.

Wir erhalten so die folgende Liste der acht möglichen Effekte im transversalen Magnetfeld:

Transversaleffekte.

Primär elektr. Strom	sekundäre Potentialdiff.	Transversaler Halleffekt (*Hall* 1879)
	sekundäre Temperaturdiff.	Galvanomagnet. Transversaleffekt (*v. Ettingshausen* 1887)
Primär-Wärmestrom	sekundäre Potentialdiff.	Thermomagnet. Transversaleffekt (*Nernst* u. *v. Ettingshausen* 1886)
	sekundäre Temperaturdiff.	Thermo-Halleffekt (*Leduc* u. *Righi* 1887)

wo eine eingehende Übersicht über den derzeitigen Stand der Forschung mit Literaturverzeichnis gegeben ist. Kurze, mehr orientierende Übersichten u. a. bei *Riecke,* Lehrb. d. Physik, Bd. II, und in einer Arbeit von *H. Zahn,* Ann. d. Phys. 14 (1904), p. 886.

Longitudinaleffekte.

Primär elektr. Strom	sekundäre Potentialdiff.	Widerstandsänderung im Magnetfeld
	sekundäre Temperaturdiff.	Galvanomagnet. Longitudinaleffekt
Primär-Wärmestrom	sekundäre Potentialdiff.	Thermomagnet. Longitudinaleffekt (*Nernst* u. *v. Ettingshausen* 1888)
	sekundäre Temperaturdiff.	Änderung des Wärmeleitvermögens im Magnetfeld (*v. Everdingen*).

Als den Koeffizienten dieser Effekte bezeichnet man ihre Größe für den Strom 1 und das Feld 1 und hat nun nur noch das Vorzeichen des Effekts nach einer Übereinkunft festzulegen, welche die Richtung des sekundären Stromes bezüglich der Richtung des magnetischen Feldes und der Richtung des primären Stromes, also die positiven Achsenrichtungen des rechtwinkligen Systems primärer Strom, sekundärer Strom, Magnetfeld bestimmt.

Eine Gruppe von Erscheinungen, die bei longitudinaler Magnetisierung (magnetisches Feld parallel der Stromrichtung) auftreten, ebenso wie die Beeinflussung der thermoelektrischen Effekte durch ein Magnetfeld (Thermoeffekt und Peltiereffekt zwischen nicht magnetisierten und magnetisierten Leitern) ist den obengenannten Effekten gegenüber für weitergehende Folgerung zunächst noch von geringerer Bedeutung, so daß dieser kurze Hinweis genügen soll. Auch dem sog. Corbinoeffekt kommt eine grundsätzliche Bedeutung nicht zu, er kann als eine Spezialform des Halleffekts aufgefaßt werden. Die Stellung der kinetischen Theorie zu den galvanomagnetischen und thermomagnetischen Effekten — von der phänomenologischen Darstellung und teilweisen Verknüpfung der Effekte sowie der thermodynamischen Theorie sei auch hier abgesehen — ist in den Grundzügen unmittelbar zu übersehen. Es wird sich physikalisch handeln um die Beeinflussung der Bewegung der Ladungsträger durch ein äußeres magnetisches Feld, wie sie in den gröbsten Zügen ohne weiteres in den genannten Effekten zutage zutreten und eine sehr erwünschte Bestätigung der Grundanschauung der kinetischen Theorie zu geben scheint. Der exakten Durchführung der diesbezüglichen Rechnungen auf dem Boden einer der speziellen Theorien und der Prüfung der Ergebnisse an der Erfahrung stehen aber erhebliche Schwierigkeiten entgegen. Teils beruhen diese auf einer formalen Kompliziertheit der Durchführung, teils auf der Unmöglichkeit, die einzelnen Effekte reinlich voneinander in der Theorie zu trennen, teils und nicht am wenigsten in dem Mangel an genügend umfangreichen und zuverlässigen Beobachtungsdaten. Dazu kommt, daß die Resultate der einzelnen Theorien, soweit sie bisher auch auf die genannten Effekte angewandt

wurden, in wesentlichen Punkten voneinander abweichen. Nach *Riecke*[60]) hängt so z. B. der Hallkoeffizient im wesentlichen von der Beweglichkeit der Träger, nach *Drude*[61]) auch noch von der Temperaturabhängigkeit der Trägerdichten ab, während *Lorentz* den ganzen hier zu behandelnden Komplex in seiner Theorie überhaupt noch nicht verarbeitet hatte. Diese Lücke hat *Gans*[62]) zum Teil ausgefüllt und die Bewegung der Elektronen im Magnetfeld nach den strengen Methoden von *Lorentz* untersucht, mit dem Ergebnis, daß die Diskrepanz zwischen *Riecke* und *Drude* sich bei schärferer Fassung der äußeren Bedingungen teilweise auflöst und daß sich in den präzisen Ansätzen von *Lorentz* eine Möglichkeit bietet, durch Unterscheidung isothermer und adiabatischer Vorgänge die Verhältnisse wesentlich zu klären; die Ansätze von *Gans-Lorentz* wurden dann endlich noch verallgemeinert von *Livens*[63]), allerdings ohne daß damit an faßbaren Resultaten viel gewonnen werden konnte. Endlich hat sich auch *Bohr*[64]) auf Grund seiner allgemeinsten und deshalb sehr anschmiegungsfähigen Theorie mit den hierher gehörenden Erscheinungen beschäftigt. Abgesehen von dem Nachweis, daß entgegen der Behauptung verschiedener anderer Autoren[65]) die Gegenwart freier Elektronen im Innern eines Metalls weder zu paramagnetischen noch zu diamagnetischen Eigenschaften desselben Veranlassung gibt, konnte er bezüglich der galvanomagnetischen Effekte die Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung verbessern. In keiner dieser Theorien aber gelingt es, alle Effekte erschöpfend zu deuten durch nur eine Trägerart. Es wird dies bereits auf Grund des einfachen physikalischen Bildes der Ablenkung von Corpuscularströmen im Magnetfeld verständlich, welche z. B. das bei manchen Metallen positive, bei anderen negative Vorzeichen des Halleffektes unerklärlich erscheinen läßt; auch zeigt sich bei der eingehenderen Analyse, daß für den Fall nur einer Trägerart die Zahl der verfügbaren Konstanten zu klein wird. Über Vorschläge, diese Schwierigkeiten zu beheben, vgl.

60) *E. Riecke,* Ann. d. Phys. 66 (1898), p. 559ff.

61) *P. Drude,* Ann. d. Phys. 3 (1900), p. 369; vgl. dazu *O. Corbino,* Phys. Ztschr. 12 (1911), p. 842.

62) *R. Gans,* Ann. d. Phys. 20 (1906), p. 293; ergänzt wurde die *Gans*sche Theorie von *P. Gruner,* Arch. sc. Phys. Nat. Genève 28 (1909), p. 587; vgl. dazu Z. d. Thullie Krak. Anz. 1912, p. 861.

63) *S. H. Livens,* Phil. Mag. 30 (1915), p. 527.

64) *N Bohr,* Diss. Kopenhagen 1911.

65) *J. J. Thomson,* Congr. d. Phys. 3 (1900), p. 148; *W. Voigt,* Ann. d. Phys. 9 (1902), p. 130; *P. Langevin,* Ann. Chem. Phys. 5 (1905), p. 90; *Z. Thullie,* Pr. Math.-Fiz. Warzava 19 (1908), p. 207.

p. 821 dieses Artikels; eine befriedigende Lösung steht jedenfalls zurzeit noch aus.

Im einzelnen ist zunächst zu den diesbezüglichen Theorien von *Riecke* und *Drude* folgendes zu bemerken. *Riecke* kann seine Theorie in einfacher Weise sofort anwenden auf die Ableitung der hier in Frage kommenden Effekte durch Betrachtung der Wanderung der Ladungsträger in einem superponierten elektrischen und magnetischen Feld, d. h. unter dem Einfluß zweier Triebkräfte, der elektrischen und der im Magnetfeld nach *Biot-Savart* hinzukommenden magnetoponderomotorischen, wenn er die früher von ihm abgeleiteten Ausdrücke für die spezifischen Wanderungs- und Verschiebungsgeschwindigkeiten (Beweglichkeiten) benutzt; in diesen steckt der ganze kinetische Teil der Theorie implizite, so daß es sich nun sozusagen nur um eine sachgemäße formale Nutzanwendung handelt. Die Bedingung, daß der Zustand stationär ist, liefert dann unmittelbar die gesuchten Formeln für die galvanomagnetischen und thermomagnetischen Effekte (behandelt sind übrigens von *Riecke* nur die Transversaleffekte). In *Drudes* Ableitung ist die Sachlage insofern etwas komplizierter, als die Konzentrationsänderungen der Träger berücksichtigt werden; infolge der Abbiegung der Trägerbahnen entstehen Konzentrationsgefälle der Träger, welche ihrerseits Diffusionsströme zur Folge haben. Zur Einsicht in den typischen Bau der Endformeln beider Theorien genügt die Mitteilung eines Beispieles (Halleffekt) mit einigen erläuternden Bemerkungen:

Riecke. Es bedeuten i die Stromdichte im magnetischen Maß, b die Breite der Platte, σ die Leitfähigkeit, G die Intensität des Magnetfeldes, $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ die spezifischen Wanderungsgeschwindigkeiten, $\mathfrak{g}_p$ und $\mathfrak{g}_n$ die spezifischen Verschiebungsgeschwindigkeiten der beiden berücksichtigten (positiven und negativen) Trägerarten, ΔE die transversale Potentialdifferenz im Halleffekt:

$$\Delta E = \frac{G \cdot b \cdot i}{\sigma} \frac{\mathfrak{u}^2 \mathfrak{g}_n - \mathfrak{v}^2 \mathfrak{g}_p}{\mathfrak{u} \mathfrak{g}_n - \mathfrak{v} \mathfrak{g}_p}. \tag{32}$$

Drude. Es bedeuten außer den eben eingeführten Abkürzungen N_1, N_2 die Dichte der Träger, v_1, v_2 die Beweglichkeiten. Dann ist für den Halleffekt

$$\Delta E = \frac{G \cdot i \cdot b}{\sigma} e \cdot c \cdot \frac{v_1 \frac{d \ln N_2}{d T} - v_2 \frac{d \ln N_1}{d T}}{\frac{d \ln (N_1 N_2)}{d T}} \tag{33}$$

gültig unter Vernachlässigung des gleichzeitig nach der Theorie zu erwartenden longitudinalen Temperatureffekts. Ist $\frac{d \ln (N_1 N_2)}{d T}$ eine uni-

verselle positive Temperaturfunktion, so kann also der Halleffekt formal verschiedenes Vorzeichen in verschiedenen Metallen haben (wogegen z. B. der galvanomagnetische Transversaleffekt stets dasselbe Vorzeichen hat).

Außer den vier Transversaleffekten behandelt *Drude* auch noch die Longitudinaleffekte ganz kurz, allerdings ohne Endformeln zu geben und findet für dieselben Proportionalität mit dem Quadrat der magnetischen Feldstärke.[66])

Wie erwähnt, hat *Gans* die *Lorentz*schen Ansätze auf den Fall erweitert, daß auf die im Metall bewegten Elektronen ein äußeres Magnetfeld wirkt. Die Überlegungen gehen zunächst darauf hinaus, die modifizierte Form des *Maxwell*schen Verteilungsgesetzes zu finden. Ist dieses bekannt, so ist der elektrische und der Wärmestrom in derselben Weise wie bei *Lorentz* zu berechnen, mit dem Unterschied natürlich, daß das Problem nun nicht mehr als ein eindimensionales, sondern als ein zweidimensionales zu formulieren ist; elektrischer und Wärmestrom haben nun zwei Komponenten in einer zur Richtung des magnetischen Feldes senkrechten Ebene. Explizite und übersichtliche Formeln ergeben sich bei kleinen Magnetfeldern (so daß höchstens noch die zweiten Potenzen der Feldkraft zu berücksichtigen sind) für die den *Lorentz*schen ν und w (vgl. p. 790) nun analogen ν_x, ν_y und W_x, W_y, aus denen alle galvanomagnetischen und thermomagnetischen Effekte abzuleiten sind. Bei der Verwertung dieser Formeln ist es nun aber wesentlich, wie schon oben betont, die Versuchsbedingungen scharf zu fassen und zu unterscheiden zwischen isothermen Vorgängen, bei denen sich die Temperaturdifferenzen nicht ausbilden können, und zwischen adiabatischen, bei denen dies der Fall ist. Für den Halleffekt folgt:

$$(34)\quad \begin{cases} \text{isotherm} & \Delta E = \frac{3\pi}{8}\frac{ev}{\sigma}\cdot G\cdot b\cdot i, \\ \text{adiabatisch} & \Delta E = \frac{3\pi}{16}\frac{ev}{\sigma}\frac{1}{4}\left(9 + 2T\frac{d\ln N}{dT}\right) G\cdot b\cdot i, \end{cases}$$

für die Widerstandsänderung im Magnetfeld:

$$(35)\quad \begin{cases} \text{isotherm} & \frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} = -\frac{9\pi}{64}(4-\pi)\, e^2v^2\cdot G^2, \\ \text{adiabatisch} & \frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} = -\frac{32-9\pi}{32}\frac{9}{16}\pi\cdot e^2v^2G^2, \end{cases}$$

wobei jedoch vorausgesetzt ist, daß kein longitudinales (sondern im

---

66) Bezüglich einer Prüfung an der Erfahrung vgl. *Zahn,* a. a. O., p. 928 ff.; da sich eine nur sehr unbefriedigende Übereinstimmung ergibt, ist auf die Mitteilung hier verzichtet.

adiabatischen Fall nur ein transversales) Temperaturgefälle zur Ausbildung gelangt.

Die übrigen Effekte werden von *Gans* nicht durchgerechnet, sind jedoch aus den für die v und W gegebenen Formeln unschwer anzugeben. Es wurde dies dann nachträglich durchgeführt von *Zahn*[67]) für den Nernsteffekt, Leduceffekt und den thermomagnetischen Longitudinaleffekt. Da die Theorie von *Gans* vier Gleichungen zwischen acht zunächst unbekannten Größen, nämlich den Wärme- und Elektrizitätsströmen in zwei Richtungen sowie den Potential- und Temperaturgefällen in diesen Richtungen liefert, sind dazu noch vereinfachende Hilfsannahmen (Vernachlässigung einiger dieser Unbekannten) notwendig; eine Prüfung der erhaltenen Formeln an der Erfahrung ist noch nicht möglich. Beachtenswert sind aber noch einige Bemerkungen von *Gans* über den Unterschied der Theorie von *Drude* und der eben besprochenen an *Lorentz* anschließenden bezüglich der Verschiedenheit des Halleffektes im Falle der elektrometrischen und galvanometrischen Messung, die ebenso wie die schon genannten im Falle isothermer und adiabatischer die Wichtigkeit eindeutiger Versuchsverhältnisse erkennen lassen.[68]) Die Endformeln der Theorie von *Gruner*, die auch *de Thullie* benutzt[69]), unterscheiden sich von den aus der Theorie von *Gans* folgenden nur um den Faktor $\frac{2L}{S^2}$, worin L und S recht kompliziert gebaute Funktionen der für die *Gruner*sche Theorie charakteristischen Grenzgeschwindigkeit des elastischen Stoßes sind.

Was endlich die oben in Fußn. 63) genannte Untersuchung von *Livens* anlangt, so gibt sie eine weitere Verallgemeinerung der Theorie von *Gans* in dem Sinne, daß zwischen den Elektronen und den Atomen Zentralkräfte als wirkend angenommen werden, so daß die potentielle Energie des Elektrons gegen das Atom proportional r^{-s} ist (vgl. z. B. p. 791 dieses Artikels). Für $s = \infty$ erhält man dann den Fall elastischer Kugelstöße und hier also die Formeln von *Gans*. *Livens* gewinnt ebenfalls für die Verteilungsfunktion durch Verallgemeinerung der Methode von *Lorentz* in der genannten Richtung und für den Fall eines kombinierten elektrischen und magnetischen Feldes zunächst einen (recht komplizierten) geschlossenen Ausdruck, aus dem

67) *H. Zahn*, Phys. Ztschr. 15 (1914), p. 663.

68) Vgl. dazu etwa *M. Corbino*, Phys. Ztschr. 12 (1911), p. 842; *J. Königsberger* und *G. Gottstein*, ebd. 14 (1913), p. 232; *Senepa*, Arch. de Genève 35 (1913), p. 58.

69) *P. Gruner*, Phys. Ztschr. 10 (1909), p. 48; *Z. de Thullie*, Krak. Anz. 1912, p. 61; vgl. auch Arch. de Genève 28 (1909), p. 587.

in bekannter Weise die Komponenten des elektrischen und des Wärmestromes und damit der unmittelbare Ausgangspunkt für die Theorie der hier zu betrachtenden Effekte folgt, die sich durch Spezialisierung der Reihe nach ergeben. Die Endformeln sind im folgenden zusammengestellt, die Bezeichnungen an die bisher betrachteten Formeln angeschlossen:

Halleffekt (elektrometrisch):

$$\Delta E = \frac{3\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{s}\right)}{\left(\Gamma\left(2+\frac{2}{s}\right)\right)^2\cdot 4\,Nec}\cdot G\cdot b\cdot i; \tag{36}$$

Galvanomagnetischer Transversaleffekt:

$$\Delta T = \frac{e^2 l_m}{mc\cdot R}\,\frac{\frac{2}{s}-\frac{1}{2}}{2+\frac{2}{s}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{s}\right)}{\Gamma\left(2+\frac{2}{s}\right)}\cdot G\cdot b\cdot i, \tag{37}$$

worin l_m die mittlere freie Weglänge der Elektronen ist.

Thermohalleffekt:

$$\Delta T = -\frac{7s^2+8s+16}{8s(s+1)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{6}\right)}{\Gamma\left(2+\frac{2}{s}\right)}\,\frac{e l_m q^{\frac{1}{2}-\frac{2}{s}}}{mc}\cdot G\cdot b\cdot\frac{dT}{dz}, \tag{38}$$

worin q mit dem Mittelwert des Quadrates der Elektronengeschwindigkeit zusammenhängt durch $q = \frac{3}{2\,u^2}$.

Thermomagnetischer Transversaleffekt:

$$\Delta E = \left(\frac{2}{s}-\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{s}\right)}{\Gamma\left(2+\frac{2}{s}\right)}\cdot\frac{R\cdot l_m q^{\frac{1}{2}-\frac{2}{s}}}{mc}\cdot G\cdot b\cdot\frac{dT}{dz}. \tag{39}$$

Außerdem ergeben sich für die Longitudinaleffekte nebenbei noch einige Formeln von ähnlichem Bau, nämlich für die Widerstandsänderung im Magnetfeld und für die Änderung der Wärmeleitfähigkeit. Zusammenfassend wird man den Resultaten von *Livens* insofern eine größere Anschmiegungsfähigkeit an die Erfahrung zuerkennen können, als das Vorzeichen in manchen Fällen, z. B. für den thermomagnetischen und galvanomagnetischen Transversaleffekt, von der absoluten Größe des im Anziehungsgesetz auftretenden Exponenten s abhängt (oder umgekehrt, insofern als man für diesen aus den beobachteten Vorzeichen nun Grenzwerte angeben kann). Im übrigen führt aber die Theorie nicht prinzipiell über die einfacheren älteren hinaus, sie ist ebenso wie diese nicht einmal zur qualitativen Deutung der Erfahrung fähig,

und zwar vor allem deshalb, weil sie für ein Metall dasselbe Vorzeichen für alle Effekte liefert (dagegen bei geeigneter Wahl von s für verschiedene Metalle verschiedene Vorzeichen liefern kann), während die Erfahrung häufig verschiedene Vorzeichen ergeben hat[70]; eine allgemeine Diskussion der Sachlage hat *Livens* am Schluß seiner Arbeit gegeben[71] und die Möglichkeiten einer Ergänzung der Theorie (inneres magnetisches Feld, Anisotropie im Magnetfeld) kurz besprochen. Da der mathematische Teil der Theorie hierbei kaum noch einer wesentlichen Vervollkommnung fähig zu sein scheint, wird man allerdings bis auf die Grundlagen zurückgehen müssen.

Bemerkenswerter sind demgegenüber die Überlegungen, die *Bohr* zum Schluß seiner elektronentheoretischen Arbeit (vgl. Nr. 7) mitgeteilt hat, weil sie zum Teil zu Resultaten führen, die von den nach der *Lorentz*schen Theorie abgeleiteten abweichen, und zwar in Richtung nach besserer Übereinstimmung mit der Erfahrung. Um die galvanomagnetischen und thermomagnetischen Effekte behandeln zu können, muß *Bohr* die statistischen Betrachtungen erweitern auf den Fall dreier Dimensionen, d. h. die drei Momente $G_x G_y G_z$ der Elektronen betrachten und die zeitlichen Änderungen dieser nicht nur infolge der Wirkung äußerer elektrischer Kräfte und der Zusammenstöße, sondern auch infolge der Wirkung äußerer magnetischer Kräfte berücksichtigen. Die Verhältnisse liegen insofern verhältnismäßig einfach, als die magnetischen Kräfte die absolute Geschwindigkeit der einzelnen Elektronen nicht ändern. Die Kenntnis der Größen G vermittelt dann ebenso wie früher die Kenntnis des Ladungs- und Energietransportes und in analoger Weise wie bei der Behandlung der thermoelektrischen Effekte die Berechnung der galvano- und thermomagnetischen Effekte. *Bohr* beschränkt sich bei der tatsächlichen Durchrechnung auf ein spezielles Beispiel (Zentralkraft r^{-n} zwischen den Elektronen und Metallatomen, Vernachlässigung der gegenseitigen Zusammenstöße der Elektronen, chemisch und thermisch homogenes Metall, d. h. galvanomagnetische Effekte). Für $n = \infty$ ergeben sich die schon von *Gans* im Rahmen der Theorie von *Lorentz* erhaltenen und verglichen an der Erfahrung zu engen Resultate für den transversalen und longitudinalen Halleffekt und für die galvanomagnetische

70) Man vergleiche etwa die von *Zahn*, a. a. O., p. 926 gegebene Tabelle, ferner die Beobachtungen an Kupferjodür von *Steinberg*, Ann. d. Phys. 35 (1911), p. 1009 u. a.

71) *S. H. Livens*, a. a. O., p. 544 ff.; vgl. dazu auch die Einwände von *A. W. Smith*, Phil. Mag. 31 (1916), p. 367, und die Diskussion bei *P. Suter* (Fußn. 4).

transversale Temperaturdifferenz. Während aber für die Halleffekte sich die Diskrepanzen mit der Erfahrung nach *Bohr* überhaupt nicht beheben lassen durch reine Elektronentheorie mit isotropen Metallatomen, sondern auf jeden Fall zu der (übrigens physikalisch durchaus plausiblen) Annahme einer Art Polarisation der Atome durch die äußeren magnetischen Kräfte zwingen[72]), verschwinden sie für den Temperatureffekt, wenn man die *Lorentz*sche Annahme $n = \infty$ fallen läßt und einen endlichen Wert für n annimmt. Man kann dann nämlich erreichen, daß das Vorzeichen des Temperatureffekts sich umkehrt, z. B. wenn man $n = 3$ wählt. Der transversale Halleffekt E_y und die longitudinale Leitfähigkeit σ_H im Feld werden dann

$$(40\text{a})\qquad E_y = i_x \frac{45\pi}{128} \cdot \frac{G_z}{Nec}; \quad \sigma_H = \sigma_0\left(1 - \frac{27\pi(356 - 75\pi)}{16384} \cdot \frac{\sigma_0^2 G_z^2}{N^2 e^2 c^2}\right)$$

und der transversale Temperatureffekt

$$(41\text{a})\qquad \frac{dT}{dy} = -\, i_x \frac{15\pi}{256} \frac{G_z}{Nec},$$

während nach *Lorentz* ($n = \infty$) folgen würde

$$(40\text{b})\qquad E_y = i_x \frac{3\pi}{8} \cdot \frac{G_z}{Nec}; \quad \sigma_H = \sigma_0\left(1 - \frac{9\pi(4-\pi)\sigma_0^2 G_z^2}{64 N^2 e^2 c^2}\right),$$

und mit entgegengesetztem Vorzeichen wie in Formel (41a)

$$(41\text{b})\qquad \frac{dT}{dy} = \frac{1}{4} \frac{s}{k} E_y = i_x \cdot \frac{3\pi}{32} \cdot \frac{G_z}{Nec}$$

(Bezeichnungen wie in Nr. 7).

Zusammenfassend wird man von einer einigermaßen befriedigenden Erfassung der Elektronenbewegung in Metallen unter dem Einfluß eines äußeren Magnetfeldes kaum sprechen können, man wird sogar die bestehenden Schwierigkeiten nun nicht mehr in bloß formalen oder mathematischen Unvollkommenheiten der gaskinetischen Theorien suchen dürfen, sondern man wird dafür die grundsätzlichen physikalischen Ansätze veranwortlich machen müssen. Wie weit man dabei zu radikalen Änderungen im Sinne der Aufgabe des gaskinetischen Bildes überhaupt gezwungen sein wird, läßt sich noch nicht übersehen, wenn auch gerade die Theorie der galvanomagnetischen und thermomagnetischen Effekte diesem Bilde mit die ernstlichsten Schwierigkeiten bringt. Am geeignetsten zu einer Klärung der Sachlage scheint hier der Halleffekt wegen seiner verhältnismäßigen Einfachheit zu sein; dies wenigstens dürfte der Grund dafür sein, daß die Vorschläge zur Vermeidung der bestehenden Schwierigkeiten alle

---

72) Wenn man nicht die Annahme nur einer Art von Elektronen fallen lassen will.

an die Theorie dieses Effektes anknüpfen. Es liegen in dieser Richtung bisher eine Reihe von Versuchen vor[73]), deren Besprechung — allerdings zum Teil späteren Nummern dieses Artikels vorausgreifend — hierher gehört. Der Grundgedanke geht stets dahin, die Isotropie des Metallinnern in elektronischer Beziehung aufzugeben und entweder die magnetischen Felder oder die Elektronenbahnen dort in bestimmter Weise zu orientieren. In ersterer Richtung bewegen sich außer bereits genannten z. B. Vorschläge von *Lorentz*, *Smith* und *Alterthum*, die *Königsberger* zusammengefaßt und ergänzt hat, in letzterer in in besonders ausgeprägter Form die zweite Theorie von *Thomson* (alle diese zitiert in Fußn. 73). Die Theorie von *Thomson* wird später (Nr. **18**) ausführlicher besprochen werden, so daß hier nur die eigentlichen „Richtfeldtheorien" in Frage kommen. Mit *Königsberger* kann man zu einer Deutung speziell der beiden verschiedenen Vorzeichen der Hallkoeffizienten R etwa in der Weise kommen, daß man z. B. die Formel von *Gans*

$$R = \frac{3\pi}{8eN} \tag{42a}$$

erweitert durch den Einfluß eines inneren Feldes H_M der Molekularmagnete neben dem äußeren Feld H_a, wodurch man erhält

$$RH_a = \frac{3\pi}{8e} \cdot \frac{NH_a + \int H_M dN}{N^2}, \tag{42b}$$

oder übersichtlicher

$$R = \frac{8\pi}{8eN}(1 + \psi), \tag{43}$$

wo ψ nun positiv oder negativ sein kann; in ähnlicher Richtung gehen die Spekulationen von *Alterthum* (der sich insbesondere mit der Deutung der Temperaturkoeffizienten von R bei tiefen Temperaturen beschäftigt), den Hallkoeffizienten mit den magnetischen Eigenschaften in Verbindung zu bringen; ob es auch möglich sein wird, die sog. „Regel von *Beattie*", daß Halleffekt und Thermokraft korrespondierende Zeichen haben, zu einer Verknüpfung magnetischer und thermoelektrischer Eigenschaften zu verwerten, kann erst die Zukunft zeigen. Dagegen ist eine solche Verknüpfung zwischen R und der

---

73) *H. A. Lorentz*, Ergebnisse und Probleme der Elektronentheorie (Berlin 1905), p. 43 u. 45; *J. J. Thomson*, Corpusculartheorie der Materie (Braunschweig 1905), p. 68: *E. P. Adams*, Phys. Rev. 24 (1907), p. 428; *Smith*, Phys. Rev. 1 (1910), p. 1; *H. Alterthum*, Ann. d. Phys. 39 (1912), p. 933; *O. W. Richardson*, Phil. Mag. 23 (1912), p. 615; *J. Königsberger* und *S. Gottstein*, Phys. Ztschr. 14 (1913), p. 232 (diese Note enthält eine Menge interessanter Hinweise und Beziehungen zu anderen Resultaten der Elektronentheorie).

elektrischen Leitfähigkeit sehr naheliegend und namentlich von *Königsberger* (vgl. auch die Verhältnisse in Halbleitern, Nr. 12) ausgebaut worden.

12. Legierungen, Halbleiter. a) *Legierungen.*[74]) Die Legierungen von Metallen zeigen bezüglich des elektrischen und thermoelektrischen Verhaltens gegenüber den reinen Metallen manche Eigentümlichkeiten, die eine besondere Besprechung hier um so mehr rechtfertigen, als sie zu einer Reihe wichtiger theoretischer Versuche Veranlassung gegeben haben. Diejenigen Legierungen, welche aufzufassen sind als ein Konglomerat der Komponenten, bieten für die Theorie wenig Interesse, die elektrische Leitfähigkeit und die Thermokräfte lassen sich nach einer Mischungsregel aus den für die Komponenten gültigen Werten berechnen. Es knüpft sich an die Deutung der Elektrizitätsleitung in derartigen Konglomeraten bzw. Aggregaten eine ausgedehnte Literatur[75]), die jedoch zur eigentlichen Elektronentheorie insofern nichts Neues bringt, als sie rein phänomenologisch die Stromverteilung in einem inhomogenen Leiter untersucht, d. h. im wesentlichen von der Geometrie der Stromlinien unter speziellen komplizierten Verhältnissen handelt. Anders liegen dagegen die Verhältnisse bei denjenigen Legierungen, die als feste Lösungen anzusehen sind; hier nämlich beobachtet man eine meist erhebliche Verringerung des elektrischen Leitvermögens (demgemäß eine Vergrößerung des Verhältnisses von $\frac{\varkappa}{\sigma}$ im Gesetz von *Wiedemann* und *Franz*) und erhebliche Erhöhung der Thermokraft gegenüber den für die reinen Metalle gefundenen Werten, und zwar tritt diese Depression des Leitvermögens schon ein, wenn in einem Metall nur kleine Mengen eines anderen gelöst werden.

Was zunächst die Erniedrigung des elektrischen Leitvermögens anlangt, so können wir ältere Erklärungsversuche, die in mehr phänomenologischer Weise verfahren und vor den Ausbau der Elektronentheorie fallen, von vornherein beiseite lassen.[76]) Auch ein Versuch

74) Zusammenstellung des experimentellen Materials bei *Baedecker,* Metall. Leit., p 36 ff., der Literatur speziell über Thermoelektrizität der Legierungen bei *Bernoulli,* Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 9 (1912), p. 270.

75) Z B. *L. Lorenz,* Ann. d Phys. 13 (1881), p. 600; *Rayleigh,* Nat. 54 (1896), p. 154; Scient. Pap IV, p. 232; *W. Ostwald,* Ztschr. phys. Chem. 2 (1893), p. 520; *Libenow,* Ztschr. f. Elektrochemie 4 (1897), p. 201. Kritik der Theorien bei *Baedecker* (Fußn. 74) und bei *Benedicks* (Fußn 76).

76) Literatur bei *L. Benedicks,* Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 13 (1916), p. 351. Vgl. dazu ferner die Auseinandersetzung zwischen dem genannten und *K Lichtenecker,* ebd. 14 (1917), p. 466, 470.

von *Riecke*[77]), das Verhalten der Legierungen seiner Theorie einzufügen, stößt auf ernstliche Schwierigkeiten. *Riecke* nimmt nämlich an, daß die Dichte der freien an der Stromleitung beteiligten Elektronen in Legierungen kleiner ist als in reinem Metall, eine Annahme, die mit anderweitigen optischen und thermoelektrischen Daten nicht vereinbar erscheint. Damit bleibt im Rahmen der Elektronentheorien nur noch die Möglichkeit, eine Vergrößerung des Bewegungswiderstandes der Elektronen zu einer Erklärung heranzuziehen, die denn auch *Schenk*[78]) zu einer Theorie benutzt hat und die weiterhin von *Bernoulli* und *Baedecker*[79]) modifiziert und vervollständigt wurde. Der Gedanke von *Schenk* ist der, daß zwar auch in den Legierungen nur die freien Elektronen den Ladungs- und Energietransport besorgen, daß aber die Moleküle des beigemischten (gelösten) Metalls kinetische Energie an die Elektronen abgeben und damit zum Wärmeausgleich beitragen. Diese Annahme führt an Stelle des *Wiedemann-Franz*schen Gesetzes in der Form für reine Metalle

$$\frac{\varkappa}{\sigma} = \frac{4}{3}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^2 T, \tag{44a}$$

für Legierungen zu der Beziehung

$$\frac{\varkappa'}{\sigma'} = \frac{4}{3}\left(\frac{i\cdot\alpha}{e}\right)^2 T, \tag{44}$$

worin i angibt, wieviel mal in der Legierung die von den Elektronen übertragene kinetische Energie größer ist als im reinen Metall und sich durch die (in Metall und Legierung jedenfalls nahezu gleich große) Konzentration N_e der freien Elektronen und die Konzentration N_m der gelösten Moleküle ausdrückt in der Beziehung

$$i = \frac{N_e + N_m}{N_e}\left(= \sqrt{\frac{\varkappa}{\sigma} : \frac{\varkappa'}{\sigma'}}\right). \tag{45}$$

Aus dieser zwar durchaus hypothetischen Annahme ergibt sich aber weiterhin sofort die Thermokraft für eine Legierung gegen das reine Metall in der Form

$$E = \frac{\alpha}{e}\cdot\ln\sqrt{\frac{\varkappa'}{\sigma'} : \frac{\varkappa}{\sigma}} = \frac{\alpha}{e}\ln\left(1 + \frac{N_m}{N_e}\right), \tag{46}$$

77) *E. Riecke*, Ztschr. f. Elektrochemie 15 (1909), p. 473. Kritisiert von *Schenk*, Phys. Ztschr. 8 (1907), p. 239.

78) *R. Schenk*, Ann. d. Phys. 32 (1910), p. 261. Eine Erweiterung der *Schenk*schen Ansätze bei *M. J. Stepanow*, Ztschr. f. anorg. Chem. 78 (1912), p. 1. Kritik bei *N. Bohr*, Diss. Kopenhagen 1911 und bei *K. Baedecker*, Ann. d. Phys. 35 (1911), p. 75.

79) *A. L. Bernoulli*, Ann. d. Phys. 33 (1910), p. 690; 35 (1911), p. 162; Verh. d. Deutsch. Phys. Gesellsch. 13 (1911), p. 218; *K. Baedecker*, Ann. d. Phys 35 (1911), p. 75.

die sich (bekannt unter dem Namen *Schenk*sche Regel) an der Erfahrung erstaunlich gut bewährt hat, die man aber nach dem Obengesagten doch als kaum mehr als eine glückliche Beschreibung der Tatsachen betrachten könnte. Es ist deshalb bemerkenswert, daß es *Bernoulli* und *Baedecker* unabhängig voneinander gelungen ist (Fußn. 79), eine andere Begründung dieser Formel zu geben (zugleich mit Berichtigung eines früheren Irrtums). Man hat dazu im Prinzip nur nötig, auf die Dampfdruckformel der Thermoelektrizität und die zu ihr führenden thermodynamischen Vorstellungen (vgl. Nr. **14**)

$$E_{1,2} = \frac{\alpha}{e} \ln \frac{p_1}{p_2} \tag{46a}$$

das *Babo*sche Gesetz der Erniedrigung des Dampfdruckes durch einen gelösten Stoff anzuwenden, wodurch man unmittelbar wieder einen Teil der Gleichung (46) erhält; und zwar gewinnt man nun ohne die Hilfsannahme $N_e = N_m$ den Zusammenhang mit den Verhältnissen der Leitfähigkeiten und damit die eigentliche *Schenk*sche Regel durch den Übergang von den Konzentrationen zu den Leitfähigkeiten mit Hilfe der Gleichung (45), (worin allerdings wieder die Annahme $\alpha' = i\alpha$ implizite steckt).

Eine streng im Geiste der gaskinetischen Elektronentheorie durchgeführte Theorie ist damit allerdings noch keineswegs gegeben, da eben der Beweis der Annahme $\alpha' = i\alpha$ auf kinetischer Grundlage noch aussteht und sich nach einer kritischen Bemerkung von *Bohr*[79a]) wohl auch kaum erbringen lassen wird. Deshalb ist eine von *Bohr* im Anschluß an seine allgemeine Theorie skizzierte Möglichkeit zur Deutung des merkwürdigen Verhaltens der Legierungen bedeutungsvoll, wenn auch die eigentliche Durchführung noch aussteht. Nach *Bohr* hat die Gegenwart fremder Moleküle in einem Metall zur Folge, daß die auf die Elektronen wirkenden Kraftfelder im Metallinnern stärker sind als im reinen Metall, da sich diese im letzteren Fall in stärkerem Maße gegenseitig neutralisieren. Dadurch würde nicht nur der Bewegungswiderstand der Elektronen steigen, die elektrische Leitfähigkeit also sinken, sondern es würde zu gleicher Zeit wegen der stärkeren Beeinflussung der langsameren Elektronen die Wärmeleitfähigkeit weniger beeinflußt wie die elektrische Leitfähigkeit; auch der Temperaturkoeffizient der elektrischen Leitfähigkeit wäre größer zu erwarten in Legierungen wie in reinen Metallen.

Nun sind aber auch von ganz anderer Seite her, nämlich unter

79a) Fußn. 24) zu Nr. 7; vgl. jedoch einen Versuch in dieser Richtung von *Bernouilli*, Ann. d. Phys. 35 (1911), p. 162.

Verzicht auf die gaskinetische Auffassung überhaupt, neuerdings Versuche unternommen worden, dem merkwürdigen Verhalten der Legierungen theoretisch beizukommen; diese sollen, zum Teil den Ausführungen des Abschnitts IV vorgreifend, noch kurz besprochen werden. So beschäftigt sich *Benedicks*[80]) mit der Deutung eines in Mischkristallen auftretenden Zusatzwiderstandes (entsprechend der Depression des Leitvermögens), für den er die zunächst empirische Formel

$$(47) \qquad \omega' = n(1-n)\{bn + a(1-n)\}$$

als die einfachste empfiehlt. Es bedeuten darin a und b zwei für die beiden die binäre Legierung zusammensetzenden Metalle charakteristische Konstanten, n die atomare Konzentration (Konzentration ausgedrückt in Atomprozent); dann sucht er an einem einfachen Modell die Entstehung des Zusatzwiderstandes durch „Kontaktfehler" im Sinne seiner phoretischen Theorie plausibel zu machen, ohne allerdings über die Anfänge einer Erklärung hinauszukommen. *March*[81]) versucht die Legierungen seiner Theorie einzuordnen durch die Hilfsannahme, daß in festen Lösungen die elastischen Eigenschaften des Metalls in der Richtung einer Vergrößerung der Schwingungszahl verändert werden; dadurch würde nach den Ansätzen der Theorie von *March* die Zahl der freien Elektronen und damit die elektrische Leitfähigkeit herabgedrückt. Auf einige durchaus spekulative Bemerkungen von *Borelius*[82]) zur Elektronentheorie von Mischkristallen sei nur der Vollständigkeit halber hingewiesen; es handelt sich dabei um die thermoelektrischen Effekte der Legierungen. Zum Schlusse sei hier endlich noch ein Versuch von *Skaupy*[83]) erwähnt, die Vorstellungen über den Mechanismus des Ladungstransportes in Elektrolyten zu übertragen zunächst auf die Elektrizitätsleitung in flüssigen Metallen, aus der eine jedenfalls originelle Auffassung der Leitung auch in festen Metallen sich entwickeln kann. Soweit die Bewegung der Elektronen (neben den Metallionen) in Betracht kommt, nimmt *Skaupy* für dieselben eine allerdings phänomenologisch eingeführte (und versuchweise sogar nach dem *Stokes*schen Gesetz berechnete) Reibungskraft proportional der Relativgeschwindigkeit Elektronen-positive Ionen an und unter-

80) *C. Benedicks*, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 13 (1916), p. 351. Dort auch weitere Literatur und Angabe von Zahlenwerten sowie empirischen Widerstandsformeln.

81) Vgl. p. 868 dieses Artikels.

82) *G. Borelius*, Ann. d. Phys. 53 (1917), p. 615.

83) *F. Skaupy*, Ztschr. f. phys. Chem. 58 (1907), p. 560; Verh. d. Deutsch. Phys. Gesellsch. 16 (1914), p. 156, 494; 18 (1916), p. 252; Phys. Ztschr. 21 (1920), p. 597.

sucht die Konzentrationsänderung beim Stromdurchgang — es müßte also entgegen den bisherigen Annahmen auch in Metallen ein Materialtransport vorhanden und bei günstigen Versuchsanordnungen vielleicht sogar experimentell nachweisbar sein — sowie das Dissoziationsgleichgewicht. Bemerkenswert ist jedenfalls nebenbei, daß sich auf diesem Weg der Radius des Elektrons in merkwürdig guter Übereinstimmung mit dem elektromagnetischen ergibt und daß sich der Dissoziationsgrad für flüssiges Quecksilber aus der Leitfähigkeitsänderung bei Auflösung eines anderen Metalls in demselben finden läßt; es ergibt sich, daß auf etwa 10—15 Hg Atome ein freies Elektron kommt und daß die Dissoziationswärme von 1 g Atom Hg in (einwertige) Ionen und Elektronen etwa den Wert 2000 cal. hat.

b) *Halbleiter.*[84]) Unter der Bezeichnung Halbleiter und variable Leiter faßt man eine Klasse von Substanzen zusammen, die bezüglich des elektrischen Leitvermögens, der thermoelektrischen Effekte usw. sich von den Metallen und Legierungen in charakteristischer Weise unterscheiden. Es gehören hierher neben einigen Elementen, wie Silizium, Titan, Zirkonium, Kohlenstoff, eine Reihe von Metallverbindungen, hauptsächlich Sulfide und Oxyde (z. B. FeS, PbS, Fe_2TiO_5, Fe_3O_4), die zum Teil auch als Mineralien auftreten, außerdem aber auch einige kompliziertere organische und anorganische Verbindungen (z. B. Auermasse, Naphtalin). Als charakteristisches Merkmal im Verhalten dieser Körper sind neben der im Vergleich zu den Metallen kleinen Leitfähigkeit die komplizierte Abhängigkeit des elektrischen Leitvermögens von der Temperatur (Minimum des spezifischen Widerstandes bei einer bestimmten Temperatur) und die mitunter sehr hohen Thermokräfte gegen reine Metalle zu nennen; verschiedene andere Absonderlichkeiten bezüglich der thermomagnetischen und galvanomagnetischen Effekte, des Einflusses der chemischen Zusammensetzung u. dgl. (z. B. an dem von *Baedecker* untersuchten jodierten Kupferjodür) schließen sich an. Nehmen wir hier aus den vielen Einzelheiten nur das heraus, was zur Ergänzung des elektronentheoretischen Bildes der metallischen Leitung von Bedeutung ist, so scheinen sich die zunächst so komplizierten Verhältnisse im wesentlichen deuten zu lassen durch zwei Eigenschaften der genannten Substanzen, nämlich durch die relativ geringe Konzentration der freien Elektronen und durch die starke Abhängigkeit derselben von der Temperatur, wobei Komplikationen durch elektrolytische (Ionen-)Leitung natür-

84) Zusammenfassende Darstellung bei *K. Baedecker*, Metall. Leit., p. 28 ff. und *K. Königsberger*, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 4 (1907), p. 458; 11 (1914), p. 84 (wo auch die Literatur im einzelnen angegeben ist).

lich, soweit dies möglich ist, ausgeschaltet sein sollen. Wie die Deutung der Versuchsdaten für den spezifischen Widerstand, die Thermokraft, den Halleffekt usw. nach den diesbezüglichen Formeln der Elektronentheorie zeigt, kann man jedenfalls im großen und ganzen die Halbleiter durchaus anschließen an die Metalle, man kann sie gewissermaßen auffassen als durch geringe Elektronendichte gekennzeichnete Entartungen dieser. *Königsberger*, dem auf diesem Gebiet wohl das größte Verdienst zuzuerkennen ist, hat in dem obengenannten zusammenfassenden Bericht diesen Nachweis im einzelnen geführt; im speziellen sei hier nur hingewiesen auf die Parallelismen von spezifischem Widerstand und Hallkoeffizient und von spezifischem Widerstand und Thermokraft. Dagegen ist zu betonen, daß diese Ähnlichkeit zwischen den Metallen und Halbleitern nicht mehr gilt bezüglich der Wärmeleitung, daß also z. B. das Gesetz von *Wiedemann* und *Franz* nicht mehr erfüllt ist; das Leitfähigkeitsverhältnis, das in Metallen den experimentellen Wert von etwa 7 hat, kann in Halbleitern auf den mehr wie tausendfachen Betrag (z. B. für Eisenglanz auf 73000) steigen. Dies deutet jedenfalls darauf hin, daß die Wärmeleitung der Halbleiter nicht mehr zu den durch die freien Elektronen allein bestimmten Eigenschaften gehört.[85])

Ein neues Moment kommt ferner herein, wenn man die Abhängigkeit des elektrischen Verhaltens der Halbleiter von der Temperatur betrachtet; man wird hier zu einer Ergänzung der für Metalle benutzten Annahmen genötigt.[86]) Ausgehend von der Vorstellung einer Dissoziation der Elektronen von den Metallatomen wird man annehmen können, daß bei den Metallen diese Dissoziation eine bereits fast vollständige, von der Temperatur nur noch wenig abhängige ist, während bei den Halbleitern das Dissoziationsgleichgewicht noch stark von der Temperatur abhängt und damit die Konzentration der Elektronen stark mit der Temperatur sich ändert. Für die Konzentration kann man versuchsweise aus der Thermodynamik der Systeme aus einer festen und einer gasförmigen Phase die Formel ansetzen

$$N = N_0 e^{\frac{Q}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)}, \tag{48}$$

wo Q die Dissoziationswärme, R die Gaskonstante ist, und damit die aus der Elektronentheorie folgenden Ausdrücke für die elektrische Leitfähigkeit erweitern zu

$$\sigma = c \cdot \frac{e^2 l v}{\alpha T} e^{\frac{Q}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)}. \tag{49}$$

---

85) Vgl. auch p. 805 dieses Artikels, Fußn. 42).

86) *J. Königsberger* und *K. Schilling*, Ann. d. Phys. 32 (1910), p. 179

Eine zweite Erweiterung betrifft (wie auch bei den Metallen) die Abhängigkeit der freien Weglänge von der Temperatur, so daß die allgemeine Leitfähigkeitsformel resultiert als eine Superposition der beiden Temperaturwirkungen. Setzt man die Temperaturabhängigkeit der Weglänge in Form eines empirischen, den Verhältnissen bei Metallen angepaßten Korrektionsgliedes an, so erhält man also

$$(50)\qquad \sigma = \sigma_0(1 + \alpha t + \beta t^2)\, e^{\frac{Q}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)},$$

eine allgemeine Widerstandsformel, die insofern auch bemerkenswert ist, als sie von einem zusammenfassenden Gesichtspunkt aus nun die Verhältnisse in den verschiedenen Leitern zu beurteilen erlaubt.[87]) Bestimmt man nämlich die Dissoziationswärme (berechnet für 1 Gramm-Molekül Elektronen), so findet man für die eigentlichen (elektropositiven) Metalle sehr kleine oder sogar negative Werte, für die Halbleiter mittlere Werte von etwa 20—2000 und für die (elektronegativen) Metalloide sehr große Werte bis zu etwa 10000, wo dann die Ionenleitung beginnt. Es verraten sich hier bereits die Zusammenhänge mit der neuerdings namentlich von *Haber* (vgl. p. 862 dieses Artikels) ausgebauten Gittertheorie der Elektronenleitung.

Endlich kann man in dritter Stufe noch eine Abhängigkeit der Dissoziationswärme von der Temperatur annehmen.[88]) Natürlich bekommt man auf diesem Weg insgesamt beliebig viele freie Konstante in die Formel herein und damit auch beliebige Anpassungsfähigkeit der Formel an die Erfahrung; das physikalisch Wesentliche wird man deshalb bei derartigen Versuchen, solange eine Begründung für die einzelnen Korrektionen fehlt, nur in dem prinzipiellen Gedanken des variablen Dissoziationszustandes sehen können. Damit ist in rohem Umriß der Stand der Dinge wiedergegeben und nun eine Ergänzung durch Einzelheiten notwendig. Dies geschieht am besten durch eine kleine Auswahl von Zahlenwerten, die den beiden Berichten von *Königsberger* entnommen sind.

Die Gültigkeit der elektronentheoretischen Grundanschauungen für Halbleiter war aus den zusammengehörenden Werten des Hallkoeffizienten R und des elektrischen Widerstandes w erschlossen, deren Quotient $\frac{R}{w}$, da die Elektronendichte herausfällt, konstant sein müßte. Daß dies tatsächlich nahe der Fall ist, zeigen die beobachteten

87) *J. Königsberger,* Ztschr. f. Elektrochemie 15 (1909), p. 97; *H. v. Martin,* Phys. Ztschr. 12 (1911), p. 41.

88) Ein Versuch zu einer Deutung einer solchen Abhängigkeit hat *Königsberger* l. c. p. 222 (Fußn. 86) skizziert.

Werte von:

Metalle im Mittel	$4 \cdot 10^2$	Tellur	$2 \cdot 10^2$
Molybdänglanz	$7{,}2 \cdot 10^2$	Kupferjodür	$1{,}2 \cdot 10^2$
Silizium	$2{,}1 \cdot 10^3$		$5 \cdot 10^2$,
Graphit	$8{,}2 \cdot 10^2$		

wobei zu beachten ist, daß die Einzelwerte der beiden Größen R und w Unterschiede von etwa 10^8 aufweisen. Ebenso gehen Halleffekt und Widerstand bei variablen Leitern, z. B. bei jodiertem Kupferjodür mit zunehmendem Jodgehalt gut parallel, und auch die thermomagnetischen Effekte fügen sich dem Bild befriedigend ein. Die Thermokräfte sind andererseits nach der Beziehung $E = c \cdot \ln\left(\frac{N_1}{N_2}\right)$ erheblich größer zu erwarten als die reiner Metalle. Daß aber die Einordnung hier nur eine qualitative ist, zeigt die schlechte quantitative Übereinstimmung der aus der Thermokraft (N_t) bzw. der Leitfähigkeit (N_e) berechneten Elektronendichte, z. B. für

	N_t	N_e
Schwefelkupfer	0,92	0,02
Graphit	0,9	0,02
Schwefeleisen	0,8	0,005
Hämatit	0,003	0,0003
Molybdänglanz	0,001	0,000003

bezogen auf die Dichte 1 in Gold. Dieselbe Unvollkommenheit der Theorie zeigt sich natürlich außer durch den Vergleich von N_t mit N_e in den Werten von N_e für sich betrachtet, und noch deutlicher wie aus den obigen Zahlen aus den Relativwerten von N_t gegen Kupfer, wofür sich z. B. ergibt für:

Sb 1,6 Si 250 Cu_2O 310.

13. Optik der Metalle. Wie bereits in der Einleitung betont wurde, soll die Erweiterung der Elektronentheorie der Metalle auf nicht stationäre Vorgänge, d. h. auf zeitlich veränderliche Felder, nur insoweit hier behandelt werden, als sie mit dem eigentlichen Problem der stationären Wärme- und Elektrizitätsleitung unmittelbar zusammenhängt. Bei dieser Beschränkung kommt also die Deutung der metalloptischen Erscheinungen und die Ableitung z. B. von Dispersionsformeln und von Ausdrücken für die optischen Konstanten n und k nicht in Frage, sondern vielmehr der Gesichtspunkt, unter den neuen Verhältnissen der nichtstationären Zustände, also gewissermaßen durch eine Variation der Versuchsbedingungen, Aufschlüsse über die elektronischen Vorgänge im Metall zu erhalten. Insbesondere sind es Aussagen über gewisse Konstanten des Elektronengases (Konzentration

und freie Weglänge der Elektronen), die auf Grund der genannten Erweiterungen ermöglich werden, während die mathematisch-statistischen Komplikationen demgegenüber an physikalischem Interesse zurücktreten.

Bereits *Drude* hat sich mit einer Erweiterung seiner Theorie auf zeitlich veränderliche Felder beschäftigt[89]) und ist, allerdings nicht unter strenger Wahrung des rein kinetischen Standpunktes, zu Resultaten gelangt, die dann weiterhin nur noch wenig Änderung erfahren haben. Man gewinnt die Ausgangsgleichungen *Drudes* entweder aus den Grundlagen der Dispersionstheorie absorbierender Körper, wenn man dort die quasielastische Kraft der Elektronenbindung Null setzt, oder einheitlicher dadurch, daß man die Bewegung der freien Elektronen allgemein (d. h. für beliebige elektrische Verschiebungskräfte) untersucht unter der Annahme einer der Bewegung der Elektronen entgegenwirkenden Reibungskraft, die proportional ihrer Geschwindigkeit ist. Ist ξ die Verschiebung der Elektronen, X die elektrische Kraft und re^2 der Proportionalitätsfaktor der genannten Reibungskraft, so folgt aus der Bewegungsgleichung

$$(51\text{a}) \qquad m\frac{d^2\xi}{dt^2} = e\cdot X - re^2\frac{d\xi}{dt},$$

für den Fall einer zeitlich rein harmonischen Änderung von X von der Schwingungsdauer τ für den Strom in Richtung von X

$$(51\text{b}) \qquad \dot{\jmath}_x = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\partial X}{\partial t}\cdot\frac{4\pi\tau N}{ir - \frac{m}{\tau e^2}}.$$

Hieraus ergeben sich genau in derselben Weise wie in der Dispersionstheorie durchsichtiger Körper die (komplexe) Dielektrizitätskonstante und durch Trennung von Reellem und Imaginärem die folgenden Ausdrücke für die beiden optischen Konstanten n und k, in denen noch die Wellenlänge $\lambda = 2\pi c\tau$ eingeführt ist (in elektromagnetischem Maß; c = Lichtgeschwindigkeit)

$$(52) \qquad \begin{cases} n^2(1-k^2) = 1 - 4\pi\dfrac{\dfrac{mN}{e^2r^2}}{c^2+\left(\dfrac{2\pi m}{\lambda e^2 r}\right)^2}, \\[2ex] n^2k = \lambda c\cdot\dfrac{\dfrac{N}{r}}{c^2+\left(\dfrac{2\pi m}{\lambda e^2 r}\right)^2}, \end{cases}$$

die uns hier soweit interessieren, als sie eine Prüfung der Elektronen-

89) *P. Drude,* Phys. Ztschr. 1 (1900), p. 161; Lehrb. d. Optik, 2. Aufl. 1906, p. 385; Ann. d. Phys. 14 (1904), p. 936.

theorie und zahlenmäßige Folgerungen abzuleiten erlauben. Bezüglich dieses letzteren Punktes liegen die Dinge insofern nicht ganz einfach, als die beiden Gleichungen neben N auch das unbekannte r enthalten und die zu dessen Elimination (z. B. von *Schuster*[90]) vorgeschlagenen Methoden nicht einwandfrei sind. Zudem geben die Formeln (52) in Strenge jedenfalls nicht die wirklichen Verhältnisse wieder und müßten, will man nicht zu dem sehr unwahrscheinlichen Ausweg einer Mitwirkung von mehr als einer Gattung von Ladungsträgern greifen, ergänzt werden durch die Annahme einer Abhängigkeit von $\frac{N}{r}$ von der Wellenlänge. Ergänzend sei dem hinzugefügt, daß die Widerstandskonstante r auch von der Temperatur wesentlich abhängt; wenigstens muß man dies annehmen, um den geringen Einfluß der Temperatur auf die optischen Eigenschaften der Metalle in Einklang bringen zu können mit dem vergleichsweise großen Temperaturkoeffizienten der elektrischen Leitfähigkeit.[91]) Damit sind untere Grenzwerte für die Elektronendichte N leicht zu erhalten aus dem Reflexions- und Emissionsvermögen für große Wellenlängen, wenn man für diese die bekannten Ausdrücke in n und k benutzt und die elektrische Leitfähigkeit einführt durch $\sigma = \frac{1}{c^2}\frac{N}{r}$. Eine zweite Möglichkeit, Aufschluß über N zu erhalten, ist die, sich auf eine bestimmte Wellenlänge zu beschränken, also nur für jeweils eine solche N zu suchen, was durch Elimination von r unschwer gelingt. Die Gleichungen (52) müßten aber dann ergänzt werden durch die aus der Dispersionstheorie bekannten Zusatzglieder für die gebundenen Elektronen, d. h. man müßte ausgehen von den Beziehungen

$$(53)\qquad \begin{cases} n^2(1 - ik)^2 = q + 2\lambda \dfrac{\frac{N}{r}}{ic - \frac{2\pi m}{\lambda e^2 r}}, \\ q = 1 + \sum \dfrac{N_i \vartheta_i}{1 - \left(\frac{\lambda_i}{\lambda}\right)^2} \end{cases}$$

---

90) *A. Schuster*, Phil. Mag. 7 (1904), p. 151.

91) Man vgl. jedoch die Ergebnisse einer Arbeit von *Jaffe* (Fußn. 94). Mit den *Drude*schen Formeln haben sich im Gebiet langer Wellen des optischen Spektrums zum Zweck, Dichte und freie Weglängen der Elektronen zu bestimmen, noch beschäftigt: *J. Larmor*, Phil. Mag. 14 (1907), p. 312; *L. Bloch*, Paris C. R. 145 (1907), p. 754; *G. Schaffers*, ebd. 145 (1907), p. 1144; *Spence*, Phys. Rev. 28 (1909), p. 337; *L. P. Wheeler*, Phil. Mag. 25 (1913), p. 661 und Gill. J. 35 (1913), p. 491, 508, wo auch verschiedene Ansätze zur Verfeinerung der Theorie mitgeteilt sind, die aber alle nicht wesentlich über den Standpunkt *Drudes* hinauskommen, zum Teil sogar als Rückschritte zu bezeichnen sind.

in der üblichen Schreibweise der *Drude*schen Dispersionstheorie. Wenn man nun aber r eliminiert, enthält der entstehende Ausdruck für N die neue Unbekannte q; wie sich aber zeigen läßt, begeht man einen nur kleinen Fehler, wenn man für q nach Analogie mit den Verhältnissen bei durchsichtigen Körpern etwa den Wert 3 einsetzt. *Drude* hat auf diesem Weg für eine Reihe von Metallen für $\lambda = 589\,\mu\mu$ aus seinen Beobachtungen N berechnet und für die Anzahl der freien Elektronen pro Atom Werte gefunden, die von 0,47 für Kupfer über 1,06 für Silber, 2,00 für Platin, 2,83 für Zink, 3,73 für Zinn ansteigen bis auf 7,54 für Antimon. Wenn auch die Größenordnung dieser Zahlen stimmen wird, ergeben sich doch mancherlei Unstimmigkeiten mit den nach der zuerst genannten Methode erhaltenen unteren Grenzwerten. Vergleicht man endlich die Theorie der optischen Eigenschaften mit der Theorie der stationären Ströme, indem man mit den optisch erhaltenen N-Werten nach der *Drude*schen Formel für die Thermokraft die thermoelektrische Spannungsreihe der Metalle aufstellt, so findet man wiederum zwar in großen Zügen eine Übereinstimmung, im einzelnen aber auch hier quantitative Mängel (vgl. dazu Nr. **14** und **17**). Alles dies scheint jedenfalls darauf zu deuten, daß die Eigenschwingungen gebundener Elektronen noch nicht vollkommen berücksichtigt sind. (Diesen Einfluß der gebundenen Elektronen hat später *W. Meier*[92]) einer eingehenden Diskussion unterzogen, jedoch ohne befriedigenden Erfolg.)

Es seien noch einige gelegentliche Bemerkungen über die Elektronenkonstanten eingefügt, die an die Metalloptik anschließen. Von verschiedenen Seiten wurde versucht, wenigstens überschlagsweise aus metalloptischen Daten Aufschluß über die Konzentration und die freie Weglänge der Elektronen in Metallen zu erhalten.[93]) Der Grundgedanke ist der, daß das elektrische Leitvermögen unter dem Einfluß von Wechselfeldern solange mit dem für stationäre Felder gültigen übereinstimmen wird, bis die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zusammenstößen eines Elektrons vergleichbar ist mit der Schwingungsdauer des Wechselfeldes, daß also z. B. solange die aus *Maxwells* Theorie folgende Beziehung zwischen Reflexionsvermögen und elektrischer Leitfähigkeit gelten wird oder daß man solange mit dem Wert der statischen Leitfähigkeit rechnen darf. Da man nun aus

---

92) *W. Meier*, Ann. d. Phys. 31 (1910), p. 1035; vgl. dazu auch die Bemerkungen in einer Arbeit von *Jaffe* (Fußn. 91).

93) *M. Reinganum*, Ann. d. Phys. 16 (1905), p. 958; *J. J. Thomson*, Corpusculartheorie der Materie, Vieweg 1908, p. 83; *Jeans*, Phil. Mag. 17 (1909), p. 7, 79; *J. Königsberger* und *J. Weiß*, Ann. d. Phys. 33 (1911), p. 38.

den Versuchen von *Hagen* und *Rubens* die genannte Grenze für die Schwingungsdauer kennt, kann man für die Zeit zwischen zwei Zusammenstößen eine obere Grenze angeben und daraus mit Benutzung der Formeln für die Leitfähigkeit bzw. für die mittlere Geschwindigkeit der Elektronen wenigstens die Größenordnung der Elektronendichte oder der freien Weglänge finden. (Vgl. hierzu p. 840ff. dieses Artikels.)

Als einen bedenklichen Mangel der Theorie von *Drude* wird man unbedingt die phänomenologische Einführung des Bewegungswiderstandes der Elektronen und die damit verknüpfte Unmöglichkeit, Genaueres über seine Abhängigkeit von der Wellenlänge und von der Temperatur aussagen zu können, betrachten müssen, und die Versuche, eine kinetische Begründung dieses Bewegungswiderstandes zu geben[94]), wird man deshalb als Fortschritt bezeichnen müssen. Prinzipiell liegt die Problemstellung recht einfach, da es sich offenbar darum handeln wird, die elektrische Strömung unter dem Einfluß einer zeitlich periodischen elektrischen Kraft auf dem Boden der rein kinetischen Elektronentheorie zu berechnen, d. h. also diese von konstanter Kraft auf eine zeitlich veränderliche zu erweitern; die Durchführung bietet aber manche Schwierigkeiten, sobald die mittlere Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stößen eines Elektrons vergleichbar ist mit der Schwingungsdauer des Feldes. *Ishiwara* und *Jaffe* bauen auf den Voraussetzungen der *Lorentz*schen Theorie, *Enskog* auf allgemeineren und *Bohr* endlich auf den allgemeinsten Voraussetzungen über den Mechanismus der Stöße auf; und demgemäß enthalten die Resultate der letztgenannten Untersuchungen die der andern als spezielle Fälle in sich, führen aber letzten Endes nicht wesentlich über dieselben hinaus, da sich die Rechnungen nur für Kraftgesetze durchführen lassen, die wieder zur *Lorentz*schen Theorie führen.

Der Gang der Untersuchung in der Arbeit von *Jaffe*, die unbewegliche wie elastische Kugeln reflektierende Atome annimmt und die Zusammenstöße der Elektronen untereinander vernachlässigt, ist der, die *Lorentz*sche Verteilungsfunktion zu bestimmen aus einer partiellen Differentialgleichung, wenn die elektrische Kraft X in der

---

94) *J. Ishiwara*, Proc. Tokyo Math. Phys. Soc. 6 (1911), p. 56; *N Bohr*, Diss. Kopenhagen 1911; *D. Enskog*, Ann. d. Phys. 38 (1912), p. 731; dort auch kurze Besprechung der vorhergehenden Untersuchungen. *G. Jaffe*, Ann. d. Phys. 45 (1914), p. 1217; 46 (1915), p. 984, die zweite kurze Note enthält außer Bemerkungen zur Literatur den Hinweis auf einen Fehler in der Arbeit von *Ishiwara*, vgl. auch die Erweiterung der *Lorentz*schen Ansätze auf Wechselfelder von *C. Zakrzewski*, Krak. Anz. 1909, p. 734; 1911, p. 314.

Form angesetzt wird $X = X_0 e^{i\nu t}$, und zwar wieder durch eine Korrektion an der *Maxwell*schen Verteilung

(54a) $$f(\xi, \eta, \zeta) = A \cdot e^{-hr^2} + \varphi(\xi, \eta, \zeta),$$

worin nun angesetzt wird

(54b) $$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \xi\chi(r) \cdot e^{i\nu t},$$

und sich für $\chi(r)$ die Form ergibt (l = mittlere freie Weglänge)

(54c) $$\chi(r) = \frac{1}{r + i\nu l} 2hAX_0 \cdot e^{-hr^2}.$$

nFür die elektrische Leitfähigkeit erhält man dann aus $J = \sigma \cdot E$ de Wert

(54) $$\sigma(\nu) = \frac{8\pi e^2 l A h}{3m} \int\limits_0^\infty \frac{r^4 \cdot e^{-hr^2}}{r + i\nu l} \cdot dr,$$

der, wie dies sein muß, für $\nu = 0$ in den Wert von *Lorentz* übergeht. In bekannter Weise ergeben sich weiter die Werte von $n^2(1 - k^2)$ und $n^2 k$ durch Berechnung des gesamten im Metall fließenden Stromes für den Fall, daß eine ebene harmonische Welle sich fortpflanzt. Ein Vergleich der so resultierenden Formeln mit denen von *Drude* (durch numerische Ausrechnung) gibt nun das physikalisch wichtige Resultat vollkommener qualitativer und sogar fast vollkommener quantitativer Übereinstimmung, liefert also den Beweis, daß die phänomenologische Annahme *Drude*s einer konstanten, mit der Geschwindigkeit proportionalen Reibungskraft sich rein kinetisch stützen läßt; auf die Bedeutung dieses Ergebnisses wurde bereits oben hingewiesen. Außerdem ermöglicht die Theorie von *Jaffe* bestimmtere Angaben über die Ionenkonstanten, wenn man in die Dispersionsformeln (53) mit dem hier gefundenen Ausdruck für die Leitfähigkeit eingeht, und zwar gelingt es, die Elektronendichte N und die Weglänge l einzeln zu berechnen. Zur Verfügung stehen dazu einerseits die Dispersionsformeln bzw. eine aus ihr folgende Beziehung für das Reflexionsvermögen und der Ausdruck für die Leitfähigkeit, andererseits die metalloptischen Daten für lange Wellen. Die Verallgemeinerung der Annahmen durch *Enskog* (Zentralkräfte zwischen Elektronen und Atomen sowie Berücksichtigung der Wirkung der Elektronen aufeinander) führt, wie bereits bemerkt, in den quantitativen Ergebnissen nicht über die Untersuchung von *Jaffe* hinaus. Dasselbe gilt bezüglich der Arbeit von *Bohr*.

Außer den in Fußn. 94) genannten haben sich in letzter Zeit eine Reihe englischer Forscher[95]) mit dem Ausbau der Elektronenstatistik

95) *J. J. Thomson*, Phil. Mag. 14 (1907), p. 217; 20 (1910), p. 238; *J. H Jeans*, Phil. Mag. 17 (1909), p. 773; 18 (1909), p. 209; *H. A. Wilson*, Phil. Mag. 20 (1910), p. 835.

für Wechselfelder beschäftigt; es erübrigt sich auf dieselben ausführlicher einzugehen, da sie einer strengen Kritik nicht standhalten; eine eingehende Besprechung hat zudem *Bohr* in seiner Dissertation gegeben. Auch die neuesten hierher gehörenden Versuche von *Livens* und *Nicholson*[96]) bringen zwar eine Verschärfung der Betrachtung in manchen Einzelheiten, führen aber — wohl infolge der ungenügenden Berücksichtigung der Eigenschwingungen gefundener Elektronen — nicht wesentlich über das vorher Erreichte hinaus. Soweit endlich die bisher genannten Untersuchungen nicht die Dispersion und die Absorption, sondern die Emission elektromagnetischer Wellen behandeln, führen sie bereits in das Gebiet der Strahlungstheorie und hängen nur locker mit dem Thema dieses Berichtes zusammen.

III. Das Elektronengas.

14. a) Freie Elektronen im Innern des Metalls. b) Die Elektronenkonstanten. a) Die klassisch gaskinetischen Theorien gehen alle aus von der Annahme der Existenz freier Elektronen im Innern des Metalls, die sich ganz ebenso oder doch ähnlich verhalten wie die Moleküle eines Gases nach der kinetischen Gastheorie, sie operieren also mit der Vorstellung eines Elektronengases. Die Kritik dieser Vorstellung und damit die Kritik der genannten Theorien überhaupt soll erst in Nr. 17 durchgeführt werden. Hier soll es sich darum handeln, das Material zu vervollständigen, mit dem gewisse Theorien teils offen, teils implizite operieren, wenn sie von einem Elektronengas sprechen, und zwar soll dies nach zwei Seiten hin geschehen. Zunächst muß die bis hierher verschobene Besprechung der in der Hauptsache thermoelektrische Fragen behandelnden Untersuchungen nachgetragen werden, die mit dem Ensemble der Elektronen thermodynamisch wie mit einem Gas arbeiten und mit demselben gedankliche Operationen (z. B. Kreisprozesse) vornehmen, wie dies in der Thermodynamik der Gase üblich ist (es wird sich diese Besprechung, nicht mehr beschränkt auf das Innere der Metalle, in die folgenden Nr. 15 und 16 fortsetzen); die Berechtigung zu dieser Annahme zu untersuchen gehört nicht hierher, die einschlägigen Theorien sollen vielmehr, vermutlich in Übereinstimmung mit der Meinung ihrer Schöpfer, aufgefaßt werden als Zwittergebilde, die in phänomenologischer Form nur noch einige Eigenschaften des aus der physikalisch konkreten kinetischen Theorie übernommenen Elektronen-

---

96) *Livens,* Phil. Mag. 29 (1915), p. 173, 657; 30 (1915), p. 112; *J. B. Nicholson,* Phil. Mag. 22 (1911), p. 245.

gases verwenden. Den Vorteil dieser Betrachtungsweise wird man in erster Linie darin sehen können, daß sie die zwischen den Elektronen und den Metallatomen wirkenden molekularen Kräfte und deren Abhängigkeit von der Temperatur sozusagen summarisch ersetzt durch physikalisch, wie man zugeben muß, recht anschauliche Begriffe wie Druck, Wärmetönungen, spezifische Wärme von Elektronen usw., und so in der Tat eine Reihe von Schwierigkeiten jener Theorien umgeht. Demgemäß schieben sich die hierher gehörenden Arbeiten ein zwischen die rein thermodynamischen Charakters und die rein kinetischen. Bezüglich der ersteren, die nicht mehr in den Rahmen dieses Berichtes gehören, sei zur notwendigen Orientierung für das Folgende nur hingewiesen auf die zusammenfassende Darstellung von *Baedecker* in *Graetz*' Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus, Bd. 1, p. 723 ff. In zweiter Linie soll dieses Bild selbst vervollständigt werden durch Ergänzungen bezüglich des Begriffes der freien (und der gebundenen) Elektronen und der typisch gaskinetischen Begriffe der freien Weglänge, Dichte usw. der Elektronen im Innern des Metalls.

Man kann die thermoelektrischen Erscheinungen zu verstehen suchen in vollkommener Analogie zu gewissen rein thermodynamischen Vorgängen, die aus der Wärmetheorie der Gase bekannt sind. Charakteristisch dafür ist eine einfache Überlegung, die zuerst *J. J. Thomson* zur Berechnung der Potentialdifferenz zweier Metalle angestellt hat.[97]) Schreibt man den Elektronen in einem Metall einen bestimmten Druck p zu, der abhängt von der Natur des Metalls und der Temperatur, und denkt sich nun ein Mol des Elektronengases aus dem Metall 1 (Temperatur T_1) entnommen und in das Metall 2 (Temperatur T_2) übergeführt, so gibt die Gleichsetzung der thermischen und der elektrischen Arbeit für die Potentialdifferenz zwischen den beiden Metallen

$$V_{1,2} = \alpha T \ln \frac{p_1}{p_2} = \alpha T \ln \frac{N_1}{N_2}. \tag{55}$$

Ganz ebenso erhält man die Potentialdifferenz im Temperaturgefälle eines homogenen Metalls, wenn p (bzw. N) von der Temperatur abhängt, und durch Kombination beider die Thermokraft für 1^0 Temperaturdifferenz der Lötstellen

$$e = \alpha \ln \frac{N_1}{N_2}. \tag{55a}$$

Daß in den dieser Formel zugrunde liegenden Annahmen ein wahrer Kern steckt, wird vielleicht am klarsten aus Versuchen von *Baedecker*

97) *J. J. Thomson*, Corpusculartheorie der Materie, Vieweg 1898, p. 71 ff.

am Kupferjodür[98]), die unmittelbar auf den Zusammenhang zwischen Thermokraft und Elektronendichte hinweisen; *Baedecker* hat die Thermokraft an Kupferjodür gegen Platin gemessen und einerseits N in ersterem in weiten Grenzen durch fortschreitende Jodierung verändert, andererseits den damit parallel gehenden Gang der Leitfähigkeit des Jodürs beobachtet. Daß sie andererseits die Sachlage zu summarisch beschreibt, geht z. B. schon aus der Tatsache hervor, daß sie keine Rechenschaft gibt von der nur von der geometrischen Form der Metalloberfläche bedingten Potentialdifferenz, die *Debye* (Nr. 6 und später Fußn. 123) prinzipiell festgestellt hat. Eine Reihe von Schwierigkeiten[99]) drängt nach einer Verfeinerung dieser primitiven Theorie, die von *K. Baedecker* und *F. Krüger*, weiter dann von *Richardson*, *Bohr* u. a. vorgenommen wurde.[100]) Die Grundanschauung blieb bestehen, im übrigen aber wurden die Vorstellungen und Erfahrungen der Thermoionik (vgl. Nr. 15) mitherangezogen: In konsequenter Extrapolation auf niedere Temperaturen muß man annehmen, daß stets eine Elektronenemission seitens der Metalle stattfindet[101]) und daß man den Elektronen — schließt man sich der *Richardson*schen Theorie der glühelektrischen Erscheinungen an — stets den thermodynamisch bestimmten Dampfdruck zuzuschreiben hat. Man hat also nur konsequent mit dem System Elektronendampf — feste Phase im Metall bzw. mit den Elektronendämpfen in den verschiedenen Metallen

98) *K. Baedecker*, Nernst-Festschrift 1912, p. 62.

99) Vgl. *J. J. Thomson*, Corpusculartheorie der Materie, p. 73; *K. Baedecker* in *Graetz*, Handb d. Elektr., Bd. 1, p. 731, sowie Elektr. Erschein. in Metallen, p. 90. Eine Schwierigkeit für die Theorie besteht insbesondere in der Stetigkeit der Thermokraft beim Übergang vom festen in den flüssigen Aggregatzustand im Gegensatz zu dem Sprung im Leitvermögen, falls man das Verhältnis der Dampfdrucke gleich dem Verhältnis der Konzentrationen setzt. Denn während zwar für die Dampfdrucke über der festen und flüssigen Phase thermodynamisch Gleichgewicht folgt [*Baedecker*, Ann. d. Phys. 35 (1911), p. 85], müßte man im Falle der Konzentrationen annehmen, daß nur die freie Weglänge sich ändert. Experimentell scheint zudem die Frage der Stetigkeit der Thermokräfte noch nicht eindeutig entschieden zu sein; man vgl. hierzu bezüglich der theoretischen Diskussion eine Arbeit von *K. Siebel*, Ann. d. Phys. 45 (1914), p. 839 (Diss. Kiel).

100) Außer auf die später genannten Originalarbeiten sei hingewiesen auf die in Fußn. 118) genannten Berichte von *Schottky* und *Richardson*.

101) Einen überzeugenden Hinweis auf die Existenz der Elektronenwolken an jeder Metalloberfläche scheinen die interessanten Beobachtungen über Kontakterscheinungen zwischen zwei Metallflächen zu geben, die sich im Abstand von der Größenordnung der Lichtwellenlänge optisch frei gegenüberstehen. Vgl. hierzu: *R. W. Wood*, Phil. Mag. 24 (1912), p. 316; *F. Rother*, Ann. d. Phys. 44 (1914), p. 1238 (Diss. Leipzig); *G. Hoffmann*, Ztschr. f. Phys. 4 (1921), p. 363 (dort noch weitere Literaturangaben).

wie in der klassischen Thermodynamik reversibel zu operieren. In der Durchführung im einzelnen unterscheiden sich die Theorien von *Baedecker* und *Krüger*[102]) in der Hauptsache darin, daß der von *Krüger* benutzte Kreisprozeß ein Glied mehr enthält als der von *Baedecker*, daher rührend, daß die Verhältnisse im wirklichen Metallkreis nicht vollständig denen im idealisierten Dampfkreis entsprechen und durch eine Übergangswärme in den Lötstellen zu ergänzen sind. Dies hat zur Folge, daß z. B. im Ausdruck für die Peltierwärme dieser nicht elektrische Energieanteil hinzukommt; zudem sind in dieser exakteren Theorie von *Krüger* die Vorstellungen von *Stark* und *Königsberger*[103]) über die Dissoziation der Elektronen im Metall mitverarbeitet. Unter der Annahme der Reversibilität der thermoelektrischen Vorgänge, einer von der Temperatur abhängenden Dissoziation der Metallatome in frei bewegliche negative Teilchen (Elektronen und feste positive Reste), eines thermodynamisch bestimmten Dampfdruckes der Elektronen über der festen Phase des Metalls und endlich der Gültigkeit der idealen Gasgesetze für die freien Elektronen innerhalb und außerhalb des Metalls, kann man durch Betrachtung des offenen gleichtemperierten Kreises aus zwei Metallen nach dem Spannungsgesetze die Potentialdifferenz E' an der Berührungsstelle der beiden Metalle finden, die gleich sein muß der Summe der Potentialdifferenzen der beiden Metalle gegen das Vakuum; diese beiden sind gegeben durch die Arbeit, die man gewinnt, wenn man die Elektronen vom Dampfdruck im Metall auf den Dampfdruck im Vakuum bringt, und man erhält

$$E'_{a,b} = \alpha T \ln \frac{P_a}{P_b}. \tag{56}$$

Die Anwendung der *Clausius-Clapeyron*schen Gleichung erlaubt dann die Logarithmen der Dampfdrucke mit der Verdampfungswärme zu verknüpfen. Ist q die Differenz der Verdampfungswärmen für die beiden Metalle, so darf man aber nicht die gesamte Wärmetönung $E' + q$ bei Verdampfung von 1 Mol Elektronen aus dem einen Metall und Kondensation in dem andern einfach gleich der Peltierwärme setzen, sondern man muß berücksichtigen, daß einerseits sich jede dieser Verdampfungswärmen zusammensetzt aus zwei Teilen, nämlich aus der Dissoziationswärme q_1 und aus der eigentlichen Austritts-

102) *K. Baedecker*, Phys. Ztschr. 11 (1910), p. 809; Ann. d. Phys. 35 (1911), p. 75; *F. Krüger*, Phys. Ztschr. 11 (1910), p. 800; 12 (1911), p. 360; vgl. auch *Kunz*, Phil. Mag. 16 (1908), p. 764.

103) *J. Königsberger*, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 1907, p. 458; *J. Stark*, Naturw. Rundsch. 17 (1902), p. 533, 549.

wärme Metall—Vakuum q_2, daß dagegen bein Übergang von Elektronen direkt von einem Metall zum andern (im elektrischen Strom) es sich nur um freie Elektronen handelt, für welche die Wärmetönung des Übergangs sich zusammensetzt aus der elektrischen Arbeit und der (nichtelektrischen) Differenz der Austrittswärme q_2. Man erhält so für die Peltierwärme

$$\Pi = E' + (q_{a2} - q_{b2}), \tag{57}$$

also einen um die Differenz der Dissoziationswärme kleineren Betrag als den bei der Verdampfung, Überführung und Kondensation eintretenden Wärmeverbrauch. Von da aus kann man nun schrittweise weitergehen zu einer Reihe anderer Beziehungen zwischen den thermoelektrischen Größen. Die wichtigsten sind:

(58) $\begin{cases} \text{Potentialdifferenz im Temperaturgefälle}^{104)}\ dE'' = -q \cdot \frac{dT}{T}, \\ \text{Thomsonwärme}\ \sigma \cdot dT = dE'' - r dT \quad (r = \text{spez. Wärme der freien Elektronen}), \end{cases}$

aus denen eine Menge speziellerer Formeln und Folgerungen unmittelbar abzuleiten sind. Die Theorie von *Baedecker* liefert demgegenüber natürlich etwas andere Formeln, da sie den nicht elektrischen Anteil der Peltierwärme ($q_{a2} - q_{b2}$ in Gleichung (57)) Null setzt und außerdem annimmt, daß die Temperaturkoeffizienten der q_2 für alle Metalle denselben Wert haben; die Verdampfungswärmen werden mit den Dissoziationswärmen identifiziert.

Neben *Krüger* und *Baedecker* hat sich um den Ausbau der Theorie namentlich *Richardson*[105]) in eingehenden Untersuchungen bemüht und die Betrachtungen auch verallgemeinert auf den Fall, daß sich die Elektronen im Innern des Metalls nicht in einem Raum konstanten Potentials befinden. Außerdem sind hier noch zwei Arbeiten von *Schottky*[106]) und *Bohr*[107]) zu erwähnen, die eine weitere Verfeinerung der Ansätze bringen; es handelt sich in denselben um die schärfere Fassung des Begriffes der Austrittsarbeit und der nach *Clausius-Clapeyron* anzusetzenden inneren Verdampfungswärme der Elektronen, welche die Berücksichtigung z. B. der Änderung der Eigenenergie des Metalls bei Austritt eines Elektrons sowie des Unterschiedes zwischen

104) Eine experimentelle Untersuchung und ausführliche Diskussion speziell der Gefällkraft bei *H. Hörig*, Phys. Ztschr. 15 (1914), p. 388 (dort weitere Literatur).

105) *O. W. Richardson*, Phil. Mag. 23 (1912), p. 594; 24 (1912), p. 737.

106) *W. Schottky*, Verh. d. Deutsch. Phys. Gesellsch. 17 (1915), p. 109.

107) *N. Bohr*, Phil. Mag. 23 (1912), p. 924.

den Verhältnissen bei stationärem Strom und bei thermischem Gleichgewicht erfordert. Endlich verdient noch ein Versuch von *Herzfeld*[108]) in diesem Zusammenhang erwähnt zu werden, der in vermutlich aussichtsreicher Weise durch eine Verknüpfung mit elektrochemischen Daten eine Erweiterung des bisher besprochenen theoretischen Standpunktes anbahnt. Das von *Herzfeld* betrachtete System besteht aus einem Metall mit Atomen, positiven Ionen und Elektronen, einer darüberliegenden Lösung (Wasser) und darüber Wasserstoff in freiem Raum, in welchem nun wiederum geeignete Kreisprozesse vorgenommen werden, die unter anderem zu der *Nernst*schen Formel zwischen dem Dampfdruck der Ionen im Metall und in der wässerigen Lösung führen und diese so als Ionengleichgewichtsformel zwischen Metall und Lösung darstellen lassen. Leider fehlt zur vollständigen quantitativen Diskussion die Kenntnis des Wertes der Zersetzungsspannung und ihres Temperaturkoefizienten.

b) Gehen wir nun zu dem zweiten der zu Anfang dieser Nummer genannten Punkte über, nämlich zu der Beibringung von Zahlenwerten für die kinetischen Daten des Elektronengases, so werden wir solche für die Dichte und freie Weglänge der Elektronen und ihrer Abhängigkeit von der Temperatur fordern müssen; erst dadurch wird das Bild der kinetischen Theorien ein befriedigendes.

Es ergibt sich hier die Möglichkeit zu einer Prüfung und Kritik der Grundlagen der Theorien selbst einmal dadurch, daß mangelnde Übereinstimmung der auf verschiedenen Wegen erhaltenen Werte für dieselbe Konstante auf Unvollkommenheiten der Theorie hinweisen oder dadurch, daß man die Ergebnisse vergleicht mit denen anderweitiger Vorstellung über den inneren Bau des Metalls. Auf diesem Weg ist es in der Tat möglich gewesen (vgl. Nr. **17**), das Material für die Kritik und die schwerwiegenden Bedenken gegen die gaskinetischen Theorien überhaupt zu gewinnen.

Eine Bestimmung[109]) der Elektronendichte N ist auf folgenden Wegen möglich. Unmittelbar liefert N a) der Halleffekt, b) die Metalloptik, d. h. die beiden metalloptischen Konstanten n und k, c) der thermoionische Sättigungsstrom (bei mindestens zwei Temperaturen). Mittelbar, und zwar über das Produkt Nl aus Elektronendichte und freier Weglänge, wobei also die Weglänge anderweitig bereits bekannt sein muß, ist N zu berechnen. d) Aus der elektrischen Leitfähigkeit. Ein

108) *K. F. Herzfeld*, Phys. Ztschr. 16 (1915), p. 354.

109) Hinweise auf die Literatur im einzelnen sind hier und im folgenden unterblieben, soweit sie in den einschlägigen Nummern dieses Artikels unschwer zu finden sind.

von *Herzfeld*[110]) vorgeschlagener Weg, die für Gase bekannte Entropiekonstantenformel zu übertragen auf das Elektronengas und damit den Dampfdruck absolut zu berechnen (wobei die Verdampfungswärmen entnommen sind aus den thermoionischen Effekten), sei der Vollständigkeit halber erwähnt, da er, über die gaskinetischen Elektronentheorien hinausgehend, in vorläufig hypothetischer Weise deren Grundannahmen erweitert. Auch eine wohl von *Riecke* zuerst vorgeschlagene Methode[111]), N zu berechnen aus der spezifischen Wärme (Abweichung vom *Dulong-Petit*schen Gesetz), hat nur prinzipielle Bedeutung und schließt streng genommen sogar einen Zirkelschluß in sich. Endlich verdient noch eine originelle Idee von *Thomson*[112]) erwähnt zu werden, aus elektrostatischen Betrachtungen zu einer Schätzung von N zu gelangen. Er findet unter der Annahme eines dem Gasgesetz gehorchenden Elektronendruckes p für die Potentialdifferenz zwischen einem Punkt der Oberfläche und einem Punkt im Inneren eines auf dem Potential Null erhaltenen mit der negativen Ladungsdichte q belegten Konduktors den Wert $4\pi \frac{q}{p}$ und daraus, da $p = \frac{2}{3} N \alpha T$ ist, also eine Möglichkeit, N zu bestimmen, die sogar experimentell ausgenutzt werden könnte. Relative Werte für die Elektronenzahlen, d. h. für das Verhältnis $\frac{N_1}{N_2}$ für zwei Metalle, kann man unmittelbar entnehmen aus den Formeln für die Thermokraft, Aussagen über die Abhängigkeit der Elektronenzahlen von der Temperatur außer aus den Temperaturkoeffizienten derjenigen Größen, die N allein lieferten, namentlich aus dem Thomsoneffekt.

Die freie Weglänge l der Elektronen[113]) läßt sich schätzen aus dem anderweitig bekannten mittleren Abstand der Metallatome, falls nur die Stöße mit diesen in Betracht kommen und man die aus Betrachtungen an langsamen Kathodenstrahlen bekannte Größe der Wirkungssphären auf die Verhältnisse im Innern der Metalle übertragen darf. Unmittelbar dagegen kann man die freie Weglänge wohl am besten finden aus metalloptischen Daten, die nach den neuesten Ar-

---

110) *K. F. Herzfeld,* Phys. Ztschr. 15 (1913), p. 1119; anschließend dazu Bemerkungen von *E. Riecke.*

111) *E. Riecke,* Phys. Ztschr. 10 (1909), p. 508.

112) *J. J. Thomson,* Corpusculartheorie der Materie, p. 80; vgl. auch *E. Silberstein,* Phil. Mag. 36 (1918), p. 413.

113) Die Berechnung der Weglänge aus der mittleren Zeit zwischen zwei Zusammenstößen eines Elektrons ist, da man bei gegebener Temperatur die mittlere Geschwindigkeit der Elektronen kennt, im folgenden nicht noch besonders erwähnt.

beiten von *Jaffe*, *Enskog* u. a. (Fußn. 94) N und l getrennt zu berechnen erlauben. Eine obere Grenze ergibt sich nach *Reinganum* u. a.[114]) aus den kürzesten ultraroten Wellenlängen, für welche die *Maxwell*sche Relation zwischen dem Reflexionsvermögen und der elektrischen Leitfähigkeit noch gilt, oder nach *Thomson*[115]) aus der Grenzdichte dünner Metallschichten, bei denen eben der Widerstand sich gegenüber dem gewöhnlichen Wert zu ändern beginnt. Diese verschiedenen Methoden sind aber durchaus nicht gleichwertig; teils sind die Ergebnisse der Beobachtung noch recht ungenau — als Beispiel diene etwa die Bestimmung von N aus dem thermoionischen Sättigungsstrom —, teils, wie z. B. bei den die metalloptischen Daten benutzenden Berechnungen, ist die Theorie selbst noch nicht abgeschlossen. Die Aussagen über den absoluten Wert der Konstanten N und l wird man deshalb mit Vorsicht aufnehmen müssen und aus ihnen nicht mehr als die Größenordnung, diese aber wohl mit Sicherheit, entnehmen können. Trotzdem zeigen sich in den bisher nach den verschiedenen Methoden erhaltenen Konstantenwerten und ebenso in ihren Temperaturkoeffizienten zweifelsfrei innere Widersprüche der Theorie bereits an.

Die Größenordnung der Elektronendichte, bezogen auf die Atomdichte, d. h. also die Zahl p der freien Elektronen pro Atom, ergibt sich aus allen direkten Methoden, insbesondere aus der Metalloptik und dem Halleffekt, gleich 1, numerisch in den meisten Fällen etwas geringer (etwa 0,3), in manchen Fällen auch etwas größer (ansteigend bis etwa 7). Die Weglänge wird man von der Größenordnung 10^{-7} bis 10^{-8} cm ansetzen können. Versucht man dagegen die Zahl p zu berechnen aus der elektrischen Leitfähigkeit, indem man entweder den direkt erhaltenen Wert für l oder den aus den mittleren Atomabständen folgenden benutzt, so erhält man einen Wert von hundertmal größerer Ordnung. Die Elektronendichten in verschiedenen Metallen ergeben sich, wie dies bereits aus der Übereinstimmung der Größenordnung von p folgt, nur wenig voneinander verschieden. Doch auch hier zeigt sich ein Widerspruch insofern, als die Reihenfolge der Metalle, geordnet nach den direkt erhaltenen Werten, nicht übereinstimmt mit der Reihenfolge der thermoelektrischen Spannungsreihe. Im einzelnen die von verschiedenen Seiten erhaltenen Zahlenwerte zu

114) *M. Reinganum,* Ann. d. Phys. 16 (1905), p. 958; *J. Königsberger* und *J. Weiß,* Ann. d. Phys. 35 (1911), p. 38; *J. J. Thomson,* Corpusculartheorie der Materie, p. 82.

115) *J. J. Thomson,* Cambr. Proc. 1901, p. 1119; *K Baedecker,* Elektrizitätsleitung in Metallen, p. 16; *J. Patterson,* Phil. Mag. 4 (1902), p. 652.

diskutieren, hat kaum Zweck. Dagegen ist es nun noch notwendig, auf die Temperaturabhängigkeit von N und l einzugehen, weil auch hier deutlich Unstimmigkeiten zutage treten.

Die Abhängigkeit der Elektronendichte von der Temperatur läßt sich unmittelbar entnehmen aus dem Thomsoneffekt und müßte nach *Drude, Lorentz* und *Thomson* dargestellt werden durch $N \sim T^{\frac{3}{2}}$, $N \sim T^{\frac{3}{2}}$ und $N \sim T^{\frac{1}{2}}$, jedenfalls müßte also N sich mit sinkender Temperatur verkleinern. Andererseits gibt der Temperaturkoeffizient der elektrischen Leitfähigkeit, daß das Produkt $N \cdot l$ mit steigender Temperatur abnimmt, so daß also in Verbindung mit der Temperaturabhängigkeit von N notwendigerweise anzunehmen ist[116]), daß l mit steigendem T abnimmt, und zwar (da σ ungefähr proportional T ist) nach *Lorentz* umgekehrt proportional T^2, nach *Thomson* umgekehrt proportional T. Ließen sich selbst Modelle ersinnen, die eine solche Abnahme ergeben würden, so wäre damit wenig gewonnen. Denn einerseits gibt der Temperaturkoeffizient des Halleffekts bei manchen Metallen bereits eine kleinere Zunahme von N als im Widerspruch zur Thomsonwärme folgen würde, andererseits zeigen metalloptische Daten an, daß die freie Weglänge nicht stärker als umgekehrt proportional T mit steigender Temperatur abnimmt. Die Theorie verwickelt sich so — die Beispiele ließen sich noch vermehren — schon bei gewöhnlichen Temperaturen in Widersprüche. Zur Ergänzung sei noch die Abhängigkeit von N und l vom Druck erwähnt, die aus der Änderung der elektrischen Leitfähigkeit und der Stellung des Metalls in der thermoelektrischen Spannungsreihe sich entnehmen lassen; es hat sich dabei ergeben, daß man auf eine Vergrößerung von l und ebenso von N und von p zu schließen gezwungen ist.[117])

Die Anwendung der klassischen Theorie auf die Verhältnisse bei tiefen Temperaturen — alle bisher gegebenen Angaben beziehen sich auf mittlere Temperaturen in der Umgebung von 0^0 Celsius — verschärft die Widersprüche. (Vgl. Abschn. IV, insbesondere Nr. **17**.)

15. Thermoionische Untersuchungen.[118]) Es liegt auf der Hand, daß zwischen der thermischen (oder sog. glühelektrischen) Elektronenemission der Metalle und der eigentlichen in diesem Artikel zu be-

116) Ganz abgesehen von der aus jeder Dissoziationsvorstellung folgenden qualitativen Zunahme der Elektronendichte mit der Temperatur.

117) Vgl. auch Fußn. 169).

118) Eine ausführliche Besprechung der gesamten theoretischen wie experimentellen Literatur findet man bei *W. Schottky*, Jahrb. d. Rad. u. Elektr 12 (1915), p. 147 und in einem Artikel von *O. W. Richardson* in *Marx*' Handb. d. Radiologie, Bd. 4, p. 445.

handelnden Elektronentheorie des Metallinnern viele und enge Beziehungen bestehen; die Verknüpfung der beiden Gebiete läßt sich am einfachsten herstellen auf Grund des in Nr. **14** benutzten Bildes von einem Elektronengas oder besser einem Elektronendampf im Innern der Metalle, der bei genügend hoher Temperatur in meßbarer Menge das Metall verläßt und analog dem Dampf über einer Flüssigkeit in den Außenraum übertritt. Zu ergänzen sind diese „thermoionischen" Erscheinungen durch eine Reihe anderweitiger Vorkommen von Elektronenemission durch Metalle, nämlich durch die der lichtelektrischen Phänomene[119]) und der sog. Sekundärstrahlung[120]) beim Auftreffen von korpuskularen Strahlen und Röntgenstrahlen auf ein Metall. Dabei interessieren hier nun vornehmlich zwei Fragen. Einmal wird es sich darum handeln, aus Beobachtungen an den emittierten Elektronen Rückschlüsse auf die Verhältnisse im Metallinnern zu ziehen; daneben aber erhebt sich die rein theoretische Frage, inwieweit die Analogie mit einem Dampf überhaupt einer strengeren Kritik standhält. Dies soll erst in der folgenden Nr. **16** und zwar für das Innere und Äußere behandelt werden, während hier die zur Beantwortung der ersteren gehörenden Arbeiten Platz finden Ein Eingehen auf Einzelheiten und die Anführung spezieller Literatur erübrigt sich im Hinblick auf die in Fußn. 118) genannten monographischen Darstellungen.

Der Gedanke, dem in allen hierher gehörenden Betrachtungen eine grundsätzliche Bedeutung zukommt, ist, daß ein Elektron beim Austritt aus dem Metall, d. h. beim Durchtreten durch die Metalloberfläche, eine bestimmte nur von der Natur des Metalls (und eventuell von der Temperatur) abhängende Arbeit, die Austrittsarbeit, zu leisten hat. Dabei genügt es vorerst, diese Austrittsarbeit als eine charakteristische Konstante phänomenologisch einzuführen; nähere Angaben über den Mechanismus, der dieser Austrittsarbeit zugrunde liegt, kommen erst in zweiter Linie in Frage. Nimmt man für die freien Elektronen im Innern des Metalls *Maxwell*sche Verteilung an, so kann man die Zahl ν der in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit der Begrenzung des Metalls tretenden Elektronen in einfacher Weise finden, wenn man unter Einführung der genannten Austrittsarbeit w

119) Literatur bei *R. Pohl* und *P. Pringsheim*, Die lichtelektr. Erschein., Sammlung Vieweg, Heft 1, 1914; *W. Hallwachs*, Artikel Lichtelektrizität in *Marx'* Handb. der Radiologie, Bd. 3, p. 245; vgl. außerdem *A. Becker*, Ann. d. Phys. 58 (1919), p. 391.

120) Außer den monographischen Darstellungen der Physik der Röntgenstrahlen vgl. zahlreiche Arbeiten der *Lenard*schen Schule in Ann. d. Phys. und besonders das zusammenfassende Werk von *Ph. Lenard*, Heidelberger Akad. 1918, Nr. 5.

für die Normalkomponente der Geschwindigkeit der austretenden Elektronen die Bedingung vorschreibt

(59) $$u^2 > \frac{2}{m} w$$

und erhält

(60) $$\nu = N \cdot \sqrt{\frac{\alpha_0 T}{2 \pi m}}\, e^{-\frac{w}{\alpha_0 T}}$$ [121]),

und daraus für den thermoionischen Sättigungsstrom, falls N und w unabhängig von der Temperatur sind, die Form

(61) $$i = A \cdot T^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{b}{T}}; \quad A = Ne\left(\frac{\alpha_0}{2 \pi m}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad b = \frac{w}{\alpha_0}$$ [121a]),

die einerseits zur experimentellen Verifikation der Theorie, andererseits zur Bestimmung der Größen A und b und damit der Größen N und w dienen kann. Die Grundannahmen der *Maxwell*schen Verteilung sind außer auf diesem Weg bestätigt durch direkte Messung der Verteilung der Austrittsgeschwindigkeiten, die eingehenden Konstanten, insbesondere die Austrittsarbeit, außerdem durch Messungen der Austrittswärme auf direktem thermischem Weg, d. h. durch die mit der Emission verbundene Abkühlung des Metalls. Zu bemerken ist aber, daß die Beziehungen (60) bzw. (61) nicht eindeutig an die Annahme freier Elektronen im Metall gebunden sind, sondern sich rein thermodynamisch ableiten lassen lediglich auf Grund der Behauptung, daß das Elektronengas im Außenraum im thermodynamischen Gleichgewicht steht mit dem Metall. Man kann die Ableitung der Formel (61) in direkter Analogie zu der Thermodynamik der Verdampfung gestalten, wenn man die latente Wärme der Verdampfung L einführt durch

(61 a) $$L = \nu w + p v,$$

wo p der Druck der Elektronen, v das spezifische Volumen derselben nach der Verdampfung ist, das im Vergleich zu dem Volumen vor der Verdampfung sehr groß angenommen werden muß. Soviel über die Grundlagen.

Was zunächst die Austrittsarbeit w anlangt, so kann sie einmal nach Gleichung (61) durch Messung der Sättigungsstromdichte gewonnen werden; diese liefert die Konstante b und wegen $b = \frac{w}{\alpha_0}$ also unmittelbar w. Die Messungen sind schwierig und unsicher, da Rein-

121) α_0 ist hier und im folgenden die Gaskonstante bezogen auf ein Teilchen eines elementaren Gases.

121 a) Eine Verwechslung der Elektronenladung e und des Transzendenten e wird nicht zu befürchten sein.

heit und Vorbehandlung des Metalls von großem Einfluß sind, und da es sich zugleich mit einer Bestimmung von b stets auch um eine Bestimmung von A handelt; insbesondere bedingt ein kleiner Fehler in b bereits einen sehr großen in A. Drückt man in der üblichen anschaulichen Weise die Austrittsarbeit (φ) in Volt aus nach der Beziehung $\varphi = 8{,}59 \cdot 10^{-5}\, b$, so erhält man Werte von der Größe einiger Volt, für Platin z. B. nach einer kritischen Verwertung aller verfügbaren Einzelresultate 5,72 Volt. Sehr viel ungenauer sind nach dem oben Gesagten die Werte von A und damit von N, für welches lediglich die Größenordnung von 10^{22}, das ist die Größenordnung der Atomzahlen pro ccm, sicher gestellt ist. Die zweite direkte Methode der Austrittswärme erlaubt w nur zu berechnen unter gewissen einschränkenden Annahmen über die Energie der Elektronen im Innen- und Außenraum und führt deshalb nach den einzelnen Theorien zu verschiedenen Werten. Letzten Endes sind die Unterschiede begründet in den Unterschieden zwischen einer latenten statistischen Verdampfungswärme, der Wärmeentwicklung an der Metalloberfläche und der von *Richardson* benutzten Austrittsarbeit, die namentlich *Schottky* in dem Fußn. 118) genannten Bericht scharf herausgearbeitet hat. Die Beeinflußung der Austrittsarbeit durch das äußere Feld und der ganze Komplex der unter dem Namen Raumladungserscheinungen zusammenzufassenden Komplikationen, die theoretisch und praktisch von größter Bedeutung sind, gehören nicht mehr zur eigentlichen Elektronentheorie der Metalle.

Die zweite Frage nach der Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen nach ihrem Austritt scheint durch eine Reihe eingehender experimenteller Untersuchungen im Sinn der *Maxwell*schen Verteilung bejahend beantwortet zu sein. Es ergäbe sich daraus, wie dies namentlich *Richardson*[122]) betont, die für die Elektronentheorie der Metalle wichtige Folgerung, daß auch die Verteilung der Geschwindigkeit im Innern des Metalls in Übereinstimmung mit *Maxwells* Verteilungsgesetz steht und daß die mittlere übertragene kinetische Energie solcher Elektronen identisch ist mit der der Moleküle eines Gases bei der Temperatur des Metalls.

Die Möglichkeit von Beziehungen zwischen der eigentlichen Thermoionik und der Theorie der thermoelektrischen Erscheinungen übersieht man im Anschluß an den vorhergehenden Abschnitt, wenn man sich klarmacht, daß es für eine Reihe von Fragen prinzipiell

122) Fußn. 118), insbesondere p. 517 des dort genannten Berichtes, zu ergänzen durch einen im Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 1921 erscheinenden Bericht von *A. Becker,* welcher diese Frage kritisch betrachten wird.

keinen Unterschied macht, ob in einem heterogenen Kreis zwei Metalle sich unmittelbar berühren oder sich im Vakuum gegenüberstehen. Dabei resultiert die Mannigfaltigkeit der einzelnen Resultate und Theorien letzten Endes aus den verschiedenen Möglichkeiten, mit dem Elektronengas gedankliche thermodynamische Operationen auszuführen, und zum Teil natürlich auch aus der Schärfe der Fassung der dabei notwendigerweise eingehenden Definitionen; eine eingehende kritische Darstellung enthält der Fußn. 118) genannte Bericht von *Schottky*. Es seien hier nur noch zwei solche Beziehungen angeführt, um die Natur der Resultate im allgemeinen zu charakterisieren. Aus der Grundgleichung für die statistische Verteilung der Dichte n eines Systems von Teilchen, die dem *Hamilton*schen Prinzip gehorchen und deren potentielle Energie U nur von der Lage abhängt[122a])

$$n' = n \cdot e^{-\frac{\Delta U}{\alpha_0 T}} \tag{62a}$$

erhält man, falls im Innern des Metalls Gebiete merklich konstanten Potentials den Elektronen zur Verfügung stehen, die Beziehung zwischen der Voltapotentialdifferenz V, den Elektronendichten n_1 und n_2 im Innern und den Austrittsarbeiten w_1 und w_2 die zuerst von *Debye*[123]) gefundene Beziehung

$$V = \frac{\alpha_0 T}{e} \ln \frac{n_2}{n_1} - \frac{w_2 - w_1}{e}, \tag{62}$$

die sich unter Vernachlässigung der Peltierwärme vereinfacht zu der angenäherten und durch die Erfahrung in vielen Fällen gut bestätigten Gleichung

$$V = \frac{w_2 - w_1}{e}. \tag{63}$$

Eine zweite Beziehung, nämlich zwischen thermoionischen Daten und Thomsonwärmen, ergibt sich, wenn man die Konstanz von w und N in Gleichung (60) fallen läßt und den thermoelektrischen Strom

---

122a) n' und n sind die Konzentrationen in der Umgebung zweier Punkte mit dem potentiellen Energieunterschied ΔU; eine Verwechslung der Basis e mit der Elektronenladung e im folgenden ist wohl nicht zu befürchten.

123) Wie überhaupt die Theorie von *Debye* (vgl. Nr. 6) in konsequenter und einheitlicher Weise den ganzen Komplex der thermoelektrischen und thermoionischen Erscheinungen umfaßt und aus der Statistik des Systems aus freien und gebundenen Elektronen im Innen- und Außenraum eines Metalls zu verstehen lehrt. Wie *Schottky* in seinem öfter genannten Bericht mit Recht hervorhebt, wird man als Mangel dieser Theorie nur bezeichnen müssen, daß sie sich zur Einführung schwer kontrollierbarer Annahmen über die Vorgänge im Metallinnern gezwungen sieht, die zu vermeiden eines der Ziele der späteren von *Baedecker* und *Krüger* durchgeführten eigentlichen Elektronendampfdrucktheorien war.

in einem Leiterkreis als reversibeln, von den Wärmeleitungseffekten trennbaren Vorgang durch einen Kreisprozeß nachahmt. Man erhält dann für den Sättigungsstrom

$$i = BT^2 e^{-\frac{w'}{\alpha_0 T} - \frac{e}{\alpha_0}\int\limits_0^T \frac{\sigma}{T} dT}, \tag{64}$$

worin σ die Thomsonwärme und w' die Austrittswärme eines Elektrons, B eine Konstante ist; die Elektronendichte im Innern ist aus dieser Formel in gegen Gleichung (61) vorteilhafter Weise verschwunden. Auf die Unterschiede zwischen w, w' und dem in der aus der *Clausius-Clappeyron*schen Formel folgenden Gleichung für die Elektronendichte im Außenraum

$$n = A \cdot e^{\int\limits_0^T \frac{W}{\alpha_0 T} dT} \tag{64a}$$

auftretenden W wurde von verschiedenen Seiten hingewiesen (vgl. *Schottky*, Fußn. 118).

Über den Zusammenhang zwischen lichtelektrischer und thermischer Elektronenemission, wie er z. B. in der Ansicht, der glühelektrische Effekt sei ein lichtelektrischer des Metalls auf sich selbst, zum Ausdruck kommt, sowie über Einzelheiten des Mechanismus der Elektronenauslösung und hierher gehörende Literaturangaben hat *Becker*[124]) ausführlich berichtet. Die lichtelektrische Elektronenemission und die durch Sekundärstrahlung von *Röntgen*- und Korpuskularstrahlen scheint im übrigen im Rahmen einer Elektronentheorie der Metalle noch nicht einheitlich behandelt und zu weiteren Schlüssen verwertet worden zu sein.

16. Die thermodynamischen Arbeiten von Laue und Schottky. Der Vorgang der Elektronenemission der Metalle bei höheren Temperaturen schien sich vollkommen erfassen zu lassen durch die Auffassung einer Verdampfung der Elektronen aus dem heißen Metall, wie sie mit Hilfe der *Clausius-Clappeyron*schen Gleichung in einfachster Weise zuerst *Wilson*[125]) beschrieben hatte. Man findet aus dieser für die Grenzdichte ϱ_g der Elektronen an der Metalloberfläche den Ausdruck

$$\varrho_g = \text{konst.}\, e^{\int \frac{W}{\alpha_0 T^2} dT}, \tag{65}$$

wenn man mit W ganz allgemein die Änderung der Gesamtenergie von 1 Mol Elektronen beim Austritt aus dem Metall bezeichnet. Diese Einfachheit der Sachlage scheint nun aber neuerdings gestört zu sein durch eine Reihe tiefgehender Untersuchungen von *von Laue*[126]) und

124) *A. Becker*, Ann. d. Phys. 60 (1920), p. 30.

125) *H. A. Wilson*, Phil. Trans. (A) 202 (1903), p. 258.

126) *M. v. Laue*, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 15 (1918), p. 205, 257, 301.

eine daran anschließende noch nicht bis zur vollständigen Klärung durchgeführte Diskussion zwischen *von Laue* und *Schottky*[127]). Die Lage der Dinge und ihre historische Entwicklung läßt sich kurz dahin zusammenfassen, daß zunächst *von Laue* in den genannten Arbeiten die Berechtigung der Annahme eines um das heiße Metall sich ausbreitenden Elektronengases, d. h. die thermodynamisch vollkommene Analogie des Elektronenensembles mit einem idealen Gas, bestritten und eine von der *Wilson-Clausius-Clapeyron*schen Dampfdruckformel abweichende abgeleitet hat, während *Schottky* teils formal, teils begrifflich die Existenz des klassischen Elektronendampfes zu retten sucht.

von Laue geht voraussetzungslos — abgesehen von einigen Annahmen allgemeinster Natur — aus von der Differentialgleichung für das Potential im Außenraum von Metallkörpern konstanter Temperatur und konstanten Potentials der Form

$$\Delta\varphi = \varrho_0 e^{-\alpha\varphi}, \tag{66}$$

deren Diskussion und Integration mit Hilfe von $\Delta\varphi = -\varrho$ die Dichte der Elektronen im Außenraum liefert. Er findet zunächst, daß die Elektronen — die „Elektronenwolke" zum Unterschied von dem klassischen „Elektronendampf" — eine an den Metallflächen anliegende Schicht bilden, deren Energie, Entropie und Ladung sich angeben läßt und der bei gekrümmter Oberfläche ein bestimmter (negativer) Kapillardruck zukommt. Für die Grenzdichte unmittelbar am Metall findet er die von (65) abweichende Formel

$$\varrho_g = \frac{(Ne)^3}{2R} C^2 \cdot T^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\mu}{RT}} \text{ }^{128)}, \tag{67}$$

worin N die Zahl der Moleküle im Mol, R die Gaskonstante, $-\mu$ die Arbeit zur Entziehung von 1 Mol Elektronen bei konstanter Temperatur und endlich C eine universelle Konstante ist, die mit der Entropiekonstanten der Elektronen nahe zusammenhängt. Die Bildkraft ist bei dieser Untersuchung vernachlässigt, wird aber später miteinbezogen. Während nämlich die bisherigen Entwicklungen auf hinreichend hohe Temperaturen und auf hinreichenden Abstand von der Metalloberfläche beschränkt waren, wo die Bildkraft gegen die übrigen mit der Temperatur schnell steigenden Kräfte klein ist, gelingt nun

127) *W. Schottky*, Phys. Ztschr. 20 (1919), p. 49, 220; *M. v. Laue*, Ann. d. Phys. 58 (1919), p. 695; Phys. Ztschr. 20 (1919), p. 202.

128) Benutzt ist hier das *Lorentz*sche Maßsystem. Es ist

$$e = 4{,}76 \cdot 10^{-10}\sqrt{4\pi}\ \mathrm{g}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{cm}^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{sec}^{-1},\ N = 6{,}08 \cdot 10^{23},\ R = 8{,}31 \cdot 10^{7} \cdot \mathrm{g\,cm^2 sec^{-2} grad^{-1}}$$

und

$$C = 7{,}80 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{cm}^{-2}\,\mathrm{grad}^{-\frac{5}{4}}.$$

der Nachweis, daß allgemein die Bildkraft in dem früher benutzten Wert für die potentielle Energie der Elektronen enthalten ist, wenn nur die Raumladungen so dicht sind, daß sie ein zeitlich unveränderliches Potential hervorrufen. Zur Orientierung über die Struktur und die Eigenschaften der Elektronenschicht können die folgenden Zahlenwerte dienen, die mit den von *Langmuir* gefundenen Werten (für Wolfram) der Konstanten A und b in Gleichung (61)[129]) unter Vernachlässigung der Reflexion der Elektronen an der Metalloberfläche berechnet sind. Es bedeutet ϱ_g die Grenzdichte der Elektronen, E den Wert der Feldstärke an der Grenzfläche (beide im elektrostatischen Maßsystem), $\frac{\varrho}{e}$ bzw. $\frac{E}{e}$ die Zahl der Elektronen pro Volumeinheit an der Grenzfläche bzw. pro Flächeneinheit des Metalls, u die kinetische Energie pro Flächeneinheit in Erg und endlich σ die Oberflächenspannung (den Oberflächendruck) pro Längeneinheit in Dyn.

$T_{(\text{abs.})}$	$-\varrho_g$	$-E$	$\frac{\varrho}{e}$	$\frac{E}{e}$	u	σ
2400	$1{,}4 \cdot 10^2$	0,12	$3{,}1 \cdot 10^{11}$	$2{,}6 \cdot 10^8$	$2{,}1 \cdot 10^{-4}$	$1{,}7 \cdot 10^{-4}$
2600	$7{,}8 \cdot 10^2$	0,30	$1{,}6 \cdot 10^{12}$	$6{,}3 \cdot 10^8$	$5{,}5 \cdot 10^{-4}$	$4{,}4 \cdot 10^{-4}$
3000	$1{,}4 \cdot 10^4$	1,53	$3{,}0 \cdot 10^{13}$	$3{,}2 \cdot 10^9$	$2{,}6 \cdot 10^{-3}$	$2{,}1 \cdot 10^{-3}$

Mit einem idealen Gas hat die Elektronenschicht keine Ähnlichkeit, nähert sich auch nicht einem solchen mit wachsender Temperatur, wenigstens solange die Verbindung mit einer stets neue Elektronen nachliefernden Elektrode besteht. Erst für den Fall konstanter Elektronenzahl ist diese Analogie berechtigt. Die Folgerungen aus der gegen (65) veränderten Gleichung (67) sind naturgemäß für die Elektronentheorie der thermoelektrischen Effekte und für die Thermoionik recht einschneidende. Auf die ersteren geht *von Laue* nicht ein, wohl aber auf den thermoionischen Sättigungsstrom und zeigt, daß mit

$$\text{(67a)} \qquad \mu = -R\{\beta + T(\gamma + \delta \ln T)\},$$

wo β, γ, δ von der Temperatur unabhängige Materialkonstanten sind, der Anschluß beider Formeln aneinander zu erzielen ist. Der im speziellen erforderliche Wert $\delta = \frac{3}{2}$ (bzw. der Wert des Exponenten von T) läßt sich aus den bisher vorliegenden Versuchsdaten über die Sättigungsstromstärke jedoch nicht begründen.

Es ist also von der Elektronengasvorstellung der älteren Thermo-

---

129) $A = 2{,}36 \cdot 10^7$ amp. $\text{cm}^{-2}\,\text{grad}^{-\frac{1}{2}}$; $b = 5{,}25 \cdot 10^4$ grad. *J. Langmuir*, Phys. Ztschr. 15 (1914), p. 516.

ionik kaum etwas übrig geblieben, die schöne Einfachheit der Thermodynamik der Glühelektroden ist verschwunden. Nun hat demgegenüber *Schottky* (Fußn. 126, 127), wie bereits bemerkt, in mehreren Notizen mit einer Verteidigung der älteren Vorstellung begonnen. Zunächst hat er gezeigt, daß die *Laue*sche Dampfdruckformel mit der aus der *Clausius-Clapeyron*schen Gleichung folgenden identisch ist und sich nur formal davon unterscheidet; weiterhin haben dann er und *von Laue* die Voraussetzungen der beiden Auffassungen einer eingehenden Kritik unterzogen. Man wird den Stand der Forschung als Resultat dieser Untersuchungen etwa so kennzeichnen können, daß zwar z. B. für niedere Temperaturen die ältere Auffassung durchaus annehmbar erscheint, daß man aber in Strenge und allgemein nicht von der Existenz eines Dampfdruckes und einer Zustandsgleichung der Elektronenschar ausgehen darf, sondern die Bedingungen, wann die Verhältnisse denen in einem idealen Gas und wann sie denen in der *Laue*schen Elektronenwolke ähnlich werden, nur auf Grund der Potentialgleichung (66) festlegen kann: Der Begriff des idealen Gaszustandes ist ein Grenzwert, dem sich Elektronenwolke und Gas von entgegengesetzten Seiten beliebig nähern können.

IV. Semigaskinetische und quantentheoretische Ansätze.

17. Kritik der gaskinetischen Theorien. Ehe man sich entschließt, die gaskinetischen Theorien in Metallen überhaupt aufzugeben, wird man die Gründe genauer zu erwägen haben, die zu einer derartigen radikalen Maßnahme drängen. Bei dieser Kritik scheint es nun angebracht, zwei Seiten der genannten Theorie zu unterscheiden, nämlich das ihnen zugrunde liegende physikalische Bild und die eigentliche mathematische Theorie; denn Mängel, die sich z. B. in letzterer zeigen, könnten sehr wohl korrigiert werden durch eine Verfeinerung und Vervollkommnung gewisser Annahmen, ohne daß man an dem Bild selbst etwas abzuändern brauchte. Zwischen diesen beiden Seiten liegt aber noch ein Grenzgebiet, auf welchem es zweifelhaft sein wird, ob man sich zeigende Mängel in dem einen oder anderen Sinne deuten soll; und diese werden naturgemäß für eine glatte eindeutige Kritik die größten Schwierigkeiten bieten.

Beginnen wir mit dem Bild selbst, weil hier die Verhältnisse am einfachsten zu liegen scheinen, so werden wir als wesentliches Merkmal desselben eigentlich nur die Existenz freier Elektronen im Metallinnern zu betrachten haben, frei in dem Sinn, daß sie bei ihrer Bewegung zwischen den Metallatomen (oder positiven Restatomen) Weg-

strecken außerhalb der Kraftwirkungsbereiche der letzteren zurücklegen können, die zumindest vergleichbar sind mit den Wegstrecken innerhalb dieser Bereiche, eine Aussage, die man in anderer Fassung beziehen kann auf die Geradlinigkeit der genannten Wegstrecken, auf die Bewegungsmöglichkeit in Räumen ohne potentielle Energie oder auf die relativen Verweilzeiten in diesen Räumen. Es ist allerdings selbst bei dieser äußersten Vereinfachung der Prämissen für die Kritik die größte Vorsicht notwendig; denn es hat z. B. *Bohr* als Grundlage seiner Theorie — die man zweifelsohne durchaus zu den gaskinetischen rechnen muß — ein Bild benutzt, in welchem von freien Elektronen in dem obigen Sinne kaum noch die Rede sein kann; und wenn auch gewisse Voraussetzungen in dieser Richtung gemacht werden mußten, so scheint die Frage doch noch nicht geklärt zu sein, inwieweit diese Voraussetzungen notwendig sind. Gerade damit aber ist man an dem Punkt, der des Rätsels Kern zu enthalten scheint, nämlich dem Zusammenstimmen einer physikalischen Unmöglichkeit des Bildes an sich mit einer wenigstens bei nicht zu tiefen Temperaturen unzweifelhaften Leistungsfähigkeit der auf diesem Bild aufgebauten Theorien; das Rätsel scheint sich eben lösen zu lassen durch die trotz der zunächst scheinbaren Bestimmtheit vorhandene Dehnbarkeit und Unbestimmtheit jenes Bildes. Die genannte physikalische Unmöglichkeit, die von den verschiedensten Seiten betont wurde, zeigt sich bereits ohne jedes Eingehen auf die speziellen Annahmen der Elektronentheorie aus Betrachtungen über die Struktur der Metalle, die in der Tat die Existenz einer freien Weglänge unmöglich machen. Wie sich aus der einfachen Rechnung aus Volumen des Grammatoms und Anzahl der Atome im Grammatom, ebenso aber aus Betrachtungen über die Schmelztemperatur und endlich aus den neuesten Ergebnissen der röntgenographischen Analyse der Metallstruktur ergibt, ist der mittlere Abstand der Atommittelpunkte im Metall von der Größe rund eines kleinen Vielfachen von 10^{-8} cm, ebenso groß aber ist nach den Ergebnissen der auf *Bohr*s Modell aufbauenden Atomphysik der Radius des Atoms bzw. der Atomwirkungssphäre. Der naheliegende Ausweg, nicht diese, sondern nur den Kern des Atoms als gaskinetisch maßgebende Größe anzusehen, ist abgeschnitten durch die Folgerungen, die man aus dem Verhalten langsamster Elektronen gegen die Atome ziehen muß, wenn man bedenkt, daß die mittlere Geschwindigkeit der Elektronen im Metall bei 0° Cels. etwa $1{,}3 \cdot 10^7$ cm (entsprechend einer Voltgeschwindigkeit von nur etwa 0,04 Volt) ist. Noch wesentlich ungünstiger werden aber die Verhältnisse, wenn man

die von den gaskinetischen Theorien postulierten freien Weglängen aus deren eigenen Ergebnissen berechnet (vgl. Nr. **14** b); man kommt dann zu freien Weglängen, die 10 bis 100 mal größer sind als der mittlere Atomabstand.

An zweiter Stelle, womit man bereits das eingangs erwähnte Grenzgebiet betritt, muß die an den gaskinetischen Theorien vorausgesetzte Gültigkeit des Gleichverteilungsgesetzes die größten Bedenken erregen. Der von den Elektronen herrührende Beitrag zu der spezifischen Wärme, der in dieser unmittelbar und mittelbar in der Thomsonwärme als additives Glied auftritt, ist in dem von der kinetischen Theorie geforderten Betrag nicht vorhanden. Bezüglich der Thomsonwärme[130]) liegen die Verhältnisse so, daß man den infolge des genannten additiven Gliedes zu großen Wert der Thomsonwärme nur durch eine ad hoc eingeführte künstliche Annahme über die Abhängigkeit der Elektronenzahl herunterdrücken könnte. Schreibt man die Thomsonwärme in der Form

$$Q = \frac{\alpha}{e}\left(x_1 T \frac{\partial \ln N}{\partial T} - x_2\right), \tag{68a}$$

worin nach der Theorie von *Lorentz* $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = 1$, nach der Theorie von *Drude* $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = 1$, nach der von *Thomson* $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$ ist, so müßte also, damit in Übereinstimmung mit der Erfahrung Q klein wird gegen den konstanten Term $x_2 \frac{\alpha}{e}$ (gefordert wird etwa $\frac{1}{50}$), angenähert sein

$$N \sim T^{\frac{x_2}{x_1}}. \tag{68b}$$

Während man sich also hier wenigstens durch eine, wenn auch vorläufig rein formale Zusatzhypothese helfen könnte, sprechen die Beobachtungen über die spezifische Wärme der Metalle eindeutig dafür, daß die freien Elektronen keinen oder doch nur einen gegen den aus der klassischen Theorie zu erwartenden sehr kleinen Beitrag zur Atomwärme beisteuern. Wenn zwar auch bis herab zu nicht zu tiefen Temperaturen die höhere Atomwärme der Leiter gegenüber der der Halbleiter und Isolatoren sich in Analogie zur Erklärung der gleichsinnigen Abweichungen vom *Dulong-Petit*schen Gesetz durch eine Mitwirkung der freien Elektronen deuten ließen[131]), sprechen doch

---

130) Z. B. *J. J. Thomson*, Corpusculartheorie der Materie, p. 77; *J. Königsberger* und *J. Weiß*, Ann. d. Phys. 35 (1911), p. 43; *G. Borelius*, Ann. d. Phys. 57 (1918), p. 232; *K. F. Herzfeld*, Ann. d. Phys. 41 (1913), p. 43; *W. H. Keesom*, Phys. Ztschr. 14 (1913), p. 670; vgl. dazu auch den Bericht *P. Cermak*, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 8 (1911), p. 262 ff.

131) Es hat sich für eine derartige Erklärung, auch bei tiefen Temperaturen, namentlich *J. Königsberger* eingesetzt. Ztschr. f. Elektroch. 17 (1911), p. 289;

die Beobachtungen bei tiefsten Temperaturen, und zwar insbesondere der vollkommen gleiche Gang der Atomwärme mit der Temperatur bei Metallen und Isolatoren mit Bestimmtheit dafür, daß den freien Elektronen keine spezifische Wärme im Sinne des Gleichverteilungstheorems zukommen kann; es haben darauf eine Reihe von Forschern nachdrücklich hingewiesen.[132])

Mit der Voraussetzung der Gleichverteilung hängt aber noch eine weitere Schwierigkeit zusammen. Da die elektrische Leitfähigkeit σ in allen diesen Theorien notwendigerweise proportional der Elektronendichte N angesetzt werden muß, so müßte bei sinkender Temperatur gleichzeitig mit N auch σ abnehmen; in einem gewissen Temperaturbereich läßt sich die Abnahme von N zwar kompensieren durch eine entgegengesetzte Temperaturabhängigkeit des Proportionalitätsfaktors (der z. B. die freie Weglänge enthält) und so wiederum Übereinstimmung mit der Erfahrung herstellen; gefährlich für die Gleichverteilungstheorie wird die Sachlage aber unbedingt in der Nähe des absoluten Nullpunktes, wo man wohl eine vollständige Verschiebung des Dissoziationsgleichgewichtes zugunsten der neutralen Metallatome, ein „Festfrieren der Elektronen“[133]) annehmen muß. Allerdings hat z. B. *Lenard*[134]) darauf hingewiesen, daß man gerade bei tiefsten Temperaturen infolge der Nähewirkung der Atome aufeinander eine starke Elektronenbefreiung bzw. eine enorme Abnahme der Elektronen absorbierenden Atomquerschnitte und demgemäß große Konzentration freier Elektronen erwarten sollte.

Zusammenfassend wird man aber wohl behaupten können, daß sich den klassischen Theorien, insbesondere bei tiefen Temperaturen, die ernstlichsten Schwierigkeiten entgegenstellen und daß diese nur zu überwinden sind durch Hilfsannahmen; dadurch aber geht natürlich ein wesentlicher Vorteil, nämlich die Einheitlichkeit und Konsequenz, verloren.

Prinzipiell einfacher liegen die Dinge bezüglich der Klasse von Einwänden, die quantitative Widersprüche zwischen der Erfahrung und speziellen Folgerung der Theorie betreffen. Das Hauptgewicht

---

Verh. d Deutsch. Phys. Gesellsch. 14 (1912), p. 275. Vgl. auch *Richards*, Ztschr. f. anorg. Chem. 58 (1908), p. 256; 59 (1908), p. 146; Wied. Ann. 48 (1893), p. 708.

132) U. a. *M. Reinganum*, Ann. d. Phys. 2 (1900), p. 398; *Magnus* und *F. Lindemann*, Ztschr f. Elektroch. 16 (1910), p. 269; *Eucken*, Jahrb. f Rad. u. Elektr. 8 (1911), p. 489 (dort weitere Literatur); *E. Grüneisen*, 2. Solvay-Kongreß, Brüssel 1913, sowie die Arbeiten der *Nernst*schen Schule über spezifische Wärme.

133) *Kammerlingh-Onnes*, Leidener Comm. 9 (1904), p. 25; Suppl. (1908), p. 103.

134) *Ph. Lenard*, Ann. d. Phys. 60 (1919), p. 330.

wird für die Kritik dabei naturgemäß zu legen sein nicht auf derartige Widersprüche für sich, sondern auf Kombinationen solcher; so z. B. auf die verschiedenen Werte der Elektronenkonzentration, die aus den Formeln für die elektrische Leitfähigkeit und aus metalloptischen Daten folgen, oder auf die verschiedenen Temperaturkoeffizienten der Elektronendichte nach dem Gang der Atomwärme, der elektrischen Leitfähigkeit und des Halleffektes oder endlich auf eine Reihe von Unstimmigkeiten in der Theorie der verschiedenen thermoelektrischen Effekte.

Abseits von den bisher erwähnten Angriffspunkten der Kritik steht nun noch ein Einwand gegen die klassischen Elektronentheorien, den *Decombe*[135]) erhoben hat durch den Hinweis darauf, daß diese Theorien nicht fähig sein sollten, das Auftreten der *Joule*schen Wärme zu erklären. Eine kritische Stellungnahme zu diesem, wenn richtig, allerdings sehr schwerwiegenden Einwand findet sich bisher merkwürdigerweise nur in einem Bericht von *Meißner*[135]), der ihn als nicht stichhaltig abweist. Beschränkt man sich auf wirklich stationäre Zustände, so dürfte *Decombe*s Einwand in der Tat hinfällig sein; er scheint aber doch insofern einen richtigen Kern zu enthalten, als über die Zeitdauer bis zum Eintritt des stationären Zustandes nichts auszusagen ist und sich eine bisher nicht beobachtete „Trägheit" des Elektronengleichgewichtes bei zeitlich veränderlichen Verhältnissen ergeben könnte.

18. Theorie von J. J. Thomson. Der erste Versuch, die aus der kinetischen Theorie der Gase übernommenen und für diese charakteristischen Vorstellungen und Annahmen durch andere zu ersetzen, rührt wohl von *J. J. Thomson* her[136]) und geht bereits in radikaler Weise vor. Ohne Zweifel ist der Grundgedanke *Thomson*s physikalisch berechtigt; die Durchführung im einzelnen aber, auf die es gerade hier wesentlich ankommt, ist leider ziemlich oberflächlich, so daß zum Teil eine Prüfung der Theorie an der Erfahrung noch nicht möglich ist, zum Teil bei einer exakteren Durcharbeitung sich noch manches anders gestalten wird, als *Thomson* aus seinen mehr überschlagsweisen Überlegungen gefolgert hat.[137]) Nach *Thomson*s Annahme sind

135) *L. Decombe,* J. de phys. 4 (1914), p. 116; vgl. dazu *F. v. Hauer,* Phys. Ztschr. 18 (1917), p. 149; *K. Benedicks,* Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 13 (1916), p. 351; *M. Reinganum,* Heidelberger Akad. 1911, Nr. 10, sowie *W. Meißner,* Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 17 (1921), p. 229 (dort weitere Literatur).

136) *J. J. Thomson,* Corpusculartheorie der Materie (Vieweg 1908), p. 48, 84 ff.; Phil. Mag. 30 (1915), p. 192.

137) Auf eine derartige Schwierigkeit macht z. B. *Borelius* aufmerksam, Ann. d. Phys. 57 (1918), p. 280.

die Elektronen im Metall weder frei in dem Sinn, daß sie auf längeren Wegen die Möglichkeit hätten, sich mit ihrer Umgebung in thermisches Gleichgewicht zu setzen, noch auch in dem Sinn, daß sie als Wolke oder Gas den Raum zwischen den Metallatomen erfüllten, sondern sie werden — wohl infolge der Atomschwingungen in einer etwa *Lenards* Nähewirkung entsprechenden Weise — von den Atomen ausgestoßen und schon beim nächstfolgenden Zusammentreffen mit einem anderen Atom von diesem absorbiert. Der Zusammenhang zwischen gerichtet transportierter Ladung und elektrischem Feld wird dabei dadurch hergestellt, daß dieses im gewissen Sinne richtend wirkt auf den Vorgang der Elektronenemission, der Zusammenhang mit der Wärmeleitfähigkeit dadurch, daß die kinetische Energie des ausgestoßenen Elektrons proportional gesetzt wird der kinetischen Energie des Mutteratoms; durch die letztere Annahme wird ermöglicht, trotz der Aufgabe des Gleichverteilungsprinzips (vgl. die Theorie von *Wien*, Nr. 22), auch die Wärmeleitfähigkeit zu behandeln und insbesondere also auch zum Gesetz von *Wiedemann-Franz* gelangen zu können. In Wirklichkeit aber wird jenes Prinzip nur scheinbar aufgegeben; denn *Thomson* setzt zur rechnerischen Durchführung axiomatisch jene Energie gleich αT. Die Durchführung erfordert nun natürlich bestimmte, sozusagen modellmäßige Vorstellungen. Demgemäß denkt sich *Thomson* die Metallatome als Dubletts, aus deren negativem Ende das Elektron austritt, um am positiven Ende des benachbarten Atoms aufgenommen zu werden. Diese Dubletts werden durch das elektrische Feld parallel gerichtet, wodurch eine ausgezeichnete Strömungsrichtung der Elektronen zustande kommt.

Ist $\pm e$ die Ladung der Dublettkomponenten, d ihr Abstand, n die Zahl der Dubletts in der Volumeinheit und b der Abstand zwischen diesen, E die elektrische Kraft, ist ferner die Richtungsverteilung der Dublettachsen nach einem bekannten statistischen Ansatz gegeben durch $e^{-\frac{3}{2}\frac{V}{\alpha T}}$ ($V =$ potentielle Energie eines Dubletts im elektrischen Feld) und sendet nun jedes Dublett in der Sekunde p mal je ein Elektron aus, so erhält man aus der Stromdichte in Richtung der Kraft für die elektrische Leitfähigkeit[138])

$$\sigma = \frac{1}{2}\frac{e^2 dpnb}{\alpha T}. \tag{69}$$

138) Bei *Thomson* liegt, soviel ich sehe, ein Rechenfehler vor. Demgemäß ändern sich auch im folgenden die Zahlenfaktoren, so z. B. im *Wiedemann-Franz*schen Gesetz von dem Wert $\frac{4}{3}$ bei *Thomson* zu $\frac{4}{3}$. Im Text sind die korrigierten Werte benutzt.

Die Wärmeleitfähigkeit ergibt sich aus der kinetischen Energie, die von einem Dublett der Temperatur T zu einem benachbarten der Temperatur $T + dT$ übertragen wird in der Form

$$\varkappa = \tfrac{1}{3} n b^2 N \alpha, \tag{70}$$

so daß also endlich für das Verhältnis beider folgt

$$\frac{\varkappa}{\sigma} = \frac{2}{3} \frac{b \alpha^2 T}{d e^2}. \tag{71}$$

Dies Resultat stimmt mit dem aus der gaskinetischen Theorie folgenden (p. 803) überein bis auf den Zahlenfaktor und den Faktor $\frac{b}{d}$; ist dieser von der Größenordnung 1, d. h. also ist der Dublettabstand von der Größenordnung der Dublettgröße, so ergibt sich für $\frac{\varkappa}{\sigma}$ dieselbe Größenordnung wie aus der älteren Theorie. Von Bedeutung ist aber ferner, daß $\frac{b}{d}$ keine universelle, sondern eine jedem Metall charakteristische Konstante ist; denn es liegt darin eine Möglichkeit, die beobachteten individuellen Abweichungen der einzelnen Metalle vom universellen *Wiedemann-Franz*schen Gesetz darzustellen.

Thomson hat im Rahmen seiner Theorie auch den Peltier-, Thomson- und den Halleffekt zu deuten versucht, allerdings nur in Form allgemeiner qualitativer Überlegungen. Das wesentliche ist auch hier, daß die elektrischen bzw. magnetischen Felder nicht wie in den älteren Theorien unmittelbar die Bewegung der Elektronen beeinflussen, sondern daß sie richtend auf die Dubletts wirken. Namentlich bezüglich des Halleffektes aber wird man den Überlegungen *Thomsons* skeptisch gegenüberstehen.

Von besonderem Interesse ist der Inhalt der zweiten der in Fußn. 136) genannten Arbeiten *Thomsons*, in der er seine Theorie anwendet auf die bei sehr tiefen Temperaturen von *Kammerlingh-Onnes* entdeckte Erscheinung der Supraleitfähigkeit. Es ist physikalisch unschwer zu übersehen, daß bei sehr tiefen Temperaturen die Leitfähigkeit ansteigen muß, da die Richtkraft des äußeren Feldes dann die eine regellose Verteilung der Dublettachsen bewirkenden Ursachen überwiegt; analytisch lassen sich die dann eintretenden Verhältnisse fassen, wenn man die Überlegungen *Langevins* zur Theorie des Paramagnetismus benutzt. Bemerkenswert ist hier nun aber, daß die *Thomson*sche Dublettheorie nicht nur den Zustand der Supraleitfähigkeit ergibt — dies leisten auch andere Theorien, nämlich die in Nr. **19** besprochene Gittertheorie —, sondern bisher als einzige auch den plötzlichen Übergang zur Supraleitfähigkeit bei einer bestimmten

kritischen Temperatur[139]) verständlich macht; der Gedankengang, der zu diesem Ergebnis führt, ist ganz ähnlich einem von *P. Weiß* in dessen Theorie des permanenten Magnetismus unterhalb einer bestimmten kritischen Temperatur benutzten. Von weiteren Folgerungen sei nur noch hervorgehoben, daß sich für den Temperaturkoeffizient α der elektrischen Leitfähigkeit $\sigma = \sigma_0(1 + \alpha t)$ in Übereinstimmung mit der Erfahrung ein Wert ergibt, der für nicht allzu tiefe Temperaturen größer ist als $\frac{1}{273}$.

Eine kurze allgemeine Kritik der Theorie wurde bereits einleitend gegeben, die auch auf diese Erweiterung auf tiefste Temperaturen zu übertragen ist. Es erübrigt sich vielleicht noch darauf hinzuweisen, daß eine spätere Verschmelzung der *Thomson*schen Theorie mit den Gittertheorien (Nr. **19**), die dem wahren Sachverhalt wohl am nächsten kommen, nicht so fernliegend erscheint, wenn man die Grundlagen der Überlegungen *Thomsons* analysiert. Als das Wesentliche, aus dem letzten Endes auch die Möglichkeit der Erfassung der Supraleitfähigkeit fließt, wird man nämlich bei *Thomson* die Annahme betrachten müssen, daß es im Metall ausgezeichnete Leitungsbahnen (Chains) gibt; man kann diese Theorie auffassen als die Theorie sozusagen eines speziellen Modells für diese Leitungsbahnen, denselben, die bei *Stark* als Leitungsstäbe oder bei *Haber* als Ketten der sich berührenden Elektronenbahnen vorkommen.

Richardson[140]) hat einige ergänzende Bemerkungen zu der Theorie mitgeteilt. Er berechnet die thermoionische Sättigungsstromdichte auf Grund der Vorstellungen *Thomsons* und findet dafür

$$\frac{i}{e} = \frac{3}{2\pi} \frac{kT}{e(ed)} \cdot \sigma \sqrt{\frac{kT}{w}}\, e^{-\frac{w}{kT}} \tag{72}$$

(w = Austrittsarbeit, k = *Boltzmann*sche Konstante). Hieraus entnimmt er das Moment $e \cdot d = M$ der Dubletts und berechnet aus den gemessenen Werten von i, w und σ für Wolfram $4{,}65 \cdot 10^{28}$ C.G.S.-Einheiten.[141]) Kennt man M, so kann man die „Dichte n' der freien Elektronen" finden aus der Überlegung, daß

$$n' = \frac{n p d_1}{V} \tag{72a}$$

ist, wo d_1 die mittlere Weglänge eines Elektrons zwischen Emission

139) Bericht über das gesamte experimentelle Material bei *C. A. Crommelin*, Phys. Ztschr. 21 (1920), p. 274, 300, 331 und in einem Bericht von *W. Meißner*, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 17 (1921), p. 229.

140) *O. W. Richardson*, Phil. Mag. 30 (1915), p. 295.

141) Nach Messungen von *Smith*, Phil. Mag. 19 (1915), p. 102; die früheren Werte von *Langmuir* geben einen etwas größeren Wert.

und Absorption und V die mittlere Geschwindigkeit auf diesem Weg ist (Bezeichnung s. Gleichung (69)). Es ergibt sich für Wolfram n' von der Größenordnung $6 \cdot 10^{22}$, also von der Größenordnung der Anzahl der Atome. Wenn auch die thermoionischen Daten, die bei diesen Rechnungen benutzt wurden, vorerst wenig genau bekannt sind, wird man die auf diesem Weg erhaltene Größenordnung von M und n' immerhin als richtig betrachten dürfen. Bemerkenswert ist noch, daß die spezifische Wärme der „freien" Elektronen mit $\frac{d_1}{d}$ klein wird und also unter Umständen (für $d_1 = 0$) überhaupt Null wird.

19. Die Gittertheorien. Von den mannigfachen theoretischen Versuchen, die bisher zur Behebung der in Nr. 17 besprochenen Schwierigkeiten der älteren gaskinetischen Theorien unternommen worden sind, gehören die nun zu besprechenden trotz vielfacher Verschiedenheiten im einzelnen insofern zusammen, als sie einen in den übrigen Theorien noch nicht verwerteten Gedanken benutzen, der ohne Zweifel einen physikalisch neuen Gesichtspunkt in die Diskussion hereinbringt. Es rührt dieser Gedanke von *J. Stark* und *F. Haber* her und läßt sich, zunächst noch allen speziellen Beiwerks entkleidet, dahin formulieren, daß das Metall nicht als regelloses statistisches Ensemble von Atomen und Elektronen aufgefaßt wird, sondern daß die regelmäßige geometrische Lagerung der Komponenten in einem Gitter für die elektrischen und die thermischen Eigenschaften eine wesentliche Rolle spielt. In dieser allgemeinen Fassung hat diese Annahme heute nichts Hypothetisches mehr, sondern ist durch vielerlei anderweitige Erfahrungen der Metallographie und vor allem der Röntgenometrie gesichert.

Stark selbst[142]) hat eine allerdings nur qualitative Theorie durchgearbeitet. Nach dieser besteht ein Metall gewissermaßen aus zwei ineinander gesteckten Gittern, nämlich dem Gitter der Elektronen und dem Gitter der Atome oder positiven Ionen, die eine stabile Gleichgewichtskonfiguration bilden sollen. Die Elektronen sind nun aber nicht allseitig frei beweglich, sondern nur in ausgezeichneten Richtungen, den sogenannten Schubflächen, zwangsläufig verschiebbar, in diesen aber auch nicht einzeln, sondern nur zusammen mit vielen anderen Valenzelektronen; es ist das Elektronengitter als Ganzes verschiebbar im Atomgitter längs ausgezeichneter Flächen. Sind die Atome, wie bei sehr tiefen Temperaturen, in Ruhe, so kann die Verschiebung kräftefrei oder doch nur unter Überwindung einer sehr

142) *J. Stark*, Atomdynamik, Bd. 3, p. 174 ff.; Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 9 (1912), p. 188. Bzgl. der Arbeiten von *Haber* vgl. S. 862 dieses Berichtes

kleinen Gegenkraft erfolgen, d. h. die elektrische Leitfähigkeit ist sehr groß; mit steigender Temperatur wird von den um ihre Gleichgewichtslagen schwingenden Atomen Energie auf das Elektronengitter übertragen, es steigt der Widerstand gegen die Verschiebung desselben, d. h. die Leitfähigkeit nimmt ab. Die Zahl der an der Elektrizitätsleitung beteiligten Elektronen pro Volumeneinheit bleibt dagegen, wie ausdrücklich noch bemerkt sei, stets dieselbe und ist lediglich gegeben durch die Zahl und Anordnung der atomaren Valenzfelder, ist also z. B. bei einem einatomigen Metall gleich der Zahl der Atome. Diese Vorstellungen hat nun *Stark* zu einer erfolgreichen qualitativen Deutung einer Reihe von Erfahrungstatsachen benutzen können. Auf diese einzugehen ist hier nicht der Ort; es sei nur hingewiesen auf eine Erweiterung der Theorie durch die Einführung der Begriffe des Ganzmetalls und des Halbmetalls, welche die Erfassung der Vorgänge auch in Halbleitern, in Verbindungen und Legierungen ermöglichte.

Neuerdings hat *Borelius*[143]) Ansätze zu theoretischen Überlegungen veröffentlicht, die sich den Vorstellungen von *Stark* eng anschließen und sie quantitativ zu fassen suchen. Allerdings wird die Übereinstimmung der Grundlagen dadurch verwischt, daß *Borelius* andererseits auch Vorstellungen hereinbringt, die der Theorie von *Thomson* (Nr. **18**) entnommen sind; sie tritt aber klar hervor bei der Behandlung der Wärmeleitfähigkeit. Nach *Borelius* kommt nämlich die Wärmeleitfähigkeit der Metalle bereits deren Atomgitter zu und wird durch die Elektronen nur in bestimmter Weise reguliert, in dem Sinn, daß die Wellenlänge der elastischen Wellen des Raumgitters beeinflußt wird durch die dazwischen gelagerten Elektronen. Außerdem setzt *Borelius* die mittlere Energie der Elektronen in Analogie zu den Verhältnissen im Strahlungsfeld proportional der Temperatur und nimmt die Energie der Elektronen sehr viel kleiner an als den Gleichverteilungswert $\frac{3}{2}kT$; prinzipiell ist natürlich die Durchbrechung des Prinzips der Gleichverteilung bereits mit der Annahme der Gittervorstellungen gegeben und auch in der vorliegenden quantitativen Fassung nicht neu. Die im einzelnen wenig befriedigenden Überlegungen werden ergänzt durch eine zweite Arbeit von *Borelius*[144]), in der nun bestimmtere Vorstellungen über die Kraftfelder der Atome, und zwar speziell über die im Atomgitter maßgebenden entwickelt werden. Die Beweglichkeit der Elektronen wird beeinflußt durch die Atomkraftfelder, deren Konstitution von der Temperatur abhängt.

143) *G. Borelius,* Ann. d. Phys. 20 (1918), p. 278.
144) *G. Borelius,* Ann. d. Phys. 57 (1918), p. 231.

In reinster Form bildet die Gittervorstellung die Grundlage einer Theorie, die neuerdings *Lindemann*[145]) entwickelt hat. *Lindemann* schließt sich durch die Annahme sowohl eines Elektronengitters, das im Atomgitter verschiebbar ist (das sich wegen der aus der kleinen Masse der Elektronen folgenden hohen Eigenfrequenz verhält wie ein Kristall von sehr tiefer Temperatur), wie auch in vielen Einzelheiten eng an die Theorie von *Stark* an, ohne diese allerdings zu erwähnen. Die strenge Durchführung der Theorie, die in dieser Fassung durchaus ein Problem der Gitterdynamik ist und sich nur bewältigen läßt, wenn man die Eigenschaften des Gitters bis in die Einzelheiten kennt, ist noch nicht möglich; es lassen sich aber immerhin die Verhältnisse, wie es scheint, qualitativ so weit übersehen, daß man alle hier in Betracht kommenden einzelnen Erscheinungen (Elektrizitäts- und Wärmeleitung, Voltaeffekt, Thermoeffekte usw.) physikalisch recht genau verstehen kann. Die Elektrizitätsleitung wird hier vorgestellt als eine Verschiebung des Elektronengitters durch das Atomgitter, wobei gewissermaßen das erstere auf der einen Seite ständig „abschmilzt", auf der anderen durch „Ausfrieren sich wieder ansetzt". Der freien Verschiebung des Gitters stehen hemmend repulsive Kräfte zwischen den Elektronen und den Metallatomen entgegen, die aber erst wirksam werden, wenn der regelmäßige Aufbau des Atomgitters gestört ist, sei es durch die Schwingungen der Atome, sei es durch die eingebetteten Atome von Verunreinigungen. Dadurch ergibt sich eine Erklärung der Supraleitfähigkeit bei tiefsten Temperaturen, der Wirkung von Verunreinigungen und der Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes (*Nernst*sche Formel). Die Wärmeleitfähigkeit ist zu verstehen von Seite der *Debye*schen Theorie des festen Körpers her, führt aber zusammen mit der elektrischen Leitfähigkeit nur zum *Wiedemann-Franz*schen Gesetz, wenn man die genannten repulsiven Kräfte zwischen Elektronen und Atomen geeignet wählt. Ist das Kraftgesetz für diese $Kf(r)$ — für $r < r_0$, für $r > r_0$ gilt die gewöhnliche *Coulomb*sche Anziehung —, ist ferner N die Anzahl der Elektronen im ccm, so ist die elektrische Leitfähigkeit proportional einer Funktion $\varphi(N, K)$ von N und K. Andererseits ergibt sich die thermische Leitfähigkeit als Funktion $\psi(N, D)$ der Elektronendichte N und der Dielektrizitätskonstanten D der Metallionen; das *Wiedemann-Franz*sche Gesetz folgt, wenn $\varphi \sim \psi$ ist, und zwar ist vermutlich die speziellere Form von φ und ψ derart, daß

$$(73) \qquad \frac{\varkappa}{\sigma} = \frac{N}{K^{\frac{1}{2}} D^{\frac{3}{2}}},$$

145) *F. A. Lindemann,* Phil. Mag. 29 (1915), p. 127.

woraus bei gleichem D für alle Metalle N proportional $\sqrt{K}$ folgen würde. Die übrigen Effekte behandelt *Lindemann* nur ganz kurz, immerhin aber soweit, daß sich bereits ein klares Programm für den weiteren Gang der Forschung ergibt. Von fundamentaler Bedeutung und deshalb der eingehenden Betrachtung wert ist aber natürlich wieder die Frage nach der spezifischen Wärme der Elektronen. Berechnet man im Anschluß an bekannte Überlegungen *Debyes* die Atomwärme des Elektronengitters, so findet sich der sehr kleine Wert

$$c_v = \frac{12\pi^4}{5} \cdot R \frac{T^3}{(\beta \nu_m)^3}, \tag{74}$$

der wesentlich unterhalb der heutigen Grenzen der Meßgenauigkeit liegt. Damit ist also in der Tat diese größte Schwierigkeit der älteren Theorien aus dem Wege geräumt.

Zum Schluß sind hier noch zu erwähnen die sehr bedeutungsvollen, leider noch nicht abgeschlossenen Arbeiten von *Haber* zur Elektronentheorie der Metalle; schon vor längerer Zeit hatte *Haber* ebenfalls die Vorstellung entwickelt[146]), daß die Metalle aufzufassen seien als aus Elektronen und Ionen aufgebaute Gitter, die er nun neuerdings weiter ausgebaut hat.[147]) In dem vorliegenden Zusammenhang interessiert vor allem der Inhalt einer Nachschrift[148]) zu der letzten Arbeit. Hier entwickelt *Haber* (anschließend an röntgenometrische Untersuchungen von *Debye* über die Verteilung der Elektronen im Raumgitter) eine Möglichkeit, Schwierigkeiten der oben besprochenen Gittertheorien zu vermeiden. Abgesehen nämlich von gewissen gitterdynamischen Schwierigkeiten läßt die Annahme eines statischen Elektronengitters keinen Raum zum Verständnis der Supraleitfähigkeit beim absoluten Nullpunkt ohne Verletzung des *Ohm*schen Gesetzes, da man notwendigerweise eine Mindestkraft zur Verschiebung der Elektronen einführen muß. Deshalb faßt *Haber* das Gitter nicht mehr als ein statisches, sondern als ein dynamisches Gebilde auf; dadurch wird allerdings die Sachlage nun wieder komplizierter, „es wird das theoretische Verständnis der durch das statische Gitter schon geklärten Zusammenhänge wieder undeutlich, aber man erkennt neue Zusammenhänge, die vom statischen Gitter aus unerreichbar waren“. Zu diesen gehört nun auch die Vorstellung, daß im Zustand der Supraleitfähigkeit die Elektronen in Bahnen mit gemeinsamer Tangente umlaufen; dann nämlich wird ein Elektron ohne Arbeits-

146) *F. Haber*, Verh. d. Deutsch. phys. Gesellsch. 13 (1911), p. 1128.
147) Berlin. Ber. 1919, p. 506, 990.
148) Ebd. p. 1002.

leistung von einer Bahn zur anderen übergehen können und also der Strom in Strenge widerstandslos durch das Metall fließen. Die Theorie berührt sich damit mit der *Bohr*schen Theorie des Atombaues und kann der Ausgangspunkt einer befriedigenden neuen Auffassung der Elektronentheorie der Metalle werden.

20. **Die phoretische Elektronentheorie von Benedicks.** Eine Theorie der Elektronen in Metallen, deren Grundannahmen sich ebenfalls weit entfernen von denen der gaskinetischen Theorien, hat auch *Benedicks* skizziert[149]); wieweit dieselbe allerdings trotz eines fraglos richtigen Kerns einer strengeren Kritik wird standhalten können, ist fraglich, da *Benedicks* seine Überlegungen stützt auf die von ihm bei anderer Gelegenheit vorgeschlagene sog. Agglommerationshypothese und gegen diese von verschiedenen Seiten ernste Bedenken erhoben worden sind. Ausgangspunkt sind neben den auch anderweitig vielfach bemerkten prinzipiellen Mängeln[150]) des gaskinetischen Bildes die Beziehungen zwischen den elektrischen Eigenschaften der Metalle und deren chemischer Natur, insbesondere der Zusammenhang der elektrischen Leitfähigkeit mit der Stellung des Metalls im periodischen System der Elemente, wie sie in dem Gang der sog. atomaren Leitfähigkeit zum Ausdruck kommt (vgl. Nr. 23). In der phoretischen (oder Kontakt-) Theorie wird nun der Transport von Ladung durch ein Metall überhaupt nicht besorgt von freien Elektronen im Sinn des gaskinetischen Bildes, sondern die Elektronen gehen unmittelbar von Atom zu Atom über. Dies ist natürlich nur möglich, wenn die Atome sich unmittelbar berühren, sei dies nun dauernd wie bei tiefen Temperaturen oder nur jeweils in momentanen Stößen; wie man sich den Mechanismus dieser mit dem Übergang eines Elektrons verbundenen Stöße im einzelnen zu denken habe, ist zunächst gleichgültig. Es ist aber immerhin bemerkenswert, daß neuerdings auch *Haber* (Fußn. 148) von seiten quantentheoretischer Spekulationen im Sinne *Bohr*s zu Vorstellungen gekommen ist, die jedenfalls zu demselben Endeffekt führen. Formal faßt *Benedicks* diese Vorstellung durch den Zusammenhang zwischen der atomaren Leitfähigkeit σ_A (= spezifische Leitfähigkeit dividiert durch den Quotienten aus spezifischem Gewicht

149) *L. Benedicks*, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 13 (1916), p. 351; vgl. auch manche Bemerkungen hierzu in den Ann. d. Phys. 55 (1918), p. 1, 103. Auch eine Theorie von *F. H. Hall* [Proc. Am. Acad. Arts. Sc. 50 (1914), p. 67] scheint hierher zu gehören. (Diese Arbeit war nur in einer kurzen Bemerkung bei *Benedicks*, nicht im Original zugänglich.)

150) Einige der von *Benedicks* erhobenen Einwände sucht *F. v. Hauer*, Phys. Ztschr. 18 (1917), p. 149 zu entkräften.

in das Atomgewicht) und der Schwingungszahl ν der Atome $\sigma_A = C \cdot \nu$, worin C eine mit der Elektronenaffinität in Beziehung stehende charakteristische Konstante ist; die Größe ν kann dabei aus bekannten Theorien der festen Körper einfach herübergenommen werden. Im einzelnen ergibt sich die qualitative Deutung des empirischen Materials, allerdings stets in recht rohem Überschlag. In einigen Fällen liegt diese Deutung auf der Hand, so z. B. bezüglich der Zunahme der Leitfähigkeit mit zunehmender Kompression, bezüglich der Überleitfähigkeit bei tiefsten Temperaturen und überhaupt des Zusammenhangs der Leitfähigkeit mit der Temperatur; gewisse Schwierigkeiten treten jedoch auf bei der Deutung des *Wiedemann-Franz*schen Gesetzes, die zu Zusatzannahmen zwingen. (Weiteres über die atomare Leitfähigkeit vgl. Nr. **23**.)

21. Quantentheoretische Ansätze. Die inzwischen entwickelte Quantentheorie des festen Körpers mußte den Gedanken nahelegen, die ihr zugrunde liegenden Ideen auch der Theorie der Elektronen in Metallen dienstbar zu machen. Einen Hinweis auf einen direkten Zusammenhang zwischen beiden hatte zudem *Nernst*[151]) rein empirisch (bereits 1911) darin gefunden, daß die Atomwärme und der Temperaturkoeffizient der elektrischen Leitfähigkeit einen ganz analogen Gang mit der Temperatur zeigen, nämlich das Hinstreben zu einem universellen konstanten Wert bei hoher Temperatur und dem raschen Abfall bei tiefer, und auch bereits versucht, diesen Zusammenhang durch eine empirische, der *Einstein*schen Formel für die Atomwärme formal nachgebildete wiederzugeben. Seitdem haben nun verschiedene Forscher von verschiedensten Seiten her versucht, diese zunächst nur geahnten Zusammenhänge zu fassen und zu verwerten in quantentheoretischen Ansätzen.[152]) Die sich bietenden Möglichkeiten lassen sich in zwei Gruppen teilen, die man etwa als die kinetische und die energetische bezeichnen könnte. Die typische energetische Betrachtungsweise nimmt die Energie der Elektronen oder der Metallatome unmittelbar zum Ausgangspunkt, die kinetische die freie Weglänge der Elektronen; zu den ersteren Theorien wäre zu rechnen die von *Bernoulli*, *Jaffe* und *Keesom*, zu letzteren die von *Onnes* und *Lindemann*.

Der Gedankengang der kinetischen Theorien ist der, daß die freie Weglänge l der Elektronen abhängt von der Amplitude der Atomschwingungen; die um ihre Gleichgewichtslagen pendelnden Atome

151) *W. Nernst*, Berl. Ber. 1911, p. 311.

152) Eine ganz kurze Übersicht und Charakterisierung bei *K. F. Herzfeld*, Ann. d. Phys. 41 (1914), p. 27.

überstreichen gewisse Areale, welche sich den Elektronen in den Weg stellen. Der sozusagen rein mechanische Zusammenhang mit der Quantentheorie kommt dadurch herein, daß die Amplitude der Atomschwingung Funktion der Energie, diese aber in bekannter Weise Funktion der Frequenz und der Temperatur ist; dadurch ergibt sich l als Funktion der Temperatur. Einen ersten Versuch von *K. Onnes*[153]) in dieser Richtung, gekennzeichnet durch den allerdings nicht näher begründeten Ansatz

$$(75) \qquad l = \frac{\text{konst}}{\sqrt{E_T}}; \quad E_T = 3R\,\frac{\beta\nu}{e^{\frac{\beta\nu}{T}} - 1}$$

in Verbindung mit der *Drude*schen Formel für die elektrische Leitfähigkeit, hat *Lindemann*[154]) aufgegriffen und weiter ausgebaut; er bildet auch, wie vorgreifend erwähnt sei (vgl. Nr. 22), die Grundlage der Theorie von *Wien*. *Lindemann* übernimmt ebenfalls die *Drude*sche Formel für die elektrische Leitfähigkeit und setzt nun die freie Weglänge in der Form an

$$(76) \qquad l = \frac{d^3}{2\pi(r+\varrho)^2}.$$

Darin bedeutet d den mittleren Abstand der Atome, r die Amplitude des Atommittelpunktes und ϱ den Radius des für die Zusammenstöße, d. h. für die Begrenzung der freien Weglänge allein in Betracht kommenden Atomkernes. Die Amplitude r eines Atoms von der Eigenfrequenz ν ist unter der Annahme quasielastischer Bindung (oder kleiner Schwingungen) unter Zugrundelegung des *Plank-Einstein*schen Ansatzes für die Energie der Schwingung gegeben durch

$$(76\text{a}) \qquad r = K\sqrt{\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}}.$$

Setzt man noch mit *Thomson* die Elektronendichte und nach dem Gleichverteilungsprinzip der alten Theorie die mittlere Elektronengeschwindigkeit proportional $\sqrt{T}$, so ergibt sich für den Widerstand die Form

$$(77) \qquad W = \frac{A^2}{e^{\frac{\beta\nu}{T}} - 1} + \frac{2AB}{\sqrt{e^{\frac{\beta\nu}{T}} - 1}} + B^2,$$

worin A und B Konstante sind. Entnimmt man die $\beta\nu$ Werte den spezifischen Wärmen, so erhält man eine Darstellung der beobachteten Temperaturabhängigkeit des Widerstandes, allerdings, und dies

153) *K. Onnes*, Leid. Comm. 119B, 1911.

154) *F. A. Lindemann*, Berlin. Ber. 1911, p. 316.

ist ein bedenklicher Mangel der Theorie, nicht mit dem richtigen Wert $2AB$ der zweiten Konstanten; für sehr tiefe Temperaturen ($T < 0{,}15\,\beta\nu$) versagt die Formel überhaupt.

Von den energetischen Theorien sei die von *Bernoulli*[155]), die allerdings wesentlich thermodynamisch orientiert ist, nur kurz erwähnt. *Bernoulli* stellte sich die Aufgabe, die Thermokraft, die Peltierwärme und die Thomsonwärme, die nach *Kelvins* thermodynamischen Untersuchungen durch drei Gleichungen miteinander und implizite mit der Temperatur verbunden sind, als explizite Funktionen der Temperatur darzustellen, und will die Aufgabe dadurch lösen, daß er — da die beiden Hauptsätze der Thermodynamik dazu nicht genügen — das *Nernst*sche Wärmetheorem zu Hilfe nimmt.[156]) Dabei kommt es letzten Endes darauf an, die innere Energie und die Entropie als explizite Temperaturfunktionen darzustellen, und die Quantentheorie kommt dadurch herein, daß der für die Thermokraft maßgebende Anteil der inneren Energie über *Einsteins* Ansatz für die Molekularwärme in Verbindung gesetzt wird mit den Eigenfrequenzen des Metallkörpers. *Bernoullis* Ansatz für die Energie ist jedoch nicht richtig, womit auch alles Folgende hinfällig wird.

Auf wieder anderem Wege hat nun *Jaffe*[157]) versucht, die Quantentheorie einzuführen durch die Annahme, „daß dieselben Teilchen, welche für die Wärmekapazität in Frage kommen, außer den freien Elektronen am Wärme- und Elektrizitätstransport beteiligt sind". Demgemäß sollen also neben den Elektronen Ionen sich am Ladungs- bzw. Energietransport beteiligen; ein detailliert vorgestellter Atomismus, der zum Teil mit den alten Vorstellungen von *Giese* (vgl. Nr. **1**), zum Teil mit denen von *Thomson* (vgl. Nr. **18**) manche Ähnlichkeit aufweist, führt für die Geschwindigkeit u_1 der Elektronen, da sie wesentlich frei sind, zum Gleichverteilungsansatz, für die der Ionen (u_2), da sie von den neutralen Atomen mit einer deren Schwingungsenergie gleichen kinetischen Energie abgespalten werden, zum *Plank-Einstein*schen Ansatz

$$\frac{m u_2^2}{2} = \frac{3}{2} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \tag{78}$$

Benutzt man dies in den aus *Drudes* Theorie direkt übernommenen Ausdrücken für die elektrische und thermische Leitfähigkeit, so er-

155) *A. L. Bernoulli,* Verh. d. Deutsch. phys. Gesellsch. 13 (1911), p. 573.

156) Vgl. auch eine Bemerkung von *W. Nernst,* Grundlagen des neuen Wärmesatzes (Knapp 1917), p. 177.

157) *G. Jaffe,* Phys. Ztschr. 13 (1912), p. 284.

hält man das Gesetz von *Wiedemann-Franz* in der Form

$$(79)\quad \begin{cases} \dfrac{\varkappa}{\sigma} = 3\,T\left(\dfrac{k}{e}\right)^2 \dfrac{1 + a\,\varphi(T)}{1 + a\,f(T)}; \quad a = \dfrac{u_2 l_2}{\sqrt{m_2}} \cdot \dfrac{\sqrt{m_1}}{u_1 l_1}; \\ \varphi(T) = \left[\left(\dfrac{h\nu}{kT}\right)^{\frac{5}{2}} \cdot e^{\frac{h\nu}{kT}}\right] : \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^{\frac{5}{2}}, \\ f(T) = \left[\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^{\frac{1}{2}}\right] : \left(\dfrac{h\nu}{kT}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Ein maßgebender Vergleich der Theorie mit der Erfahrung ist natürlich erst möglich, wenn man auch a als Funktion der Temperatur kennt; denn die Endformeln (79) enthalten zwei individuelle Konstante a und ν, die naturgemäß die Anschmiegungsfähigkeit an sich groß machen. Für hohe Temperaturen konvergiert allerdings $\frac{\varkappa}{\sigma}$ zu dem universellen Wert $3\,T\left(\frac{k}{e}\right)^2$, und ferner ergibt sich unter Benutzung der aus den spezifischen Wärmen bekannten ν Werte aus der Größenordnung von a für das Verhältnis $n_2 : n_1$ = Dichte der Atomionen : Dichte der Elektronen die Größenordnung 10^2, die also die Schwierigkeit bezüglich der Beiträge der Elektronen zu Atomwärmen sehr wohl beseitigen würde. Daraus allein aber auf die Richtigkeit der Theorie zu schließen, würde zu optimistisch sein.

Eine vierte Theorie endlich hat *Keesom*[158]) aufgestellt, die energetisch und zwar in radikalster Weise von der Quantentheorie Gebrauch macht; sie überträgt nämlich den von *Sommerfeld-Lenz*, *Tetrode*, *Keesom* selbst und anderen unternommenen Versuch einer der Theorie der festen Körper vollkommen analogen Theorie des idealen Gases auf das Elektronengas im Metall, teilt also mit jener zwar die formale Eleganz, aber auch die doch recht weitgehende Abstraktion und Unanschaulichkeit. Die Elektronen verhalten sich bei gewöhnlicher und selbst noch bei Glühtemperaturen vollkommen verschieden von einem idealen Gas, die spezifische Wärme ist wesentlich kleiner, die Energie und der Druck jedoch größer als der eines Gases klassischer Eigenschaften; auf eine ernstliche Schwierigkeit der Identifizierung speziell des Elektronengases mit dem elastischen Körper *Debyes* hat *Schottky*[159]) hingewiesen. Die Thermodynamik des Thermo-, des Peltier- und des Thomsoneffektes wird von *Keesom* direkt angeschlossen an jene Theorie[160]); es ergibt sich, daß die Thermokraft mit

158) *Keesom,* Phys. Ztschr. 14 (1913), p. 670; vgl. auch *W. Schottky,* Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 12 (1915), p. 185.

159) *W. Schottky,* Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 12 (1915), p. 147.

160) Vgl. dazu die experimentelle Untersuchung von *G. Wietzel*, Ann. d. Phys. 43 (1914), p. 605.

T wie T^3, die Peltierwärme wie T^4 und die Thomsonwärme wie T^3 nach Null gehen. Auch bezüglich der Elektronenemission heißer Metalle führt die Theorie von *Keesom* naturgemäß zu Resultaten, die von denen der klassischen Theorie, etwa der von *Richardson*, wesentlich abweichen und hier vermutlich zu einer experimentellen Entscheidung führen können. Da nach *Keesom* die kinetische Energie der Elektronen im Innen- und Außenraum verschieden ist (bei 1000° um einen Betrag, der einem Potentialunterschied von etwa 1 Volt entspricht), so ist die Austrittsarbeit von der in der klassischen Theorie eingeführten Austrittswärme um ebendiese Energiedifferenz verschieden, was natürlich auch in der Formel für die Sättigungsstromstärke zum Ausdruck kommen muß. Wichtiger als diese Resultate sind aber gewisse allgemeine Folgerungen, weil sie in Beziehung stehen zu der im folgenden Abschnitt zu besprechenden Theorie von *Wien*. Für hohe Temperaturen mündet die *Keesom*sche Quantentheorie nämlich in die Gleichverteilungstheorie, für tiefe ergeben sich die Dichte und die ungeordnete Geschwindigkeit der Elektronen in Übereinstimmung mit den Annahmen von *Wien* unabhängig von der Temperatur. Damit verschwinden, wie *Keesom* ausdrücklich und mit Recht hervorhebt, zwei der hauptsächlichsten Schwierigkeiten der alten Theorie; der geringe Beitrag der Elektronen zur spezifischen Wärme wird nun wenigstens formal verständlich, und man kann nun auch bei tiefen Temperaturen das Gleichgewicht zwischen den freien Elektronen und den im Atom gebundenen wiederum als ein Dissoziationsgleichgewicht betrachten.

Mit diesem Dissoziationsgleichgewicht beschäftigt sich zum Teil, ebenfalls auf quantentheoretischer Grundlage, auch eine Untersuchung von *March*.[161]) Die Emission eines Elektrons seitens eines Metalls soll nach der Annahme von *March* nur dann stattfinden können, wenn die Schwingungsenergie des Atoms ein ganzes Vielfache des Elementarquantums erreicht; dann aber soll stets die ganze Energie in kinetische Energie des Elektrons umgesetzt werden, diese also gleich $n \cdot h\nu - \psi$ sein, wo ψ die Verdampfungswärme des Elektrons ist. Es wird also die kinetische Energie der Elektronen dem Atom entnommen, und es soll ein Teil des durch *Debye*s Formel gegebenen Energieinhalts des festen Metallkörpers, der von der Temperatur abhängig ist, den freien Elektronen zukommen. Zu dieser Vorstellung kommt ferner im Sinne der zweiten *Plank*schen Theorie eine Annahme über die Nullpunktsenergie; die Schwingungsenergie der Atome verschwin-

161) *A. March*, Ann. d. Phys 49 (1916), p. 710.

det zwar bei absolutem Nullpunkt, es soll aber eine von der Natur des Metalls abhängige Zahl von Elektronen beim absoluten Nullpunkt in Freiheit sein und sich mit gewisser Energie bewegen. Die Durchführung dieser Gedanken (unter Benutzung mancher hypothetischer Annahmen) ergibt die Zahl n' der „freien" Elektronen. Wie sich zeigt, nimmt n' mit wachsendem ν_m (elastische Grenzfrequenz des *Debye*schen festen Körpers) ab, und es müssen demgemäß alle Einflüsse, welche ν_m ändern, rückwirkend n' und damit alle davon abhängenden Erscheinungen beeinflussen. Bezüglich der z. B. so erklärten Zunahme des Widerstandes mit wachsendem äußeren Druck liegt jedoch nach einer Bemerkung von *Benedicks*[162]) ein Vorzeichenfehler in dem von *March* benutzten Zahlenmaterial vor; bei Berücksichtigung dieses Umstandes verkehrt sich die vermeintlich sogar quantitative Übereinstimmung also zu einer bedenklichen Unstimmigkeit.

Eine weitere quantentheoretische Theorie, zwar nicht im vollen Umfang, sondern beschränkt auf die thermoionische Elektronenemission, hat *W. Wilson*[163]) entwickelt, auf die nur noch kurz hingewiesen sei. Der Grundgedanke ist der eines Gleichgewichts zwischen Elektronen, Oszillatoren und Strahlungsfeld unter bestimmten Annahmen über den Mechanismus des Energieaustausches zwischen Elektronen und Oszillatoren.

Zum Schluß verdient noch eine Untersuchung von *Herzfeld*[164]) erwähnt zu werden, wenn sie auch nicht eigentlich eine Theorie gibt. *Herzfeld* führt in die Formeln der Elektronentheorie — geleitet von den Ergebnissen der Quantentheorie, welche die Energie E als Funktion von T geben — an Stelle der Temperatur die Energie E der Elektronen und ihre Ableitung nach der Temperatur ein und versucht nun, die Beobachtungsdaten durch geeignete Wahl von $E(T)$ möglichst gut darzustellen. Dabei geht er aus von den Formeln für die thermische und elektrische Leitfähigkeit und insbesondere von dem im Gesetz von *Wiedemann-Franz* auftretenden Verhältnis der beiden Größen, das in seiner Darstellungsweise wird

$$\frac{\varkappa}{\sigma} = E\frac{dE}{dT}, \tag{80a}$$

und also neben den genannten beiden keinerlei andere Unbekannte

---

162) *L. Benedicks,* Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 13 (1916), p. 358.

163) *W. Wilson,* Ann. d. Phys. 42 (1913), p. 1154; vgl. auch *W. Schottky,* l. c. (Fußn. 118) p. 183 und *O. W. Richardson,* Phil. Mag. 23 (1912), p. 594.

164) *K. F. Herzfeld,* Ann. d. Phys. 41 (1914), p. 27 (vgl. auch p. 810 dieses Artikels).

mehr enthält. Es ergibt sich zunächst das bemerkenswerte Resultat, daß sich für $\frac{\varkappa}{\sigma}$ guter Anschluß an die Beobachtungen nur ergibt, wenn man für E die erste *Planck*sche Beziehung (also ohne Nullpunktsenergie) benutzt, daß aber alle anderen quantentheoretisch etwa noch plausiblen Ansätze[165]) Abweichungen außerhalb der Versuchsfehler ergeben. Legt man also die genannte Energieformel zugrunde, so kann man nun $n \cdot l =$ Elektronendichte $\times$ freie Weglänge rückwärts aus dem *Drude*schen Ausdruck für σ und aus den Beobachtungen errechnen; der Thomsoneffekt gibt dann weiter n als Funktion von T, so daß man auch l als Funktion T darstellen kann. Weiter durchgeführt und sozusagen zum axiomatischen Ausgangspunkt einer Theorie erhoben ist der Ansatz von *Herzfeld,* kinetische Energie des freien Elektrons = Energie eines *Planck*schen Oszillators, dann in einer ausführlichen Arbeit von *v. Hauer*[166]), die zum Teil für die freie Weglänge der Elektronen außerdem von dem *Wien*schen Ansatz Gebrauch macht (vgl. Nr. 22).

22. Theorie von W. Wien. Die einzige, bisher einigermaßen durchgeführte quantentheoretische Deutung der Elektronenleitung verdanken wir *W. Wien*[167]). Ihr Wert liegt in einer quantitativen Erfassung der Temperaturabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit nicht durch isoliert dastehende, ad hoc konstruierte Ansätze, sondern im Zusammenhang mit den quantentheoretischen Vorstellungen der modernen Physik über die Konstitution der festen Körper.

Der Gedankengang *Wiens* schließt sich an die in der vorigen Nummer erwähnten Versuche an, die freie Weglänge der Elektronen im Metall in Verbindung zu bringen mit der Amplitude der Atomschwingungen. Aus der gaskinetischen Theorie wird die Vorstellung übernommen, daß der Strom getragen wird von Elektronen, und es wird sogar formal derselbe Ausdruck für die Leitfähigkeit

$$\sigma = \frac{1}{2mu} e^2 N l \qquad (81\,\text{a})$$ [167a])

als Grundlage des folgenden gewählt. Dagegen wird angenommen, daß u sowohl wie N unabhängig von der Temperatur ist und demgemäß die ganze Temperaturabhängigkeit von σ in die freie Weglänge verlegt. Physikalisch bedeutet dies, daß die Vorstellung freier

165) Vgl. *H. A. Lorenz,* Theorie du Rayonnement et des Quantes, p. 477; *W. Nernst,* Ztschr. f. Elektroch. 17 (1911), p. 241.

166) *F. v. Hauer,* Ann. d. Phys. 51 (1916), p. 189; Phys. Ztschr. 18 (1917), p. 149.

167) *W. Wien,* Berlin. Ber. 1913, p. 84.

167a) Es ist dies der unkorrigierte Ausdruck von *Drude*; richtiger ist im Nenner der Faktor 3 (vgl. Fußn. 16).

Elektronen fallen gelassen wird, an deren Stelle *Wien* zunächst skizzenhaft ein Bild der Vorgänge stellt, das manche Ähnlichkeit mit den Vorstellungen von *Thomson* (p. 855), *Lenard* (p. 854, 877) und *Stark* (p. 859) hat; die einschneidendste Folge davon ist die Beschränkung der Theorie auf die Elektrizitätsleitung und die Ausschaltung aller Aussagen über die Wärmeleitung, insbesondere also auch der Verzicht auf eine Ableitung des Gesetzes von *Wiedemann-Franz*. Was nun die Abhängigkeit der freien Weglänge von der Temperatur betrifft, so läßt sich der Gedankengang *Wiens* am besten übersehen durch Zerlegung in einzelne Etappen. Die freie Weglänge ist jedenfalls abhängig von der Zahl der Zusammenstöße mit den Metallatomen, und zwar ist sie auch bei allgemeiner Definition (durch ein exponentielles Absorptionsgesetz) umgekehrt proportional der Zahl z der Zusammenstöße. Diese nun ist, auch ohne daß man auf den Mechanismus der Zusammenstöße näher eingeht, ihrerseits abhängig von der Amplitude x_0 der Atomschwingungen anzunehmen, es ist zunächst allgemein $z = z(x_0)$. Die Amplitude x_0, und zwar nicht nur die mittlere Größe derselben, sondern auch die Art der Verteilung auf die einzelnen Atome ist aber eine Funktion der Temperatur, so daß also z und damit σ eine Funktion der Temperatur wird. Nun greift die Quantentheorie ein, und zwar in Form der Annahme, daß die Atome nur Schwingungen ausführen können, bei denen die Energie ein ganzes Vielfache von $h\nu$ ist; unter der Annahme einer quasielastischen Bindung (oder physikalisch wohl besser unter der Annahme kleiner Schwingungen) der Atome läßt sich dann die Amplitude x_0 eines Atoms ausdrücken durch die Eigenfrequenz ν dieses Atoms und für die Abhängigkeit des ν von der Temperatur der bekannte Ansatz der Quantentheorie benutzen. Die Verteilung über die einzelnen Atome und deren ν-Werte nach der üblichen statistischen Methode erfordert aber nun natürlich noch die Festsetzung der Grenzen für die ν, als deren eine $\nu = 0$ selbstverständlich ist, als deren andere *Wien* die *Debye*sche Grenzfrequenz $\nu = \nu_m$ nimmt; dadurch tritt außer den universellen Konstanten h und k im Endresultat noch die individuelle Konstante ν_m auf, und es ergibt sich die Möglichkeit, die elektrischen Eigenschaften des Metalls unmittelbar anzuschließen an die elastischen. Die rechnerische Durchführung dieses Gedankenganges ergibt für den Widerstand $\left(\text{prop. } \frac{1}{\sigma}\right)$:

$$W = C \cdot \int_0^{\nu_m} \frac{\nu \, d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \tag{81}$$

Die Diskussion dieses Ausdruckes durch geeignete Reihenentwicklung hat nur rein mathematisches Interesse, weshalb hier nur drei extreme Näherungen aufgeführt seien, nämlich

$$
(82)\quad \begin{cases}
\text{für sehr hohe Temperaturen} \quad W_T = C \cdot \frac{k\nu_m}{h} T, \\
\text{für sehr niedere Temperaturen} \quad W_T = C\left(\frac{kT}{h}\right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{6}, \\
\text{für } \left(\frac{h\nu_m}{kT}\right) \text{ klein:} \\
\frac{W_T}{W_{273}} = T\left(0{,}00366 + \frac{h\nu_m}{298\,000\,k}\right) - \frac{1}{4}\frac{h\nu_m}{273\,k} = \beta T - C.
\end{cases}
$$

Die Prüfung der Theorie an der Erfahrung kann nun in zweierlei Weise erfolgen. Zunächst wird man, und dies ist ohne weiteres überzeugend, mit Hilfe der von *Debye* gegebenen ν_m Werte den Temperaturkoeffizient β berechnen und mit den empirischen Werten vergleichen. Die Übereinstimmung ist eine recht gute und erstreckt sich vor allem auch auf die hohen Werte, die Eisen und Nickel vermöge ihrer großen Elastizität der Theorie nach erwarten lassen. In zweiter Linie wird man die aus der Gleichung (81) bzw. (83) folgende Abhängigkeit des Widerstandes von der Temperatur über ein größeres Temperaturintervall mit der Erfahrung vergleichen. *Wien* hat die diesbezüglichen numerischen Rechnungen für einige Metalle durchgeführt und die Resultate mit Messungen von *K. Onnes* verglichen, und zwar im Intervall $T = 273^0$ bis $T = 13{,}9^0$, wobei sich im ganzen eine richtige Wiedergabe der Beobachtungen ergab.

In diesem Zusammenhang — wobei übrigens die Theorie von *Wien* nur als der vielleicht am weitesten durchgeführte Vorstoß in das Gebiet der Quantentheorie anzusehen ist, da das wesentliche neue Moment, nämlich der Zusammenhang des elektrischen Widerstandes mit den elastischen Frequenzen auch in anderen quantentheoretischen Ansätzen (vgl. Nr. 21) auftritt — sind einige Bemerkungen von *Grüneisen*[168]) zur Klärung der Sachlage bemerkenswert. *Grüneisen* hat das gesamte neuere Beobachtungsmaterial über den Gang des Widerstandes bei tiefsten Temperaturen einer Diskussion unterzogen und sich dabei von den aus den quantentheoretischen Ansätzen fließenden Hinweisen leiten lassen. Er findet zunächst, daß der spezifische Widerstand eines (einatomigen) Metalls bei tiefer Temperatur um so mehr einer universellen Funktion $f\left(\frac{T}{\beta\nu_m}\right)$ proportional läuft, je reiner das Metall ist

168) *E. Grüneisen,* Verh. d. Deutsch. phys. Gesellsch. 15 (1913), p. 186; 20 (1918), p. 36.

$\left(\beta \text{ abgekürzt für } \frac{h}{k}\right)$. In Verbindung mit der Ausgangsgleichung für den Widerstand

(83a) $$w = \frac{2mu}{e^2 N l}$$

und dem Ausdruck für die freie Weglänge, den *Grüneisen* allgemeiner als *Wien* in der funktionellen Form

(83b) $$\frac{1}{l} = C \cdot \frac{h}{M \cdot \nu_m v} f\left(\frac{T}{\beta \nu_m}\right)$$

schreibt (C dimensionslose Konstante, M Atomgewicht, v Atomvolumen), folgt für $\frac{u}{N}$ unabhängig von der Temperatur das obengenannte empirische Ergebnis aus der Theorie, es zeigt sich aber zugleich, daß die von *Wien* errechnete Form für die universelle Funktion nur in grober Annäherung die tatsächlichen Verhältnisse darstellt, so daß man nach möglichen Erweiterungen der *Wien*schen Ansätze suchen muß, z. B. indem man u und N wiederum als Funktion der Temperatur ansetzt. Wie dies zu geschehen hat, darüber lassen sich vorläufig allerdings kaum Vermutungen äußern, wenn auch *Grüneisen* in dieser Beziehung einen kleinen Hinweis in der zweiten seiner in Fußn. 168) genannten Arbeiten geben zu können glaubt.

Andererseits ist es nun aber bemerkenswert, daß der *Wien*sche Ausdruck für die freie Weglänge den vom Standpunkt der klassischen Theorie recht wenig verständlichen Einfluß des Druckes auf die elektrischen Eigenschaften der Metalle wiedergibt.[169]) Aus Gleichung (83) folgt nämlich zunächst in Verbindung mit der Aussage der Theorie der festen Körper, wonach auch die Entropie bei tieferen Temperaturen nur Funktion von $\frac{T}{\beta \nu_m}$ ist, die Beziehung für die freie Weglänge l:

(84) $$\frac{1}{l}\left(\frac{\partial l}{\partial p}\right)_s = -\frac{1}{C_p}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_s + k_s,$$

wo C_p die Atomwärme und k_s die adiabatische Kompressibilität ist, d. h. daß die freie Weglänge l bei adiabatischer (und um so mehr bei isothermer) Druckerhöhung wächst. Man kann aber noch weiter gehen und quantitativ die Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung nachweisen. Für den Druckkoeffizienten, dessen Darstellung in einer zur Diskussion geeigneten Form *Grüneisen* gelungen ist (Grundlage bilden wieder die Gleichungen (83a) und (83b)), gibt die Theorie nach den ausgedehnten Beobachtungen von *Beckmann* (Fuß-

169) Die experimentelle Literatur ist in der in der Fußn. 168) genannten Arbeit von *Grüneisen* vollständig zitiert. Vgl. dazu noch *B. Beckmann*, Phys. Ztschr. 16 (1915), p. 59; 18 (1917), p. 507.

note 169) für Gold, Silber, Aluminium und Kupfer gute, für eine Reihe anderer Metalle mit Ausnahme von Wismuth und Quecksilber wenigstens näherungsweise Übereinstimmung mit der Erfahrung.

23. Beziehungen zur Atomphysik. Ausblick. Den gaskinetischen Theorien aus innerer Notwendigkeit, aber auch den meisten der neueren quantentheoretischen Ansätze sind Aussagen über die intimeren Eigenschaften der Atome und über deren Zusammenhang mit der Elektronentheorie der Metalle fremd. Zwar ist man zu einer Individualisierung der Atome von den glatten und harten elastischen Kugeln zu Kraftzentren mit verschiedenen Kraftgesetzen fortgeschritten man hat auch den Vorgang der Dissoziation der Elektronen, der Dissoziationswärme u. dgl. gelegentlich betrachtet, aber letzten Endes hat man es nie mit etwas anderem zu tun als mit physikalisch recht farblosen Rechengrößen. Es fehlte bisher (mit Ausnahme der neuesten Ansätze von *Haber*) der physikalische Zusammenhang zwischen der Elektronentheorie und dem Chemismus der Metalle; nur eine Reihe von empirischen Hinweisen liegt in dieser Richtung vor.

Man wird zunächst nach Beziehungen zwischen dem elektrischen Verhalten der Metalle und ihrer Stellung im periodischen System der Elemente suchen. *Baedecker*[170]) hat bereits in dieser Weise aus einem recht umfangreichen Material die elektrische Leitfähigkeit in Verbindung gesetzt mit der Ordnung des periodischen Systems und einige augenscheinliche Zusammenhänge herausgefunden; später hat dann *Biltz*[171]) in übersichtlicher graphischer Darstellung die Leitfähigkeit als Funktion des Atomgewichts gegeben. Damit hängt natürlich auch zusammen, daß die aus der Leitfähigkeit berechneten Elektronendichten einen periodischen Gang mit dem Atomgewicht zeigen, wie dies z. B. *Riecke*[172]) bemerkt hat. Einen Fortschritt bedeutet der Gedanke von *Benedicks*[173]), nicht die spezifische Leitfähigkeit zu einem Vergleich der verschiedenen Metalle zu benutzen, sondern die Leitfähigkeit pro Atom, die sog. „atomare Leitfähigkeit", die gegeben ist durch (spezifische Leitfähigkeit) : (relative Anzahl der Atome in ccm):

$$\sigma_A = \sigma \cdot \frac{A}{s}, \tag{85}$$

170) *K. Baedecker,* Elektrische Erscheinungen in Metallen, p. 21.

171) *W. Biltz,* Ztschr. f. Elektroch. 19 (1913), p. 613. Vervollkommnet durch ein größeres Beobachtungsmaterial durch *Benedicks* (Fußn. 173).

172) *E. Riecke,* Phys. Ztschr. 10 (1909), p. 508.

173) *K. Benedicks,* Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 13 (1916), p. 351; der erste Hinweis auf die Bedeutung der atomaren Leitfähigkeit rührt wohl von *F. Richards,* Ztschr. f. anorg. Chem. 59 (1908), p. 356 her.

wo A das Atomgewicht, s das spezifische Gewicht des betreffenden Metalls ist. Die Maxima der σ_A Kurve kommen in den Tat in engere Beziehungen zu dem Verlauf der Atomvolumenkurve, sie liegen in der Nähe von deren Maximas (Li, Na, K, ...), weiterhin in der Nähe von deren Minimas (Al, Cu, Ag, Au), zudem sind manche Unstimmigkeiten, die sich bei Benutzung der spezifischen Leitfähigkeit gezeigt hatten, nun verschwunden. Jedenfalls scheint es bereits durch diese Resultate sichergestellt zu sein, daß wirklich ein tiefer begründeter Zusammenhang zwischen der Leitfähigkeit und den Eigenschaften des chemischen Atoms besteht. Geleitet von seinen neuartigen theoretischen Vorstellungen (vgl. Nr. 20) hat *Benedicks* diese Zusammenhänge weiterverfolgt und in der sog. Leitungskapazität C, definiert durch

$$C = \frac{\sigma_A}{\nu}, \tag{86}$$

wo ν die Atomfrequenz (bzw. die Grenzfrequenz) ist, eine für das elektronische Verhalten der Metalle charakteristische Größe gefunden. Einerseits zeigt sich nun ein ganz klarer Parallelismus der C- und der Atomvolumenkurve, andererseits ein inniger Zusammenhang mit der Valenz und mit der Elektronenaffinität, wie sie etwa in der elektrolytischen Zersetzungsspannung zum Ausdruck kommt. Es ist interessant, daß eine Deutung namentlich des letzteren Zusammenhanges auf Grund der nach den *Bohr*schen Ideen von *Vegard* aufgebauten Atommodelle möglich zu sein scheint.[174])

Auf einen Mangel der Feststellungen von *Benedicks* hat nun aber *Grüneisen*[175]) hingewiesen durch die Bemerkung, daß *Benedicks* über die Temperatur, bei welcher die Leitfähigkeit gemessen werden sollte, keine Voraussetzung macht, und daß deshalb eine Verzerrung der von ihm gefundenen einfachen Gesetzmäßigkeiten möglich sei, wenn man die σ-Werte für tiefe Temperaturen zugrunde legen würde. *Grüneisen* hat deshalb vorgeschlagen, die atomaren Leitfähigkeiten verschiedener Metalle nicht bei derselben Temperatur zu vergleichen, sondern bei individuellen Temperaturen Θ — die er korrespondierende nennt — und zu denen er durch die empirische Feststellung gelangt[176]), daß der Widerstand der Metalle proportional einer universellen Funktion von $\frac{T}{\Theta}$ ist (Θ ist auch die charakteristische Temperatur in *Debyes* Theorie der Atomwärme). Damit ergibt sich zugleich

174) *L. Vegard*, Verh. d. Deutsch. phys. Gesellsch. **19** (1917), p. 344.
175) *E. Grüneisen*, Verh. d. Deutsch. phys. Gesellsch. 20 (1918), p. 53.
176) *E. Grüneisen*, Verh. d. Deutsch. phys. Gesellsch. 20 (1918), p. 36.

eine Deutung der *Benedicks*schen Leitungskapazität. Aus der genannten empirischen Beziehung für den Widerstand

$$w \sim TF\left(\frac{T}{\Theta}\right) \tag{87}$$

folgt nämlich unter Absonderung des Atomvolumens v für die atomare Leitfähigkeit

$$\sigma_A = \frac{C'\Theta}{TF\left(\frac{T}{\Theta}\right)}, \tag{88}$$

wo C' nun wesentlich von der Temperatur unabhängig ist. Für genügend hohe Temperaturen, wo $TF\left(\frac{T}{\Theta}\right)$ für alle Metalle nahezu denselben Wert hat, wird daraus

$$\sigma_A = C' \cdot v, \tag{89}$$

so daß also die Leitungskapazität proportional ist der Konstanten C', d. h. der bei der korrespondierenden Temperatur gebildeten atomaren Leitfähigkeit. Damit ist nun jede Willkür aus der Deutung des Beobachtungsmaterials verschwunden, und *Grüneisen* ist es gelungen, aus den vorliegenden Beobachtungsdaten bei tiefen Temperaturen ein Gesetz abzuleiten, das dem oben erwähnten von *Benedicks* für die Leitungskapazität angegebenen Zusammenhang mit dem periodischen System entspricht, ohne dessen Mängel zu haben. Es ist nämlich die atomare Leitfähigkeit bei korrespondierenden Temperaturen im wesentlichen eine periodische Funktion des Atomgewichtes, derart, daß sie von maximalen Werten in der ersten Gruppe des periodischen Systems zu minimalen in der 0. oder 8. Gruppe abfällt.

Schon früher wurden Beziehungen zum Chemismus der Atome namentlich von *Königsberger* und seinen Mitarbeitern betont.[177]) *Königsberger* weist darauf hin, daß die Eigenschaft eines Elementes, als Leiter der Elektrizität zu dienen, mit seinem elektropositiven Charakter zusammenhängt und sich fassen läßt durch die Größe der Dissoziationsarbeit bei Entfernung eines Elektrons vom Atom, und findet Beziehungen zur Valenz. Was zunächst die Dissoziationsarbeit und die damit zusammenhängende Affinität des Atoms zum Elektron anlangt, so kann man aus dem Temperaturkoeffizient der elektrischen Leitfähigkeit mit Hilfe der *Königsberger*schen Widerstandsformel (p. 827) die Dissoziationswärme Q unter gewissen Beschränkungen für Metalle bestimmen;

177) Zuerst wohl Verh. d. Deutsch. phys. Gesellsch. 9 (1907), p. 388. Literaturübersicht in dem zusammenfassenden Bericht Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 4 (1907), p. 158; speziell die Affinitätsfragen sind im Zusammenhang behandelt Phys. Ztschr. 12 (1911), p. 1084 oder Verh. d. Deutsch. phys. Gesellsch. 13 (1911), p. 131.

Q (Dissoziationswärme für 1 g Atom Elektronen und 1 g Atom positiver Ionen) zeigt einen deutlichen Gang mit der Stellung des Elementes im periodischen System. Die Elemente mit kleinerem Atomgewicht und weder ausgesprochenem elektropositiven noch elektronegativen Charakter haben Werte von Q etwa zwischen 100 und 10000; geht man in einer Vertikalreihe des periodischen Systems nach größeren Atomgewichten, so wird Q kleiner, d. h. die Elemente werden metallähnlicher, so z. B. in den Reihen Si, Ti, Zr oder P, As, Sb; zu beachten ist allerdings, daß Q einen bestimmten Wert hat nur für jeweils eine bestimmte Modifikation oder einen bestimmten kristallographischen Zustand und sich mit diesem ändert, so daß hier eine Unbestimmtheit besteht, welcher Wert für die Affinität maßgebend sein soll. Über die Valenz hat *Königsberger* einige Spekulationen geäußert[178]), in denen er, in der Hauptsache an *Stark* und *Lenard* anschließend, die verschiedenen Arten der vom Atom abspaltbaren Elektronen (Valenzelektronen, Oberflächenelektronen) unterscheidet. Daß ein Zusammenhang der Valenz mit der Elektronik der Metalle besteht, kann man, wenn auch nur in rohem Umriß, aus dem Gang der Elektronenzahl p mit der Valenz schließen. *Drude*[179]) hat p aus metalloptischen Überlegungen errechnet, mit der Valenz verglichen und seine Vermutung, daß p ungefähr mit der Valenz übereinstimmt, wenigstens der Größenordnung nach bestätigt gefunden; die p-Werte schwanken nach seinen Zahlen von 0,47 bei Kupfer bis 7,5 bei Au, also um etwa das 16fache, das Verhältnis p : Valenz dagegen hält sich immerhin zwischen den Grenzen 1 und 3,5.

Zwei Hinweise auf die Vorstellungen von *Lenard* und *Stark* mögen diese Zusammenstellung beschließen. *Lenard*[180]) hat mehrfach darauf hingewiesen, daß die Verhältnisse im Innern des festen Metalls physikalisch andere sind als für isolierte Metallatome (etwa im Metalldampf), und die starke Dissoziation durch eine Nähewirkung zu deuten versucht und daraus eigenartige Vorstellungen über die elektrische Leitung in Metallen, über die thermoionische Elektronenemission usf. entwickelt, die mit den in diesem Artikel besprochenen Bildern nur wenig mehr zu tun haben, aber physikalisch beachtenswert sind; *Stark*[181]) hat (vgl. Nr. **19**) im Zusammenhang mit seiner Gittertheorie detaillierte Modelle der Kraftfelder in den Metallen entworfen, die mit den Valenzkraftfeldern zusammenhängen.

---

178) *J. Königsberger* und *K. Schilling*, Ann. d. Phys. 32 (1910), p. 227.
179) *P. Drude*, Ann. d. Phys. 14 (1904), p. 947.
180) *Ph. Lenard*, Zusammenfassung in Heidelberger Akademie 1918, Nr. 5.
181) *J. Stark*, Atomdynamik, Bd. 3, § 25.

Versucht man, sich nun auf Grund der bisherigen theoretischen Bemühungen ein Bild von dem weiteren Gang der Forschung zu machen, so wird man kaum zweifelhaft sein können, wohin der Weg führt. Die gaskinetischen Theorien wird man, ihrer Einfachheit und Eleganz und auch mancher ihrer Erfolge wegen schweren Herzens, aufgeben müssen, sicher wenigstens in der bisherigen Form. Vor allem ist es die tiefere Einsicht in den Feinbau der Metalle, die auch hier auf neue Bahnen drängt, nämlich auf den Ersatz des strukturlosen Ensembles der Elektronen und Atome durch das Bild des Raumgitters. Die neue Theorie muß nun wieder von vorn anfangen, alle die schönen Ergebnisse ihrer klassischen Vorgängerin abzuleiten; ob dies im einzelnen mit Hilfe quantentheoretischer Vorstellungen und *Bohr*scher Atommodelle gelingen wird, ist nicht so wichtig wie der Umstand, daß aus rein physikalischen Erwägungen und Erfahrungen heraus ein neues Bild an Stelle des alten treten muß.

(Abgeschlossen im Mai 1921.)